# EPR paradoxon, Bell egyenlőtlenség

Teljesnek tekinthető-e a fizikai valóság kvantummechanikai leírása, teszik föl a kérdést híres cikkükben A. Einstein, B. Podolsky és N. Rosen 1935-ben.

Egzakt definíciót igyekeznek adni a teljes elméletről:

Teljes az elmélet, ha a *valóság minden elemének* megfelel egy fizikai mennyiség az elméletben.

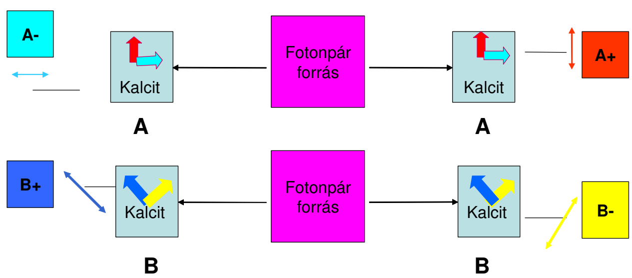
De mi a valóság egy eleme? Erre is választ kapunk.

Ha egy fizikai rendszer bármifajta megzavarása nélkül teljes bizonyossággal, azaz egységnyi valószínűséggel meg tudjuk mondani egy fizikai mennyiség értékét, akkor létezik a fizikai valóság egy olyan eleme, amely megfelel ennek a mennyiségnek.

Einstein Podolsky és Rosen példát adnak arra, hogy egy részecske helye és impulzusa egyaránt a valóság egy elemének tekinthető, ugyanakkor rámutattak arra, hogy a kvantummechanika szerint nincs értelme arról beszélni, hogy egy részecske helyének és impulzusának jól meghatározott értéke legyen. A kvantummechanikában mind a hely mind azt impulzus folytonos értékeket vehet föl, ezért tárgyalásuk viszonylag bonyolult, és mi is csak később foglalkozunk ezekkel. Így az ő példájuk helyett azt a D. Bohm által 1957-ben javasolt gondolatkísérletet tekintjük, amely egy olyan egyszerűbb, rendszert vizsgál, amelynek csak két bázisállapota lehetséges, azaz már egy kétdimenziós Hilbert tér elegendő az állapotok jellemzésére Itt konkrétan fotonok polarizációját tekintjük.

Az azóta ténylegesen is sokszor megvalósított kísérlet lényege  a következő. Egy forrás fotonpárokat generál, amelyek a térben különböző irányokban terjednek. A pár tagjainak polarizációs állapotát egymástól függetlenül mérni lehet. A mérések szerint a pár tulajdonságai között szigorú (anti)korreláció van, ami a következőt jelenti. Ha mindkét fotont ugyanolyan polarizációs beállítású mérőberendezésen engedjük át, pl. vízszintes-függőleges, *A* jelű berendezésen, akkor ha az egyik foton vízszintesen polarizált, akkor a párja függőlegesen, vagy fordítva. Ugyanez igaz ha mindkét oldalon egy tetszőleges más beállítású *B* berendezésen mérjük mindkét fotont, azok polarizációja a *B* berendezés ( operátor) szempontjából is ellentétes irányú, ortogonális állapot. Ez az antikorrelációs tulajdonság következik a fotonpár keltésésnek módjából is, amit alább részletezünk. Az ilyen tulajdonságú részecskepárokat EPR pároknak is szokás nevezni.

**A.Einstein, B. Podolsky, N. Rosen (EPR) 1935,**
**bizonyítják(?), hogy a kvantummechanika nem teljes**
**D. Bohm 1957**

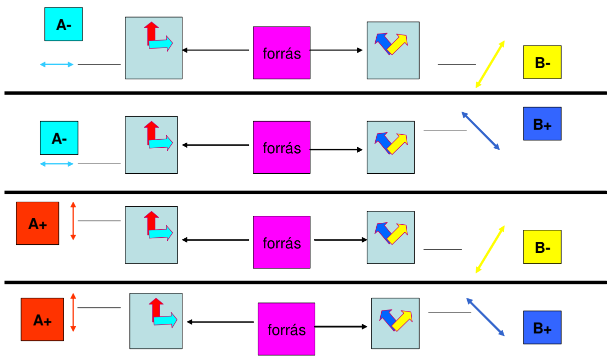



**Szigorú korreláció van a két oldal eredményei között, ha ugyanolyan berendezés van mindkét oldalon.**

Eszerint elegendő csak az egyik oldalon mérni. A pár másik tagjának enélkül is meg tudjuk mondani az állapotát, az tehát a méréstől függetlenül létezik mondja EPR. Ugyanis. nem lehet, hogy a jobb oldalon azért mérünk + -t, mert ezzel egyidőben mérve a baloldali mérés eredménye – volt, mert a hatás hatás terjedéséhez idő kell: ez a „lokalitás elve”, amit Einstein.relativitáselmélete különösen hangsúlyoz. A nem mért foton polarizációja tehát a valóság egy eleme, mert azt annak mérése nélkül is egységnyi valószínűséggel meg lehet mondani.

Ennél még több is igaz, egy EPR pár esetén a részecske állapotát egyszerre kétfajta (inkompatibilis) berendezés szempontjából is meg tudjuk mondani, ami a kvantummechanika szerint lehetetlen. Tegyünk ugyanis két különböző berendezést a két oldalra:

Különbözo berendezések a két oldalon




Ha ekkor a baloldali részecskén az $A$ tulajdonságot (fizikai mennyiséget) mérjük, akkor tudjuk, hogy a jobboldali párja az $A$ szempontjából milyen állapotú (u.i.) éppen merőleges a baloldalon mért irányra. Jobboldalon viszont mérhetünk egy $B$ beállítású berendezéssel, így megállapíthatjuk ennek az egyetlen részecskének mind a az $A$, mind a $B$ szempontjából a polarizációs tulajdonságait, s hasonlóan a párjának is a másik oldalon. Ezek a tulajdonságok tehát egyszerre meghatározottak egy-egy részecske esetén. A kvantummechanika viszont azt állítja, hogy egy adott beállítás ($A$ fizikai mennyiség) szempontjából meghatározott állapotban lévő részecske egy másik beállítás ($B$ fizikai mennyiség) szempontjából nem lehet meghatározott állapotban, ha $[A, B] \neq 0$. Az ábrán mutatott nem egyforma irányú $A$ és $B$ berendezésnél pedig ez a helyzet. EPR szerint tehát a kvantummechanika nem ad számot a részecskét egyszerre jellemző két fizikai menyiségről, tehát nem teljes. N. Bohr ezzel szemben azzal érvelt, hogy a két szétrepülő részecske egyetlen szétválaszthatatlan kvantumredszert alkot (a ma használatos szóval összefonódott állapotban van) ezért az egyik részén történő beavatkozás, mérés, a másik oldal eredményét is azonnal befolyásolja, még ha a két rész távol is van egymástól. Ezt Einsein a lokalitási elvére hivatkozva nem tudta elfogadni, és a vita nem dőlt el.

A kérdés eldöntésére John Bell egy konkrét kísérleti elrendezést javasolt 1964-ben. Eszerint mérjünk a két különböző irányba repülő részecskék esetén mindekettőre egymástól függetlenül háromféle fizikai mennyiséget, azaz polarizációt $A$-t $B$-t és $C$-t. Kiderül, hogy ezáltal kísérletileg ellenőrizhető, hogy a kvantuumechanika vagy a lokális rejtett paraméteres elmélet a helyes. Az eredeti Bell féle gondolatot itt egy egyszerű, Wigner Jenő által javasolt módon muatjuk be.

Tegyük föl, hogy a részecskepárok tagjainak már a mérés előtt, attól függetlenül mindhárom irányban meghatározott irányú + vagy – polarizációja van, és az ellentétes irányba repülő részecskéknek egy adott irány szempontjából mindig ellentétes a polarizációja. A lehetséges párok típusát a táblázat mutatja, ezek száma 8, és jelöljük egy konkrét méréssorozatnál a mért részecskepárok típusának számát $N_k$-val. Itt annyit írunk elő, hogy a pár két tagja minden adott irány szempontjából ellentétes polarizációjúak, ami kísérletileg így is van ha mindkét oldalon ugyanazt a beállítást használjuk.

| | bal oldalon | | | jobb oldalon | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A$ | $B$ | $C$ | $A$ | $B$ | $C$ |
| $N_1$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $N_2$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $N_3$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $N_4$ | $+$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $N_5$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $N_6$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $N_7$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $N_8$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Tekintsük most azokat a párokat amelyekre a balra repülő részecske $A+$, jobbra repülő részecske $C+$ mérési eredményt ad, ezek $N(A+,C+)$ száma a fönti táblázatból $N(A+,C+) = N_2+N_4$. Hasonlóan azon párok száma amelyekre baloldalon $A+$ jobboldalon $B+$ az eredmény $N(A+,B+) = N_3+N_4$, végül pedig azoké, amelyekre balra $B+$ jobbra $C+$ az eredmény, ez a szám $N(B+,C+) = N_2+N_6$. Kapjuk, hogy

$$N(A+,C+) \le N(A+,B+) + N(B+,C+) \qquad \text{\# (BellN)}$$

Ezeknek a pároknak a számát meg lehet mérni, és a fönti egyenlőtlenséget össze lehet hasonlítani a kísérletek eredményével. Mielőtt ezt tovább elemeznénk, fogalmazzuk át a fönti eredményt valószínűségekre, hogy annak a kvantummechanikával való viszonyát föl tudjuk tárni.

Legyen $P(A+,C+)$ annak a valószínűsége, hogy egy véletlen választás során a baloldali megfigyelő $A$ irányba $+$-t mér s a párján a jobboldali $C+$-t stb. Ekkor nyilván

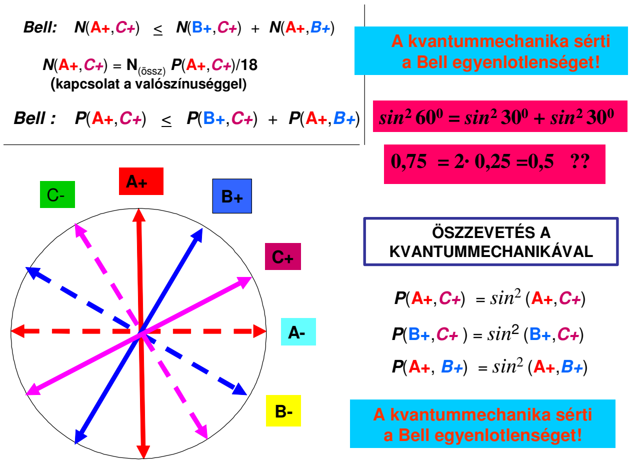
$$P(A+,C+) = \frac{N(A+,C+)}{\sum_{i=1}^{8} N_i}$$

és hasonlóan a többi valószínűségre is $P(A+,B+) = \frac{N(A+,B+)}{\sum_{i=1}^{8} N_i}$, $P(B+,C+) = \frac{N(B+,C+)}{\sum_{i=1}^{8} N_i}$. Ezek alapján a ref: BellN egyenlőtlenség a

$$P(A+,C+) \le P(A+,B+) + P(B+,C+) \qquad \text{\# (BellP)}$$

alakba írható, és ez egy Bell egyenlőtlenség, amely nem a kvantummechanikán, hanem azon alapszik, hogy a reszecskepároknak a mérés előtt már meghatározott tulajdonságai vannak.

Vizsgáljuk meg mit mond a fönti valószínűségekről a kvantummechanika, ahogyan az alábbi ábra mutatja. Egy valódi mérésnél egy-egy kristály van mindkét oldalon, és ezeket forgatjuk egymástól függetlenül véletlenszerűen az $A$ $B$ és $C$ irányba. Ha baloldalon pl. $A+$ -t mérünk, a párja a másik oldalon a párjának állapota $A-$. Annak a valószínűségi amplitúdója tehát, hogy ez a másik részecske egy tetszőleges olyan $\hat{e}_\theta$ irányba polarizált, amely az a $A-$ iránnyal $\theta$ szöget zár be $\cos\theta$. A megfelelő valószínűség tehát $\cos^2\theta$. Vagy ha az $A+$al bezárt $\alpha = \pi/2-\theta$ szögét használjuk ennek az $\hat{e}_\theta$ iránynak, akkor ez a valószínűség $\sin^2\alpha$. Mivel mindkét oldalon egymástól függetlenül $1/3$ valószínűséggel választunk $A$-t $B$-t vagy $C$-t, egy adott beállítás valószínűsége $1/9$. Annak a valószínűsége pedig, hogy a baloldalon pl. $A+$ az eredmény amíg a jobboldalon nem mérünk $1/2$, így az adott beállításnál pl. $P(A+,C+) = \frac{1}{18}\sin^2(A+,C+)$, ahol $(A+,C+)$ a két irány közötti szög.




A Bell egyenlőtlenség sérülése

Válasszuk az ábrán mutatott speciális irányokat, azaz legyenek a kalcit kristályok, tehát a mérőberendezések $A$, $B$ és $C$ sajátirányai egymáshoz képest $30^0$-kal elfordítva, vagyis legyen az $(A+,B+) = (B+,C+) = 30^0$ os szög . Ekkor a megfelelő kvantummechanikai valószínűségeket kiszámítva

$$P(A+,C+) = \frac{1}{18}\sin^2 60^0 = 3/4 \qquad P(A+,B+) = \frac{1}{18}\sin^2 30^0, \qquad P(B+,C+) = \frac{1}{18}\sin^2 30^0$$

#

a közös $\frac{1}{18}$ tényezővel egyszerűsítve kapjuk, hogy ezek az értékek nyilvánvalóan nem teljesítik a Bell egyenlőtlenséget, mert ref: BellP-be beírva ehhez az kellene, hogy $\sin^2 60^0 \le 2\sin^2 30^0$ teljesüljön, azaz igaznak kellene lennie a

$$\frac{3}{4} \le \frac{1}{2}$$

#

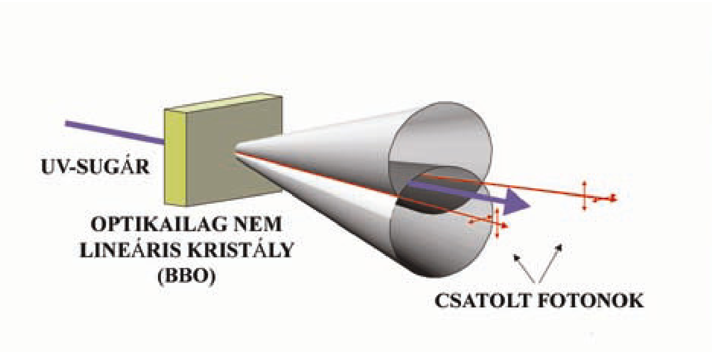
eredménynek, ami nyilvánvalóan hamis.

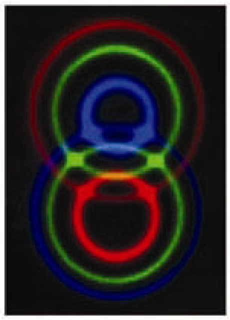
Ezek szerint a kvantummechanikai valószínűségek sértik a Bell egyenlőtlenséget. Így direkt kísérleti lehetőség nyílik annak megállapítására, hogy a kvantummechanika vagy a Bell egyenlőtlenségek érvényesek. *A kísérletek szerint, amelyek közvetlenül a fönti $N(A+,C+)$ stb mennyiségeket mérik, a Bell egyenlőtlenség alkalmasan választott $A$, $B$, és $C$ irányok esetén nem érvényes, viszont érvényesnek bizonyulnak a kvantummechanika által jósolt eredmények.*

Mindez azt jelenti, hogy vagy a méréstől függetlenül még a mérés előtt egyszerre létező tulajdonságok föltételezése nem igaz, vagy pedig létezik egy nemlokális kommunikáció a pár két tagja között, azaz az egyik részecske állapot azért lesz olyan amilyen, mert a párján, tőle messze, akár *térszerűen* elválasztott eseményként (ld. relativitáselmélet) valamilyen adott eredményt mérünk. (Meg lehet azonban mutatni, hogy ennek ellenére információt a két mérési hely között ilyen módon nem lehet továbbítani, ebből a szempontból tehát a lokalitási elv nem sérül.) Mindkét előbbi állítás ellentmond a a természetről alkotott hagyományos fölfogásnak. Az első esetben annak, hogy egy részecske esetén az azt jellemző minden mennyiségnek – tehát az inkompatibilis mennyiségeknek is – a mérés előtt, attól függetlenül egyszerre van meghatározott értéke. Ezt a föltételezést néha szokás realizmusnak nevezni. A második esetben a lokalitásnak abban az értelemben, hogy egy részecskén végzett valamilyen mérés eredménye *pillanatszerűen* befolyásolja a mérés helyétől távol lévő párján elvégzett mérés eredményét.

A Bell egyenlőtlenség teljesülésére illetve sérülésére vonatkozó első kísérletet J. F. Clauser és munkatársai végezték 1972-ben. Egy későbbi A. Aspect nevéhez fűződő (1982) kísérlet volt az első, ahol a fotonpár keletkezését követően a mérőberendezések (kristályok) beállítását a különböző lehetséges irányokba úgy végezték, hogy ez a két esemény térszerűen elválasztott legyen, vagyis az egyik kristály beállításakor induló képzeletbeli fényjel nem érhette el a másik kristályt annak beállítása előtt.

Itt röviden az A. Zeilinger által megvalósított (1995) kísérleti elrendezés a vázlatát mutatjuk be, amelynél az összefonódott fotonpár egy nemlineáris kristályban keletkezik.



A 351 nm-es ultraibolya lézerfény fotonjait a nemlineáris kristály két kisebb energiájú fotonra hasítja. Ezt a folyamatot a nemlineáris optikában parametrikus lekonvertálásnak nevezik. Az így keletkező fénysugarak két egymást metsző kúp palástja mentén távoznak a kristályból az energia és impulzusmegmaradásnak megfelelően. A keletkező másodlagos fotonpárok közt lesznek olyanok, hogy a pár két tagkjának frekvenciája illetve hullámhossza azonos 702nm (degenerált eset), de a polarizációs irányuk mindig ellentétes. Ez utóbbiak esetén a két kúp nyílásszöge azonos, és a két metszéspontban – a jobboldali szimulált ábrán a két zöld foltnál – kijövő fotonpárok éppen a kívánt tulajdonságúak. Az ábrán a színek fiktívek, a zöld szín a valójában 702 nm-es infravörös fotonok kilépési kúpjait jelzik.

A szimulált ksérlet megtekinthető az http://titan.physx.u-szeged.hu/opt/physics/theophys/indexh.html lapon a Kvantumparadoxonok és alkalmazásaik linkre kattintva.

A kísérletek egyöntetűen a kvantummechanikai eredmény helyességét és a Bell egyenlőtlenség sérülését igazolták.