

KVANTUMELEKTRODINAMIKA ÉS KVANTUMOPTIKA

Benedict Mihály

SZTE TTIK
Elméleti Fizikai Tanszék

Szeged, 2015.



„Ágazati felkészítés a hazai ELI projekttel
összefüggő képzési és K+F feladatokra ”

TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0005 projekt



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

SZÉCHENYI 2020

Európai Unió
Európai Strukturális
és Beruházási Alapok



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

LEKTORÁLTA: Gábris Aurél; Prágai Cseh Műszaki Egyetem, Fizika Tanszék



SZERKESZTÉS L^AT_EX-BEN: Dömötör Piroska; SZTE TTIK, Elméleti Fizikai Tanszék



„Ágazati felkészítés a hazai ELI projekttel
összefüggő képzési és K+F feladatokra ”

TÁMOP-4.1.1.C-12/1/KONV-2012-0005 projekt



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

SZÉCHENYI 2020

Európai Unió
Európai Strukturális
és Beruházási Alapok



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Szükséges programok

Az egyes animációk indításához a számítógépen a következő programok megléte vagy installálása szükséges:



Java környezet



Az interaktív tartalmak egy részének megjelenítéséhez szükséges a **java környezet (JRE)** letöltése és telepítése. A bal oldali linkre kattintva letölthetjük az operációs-rendszerünknek megfelelő java környezetet.

<http://www.java.com/en/download/manual.jsp>



Wolfram CDF Player



Az interaktív tartalmak másik részének megjelenítéséhez a **Wolfram CDF Player** program megléte szükséges. Ez utóbbi a bal oldali linkre kattintva letölthető.

<http://www.wolfram.com/cdf-player/>



Adobe-Flash plugin



Az swf formátumú flash animációk megtekintéséhez pedig mindenképpen szükséges a megfelelő **Adobe-Flash plugin**. Ezt a bal oldali linkre kattintva az Adobe honlapjáról tölthetjük le.

<http://get.adobe.com/flashplayer>



VLC Media Player



Az flv kiterjesztésű videó fájlok lejátszásához a **VLC Media Player** lejátszó telepítést javasoljuk.

<http://www.videolan.org/vlc/>

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	9
1.1. A fény kettős természetére vonatkozó elgondolás történeti kialakulása	9
1.2. Problémák és konklúzió	11
1.3. A jegyzet fölépítése	12
2. Egymódusú mező, állóhullám kvantálása	15
2.1. Bevezetés	15
2.2. Állóhullám mint oszcillátor	15
2.3. Kvantálás	18
2.4. A mezőt jellemző mennyiségek operátorai	20
2.5. Fotonszám-sajátállapotok	21
2.6. Kvadratúra operátorok és szemléltetésük	25
3. A sokmódusú mező	27
3.1. Bevezetés	27
3.2. Klasszikus elektrodinamika reciprokl térben	27
3.3. Longitudinális és transzverzális vektormezők	29
3.4. A töltések és a mező energiája, impulzusa	31
3.4.1. Energia	31
3.4.2. Impulzus	32
3.5. A mező mozgásegyenletei, normálkoordináták	33
3.6. Diszkrét változók	35
3.7. A mező kvantálása és a fotonkép	36
3.8. A teljes mező állapottere	38
3.8.1. Általános egyfotonos állapotok	38
4. Koherens állapotok	41
4.1. Bevezetés	41
4.2. A számállapotok nem mutatják a klasszikus mező tulajdonságait	41
4.3. A koherens állapotok bevezetése	43
4.4. A koherens állapotok kifejtése a számállapotok szerint	44
4.5. Koherens állapotok belső szorzata, és (túl)teljessége	47
4.6. A koherens állapotok időfejlődése szabad térben	48
4.7. Egy klasszikus forrás koherens állapotú mezőt kelt	48
4.8. A koherens állapotok mint a vákuum eltolásai	50

4.9. A koherens állapotok szemléltetése a fázistéren	51
4.10. Két operátorazonosság	54
5. A mező keverék állapotai	57
5.1. A sűrűségoperátor	57
5.2. Várható érték keverék állapotban, redukált sűrűségmátrix	59
5.3. Időfejlődés	61
5.4. Kétállapotú rendszer	61
5.5. Termikus állapot	63
6. Wigner-függvény	67
6.1. Klasszikus mechanika a fázistéren	67
6.2. Fázisvalószínűség a kvantummechanikában	69
6.3. A Wigner függvény kiszámítása koordináta-reprezentációban	72
6.3.1. Keverék állapot Wigner-függvénye	73
6.4. A Wigner-függvény tulajdonságai	73
6.5. A Wigner-függvény a kvantumoptikában	75
6.5.1. Koherens állapot Wigner-függvénye	76
6.5.2. Fotonszám sajátállapotok Wigner-függvénye	76
6.5.3. Termikus állapot Wigner-függvénye	77
6.6. További kvázivalószínűségi sűrűségfüggvények	78
7. A mező préselt állapotai	83
7.1. Bevezetés	83
7.2. A kvadratúra operátorok	83
7.3. Préselt vákuum és préselt koherens állapotok	84
7.4. Préselt fény előállítása parametrikus konverzióval	90
7.5. A préselt fény mérése homodyn detektálással	93
7.6. A préselt fény alkalmazása	94
8. A veszteségmentes nyalábosztó	97
8.1. Bevezetés	97
8.2. A kvantumos nyalábosztó	99
8.3. Az állapotok transzformációja	101
8.3.1. Egyfotonos bemenet	101
8.4. A foton oszthatatlanságára vonatkozó kísérletek	102
8.4.1. Koherens bemenet	103
8.5. Egy-egy foton a két bemeneten	104
8.5.1. Hong–Ou–Mandel-féle kísérlet	104
8.6. Kvantumradír	106
9. Kvantumos koherencia függvények	109
9.1. A klasszikus interferencia és koherencia	109
9.2. Kvantumos koherencia függvények	112
9.2.1. A Young-féle kísérlet értelmezése a kvantumos mező esetén	114
9.3. Magasabb rendű koherenciafüggvények	115

9.4. A másodrendű koherencia kvantumossal tárgyalása	117
10. A Jaynes–Cummings–Paul-modell	121
10.1. Bevezetés	121
10.2. Kétnívós atom klasszikus mezőben	122
10.3. Kétnívós atom kvantumossal mezőben	125
10.4. Rezonáns eset, kollapszus és föléledés	128
10.4.1. Megoldás az ε_n -hez tartozó sajátállapotban	128
10.4.2. Megoldás tetszőleges tiszta kezdőállapotra	130
10.4.3. Kollapszus	131
10.4.4. Föléledés	132
10.5. Nemrezonáns eset, fölrüházott állapotok	133
11. Kísérletek Rydberg-atomokkal és csapdázott ionokkal	137
11.1. Rydberg atomok üregben	137
11.1.1. A legfontosabb kísérleti eredmények	140
11.2. Csapdázott ionok rezgési állapotai	145
11.3. Mozgási Schrödinger macska állapotok	148
12. Spontán emisszió, Lamb eltolódás, Casimir-effektus	153
12.1. A spontán emisszió	153
12.1.1. Megoldás a Fermi-féle arany szabállyal	154
12.1.2. A spontán emisszió Weisskopf–Wigner elmélete	155
12.2. A Lamb-eltolódás	157
12.3. A Casimir-effektus	160

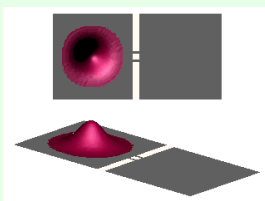
1. fejezet

Bevezetés

Kvantumoptikának a kvantumelektrodinamika azon részét szokták nevezni, amely az elektromágneses mező kvantumos tulajdonságait figyelembe veszi, de a vizsgált mező frekvenciája a látható tartományba, vagy ahhoz közeli tartományokba esik, tehát a megfelelő fotonenergia sokkal kisebb mint az elektron nyugalmi energiája. Ennek következtében a töltések mozgását elegendő a nemrelativisztikus kvantummechanika segítségével leírni, nem szükséges pl. az elektronokat is egy mező kvantumainak tekinteni, azaz nem használjuk az úgynevezett másodkvantált formalizmust.



Animáció:



Ezen a gif animáción a Young-féle kétréses kísérletet követhetjük nyomon Gauss-alakú hullámcsomag esetén. További képeket az alábbi linken találunk:

http://www.embd.be/quantummechanics/double_slit.html .

<http://www.embd.be/quantummechanics/movies/qmb5.gif>

1.1. A fény kettős természetére vonatkozó elgondolás történeti kialakulása

Az elektromágneses mező, illetve a fény természetének problémája a fizika egyik nagyon régi kérdése. A 17. századból Newton és Huyghens egymással szemben álló álláspontját említjük, ahol Newtonra mint a korpuszkuláris elmélet képviselőjére szokás tekinteni, míg Huyghens – akinek a nevéhez a fényelhajlás ma is érvényes legegyszerűbb magyarázata fűződik – a hullámtermészet mellett érvelt.

A hullámtermészet további erős bizonyítéka volt T. Young 1807-ben publikált jól ismert kétréses interferenciakísérlete, majd A.J. Fresnel kísérletei, amelyeket 1818-ban a Francia Akadémia pályázatára benyújtott tanulmányában ismertetett. Ezeket az elhajlásra és az interferenciára vonatkozó megfigyeléseket Fresnel részletes matematikai számításokkal is alátámasztotta. Amint azt A. S. Eddington már a 20. században megjegyezte: Fresnel hullámelméleti modelljének mai szemmel egyedül az a hiányosság róható föl, hogy nem tudta megnevezni a hullámmozgás alanyát. Az akadémiai pályázat bíráló bizottságának egyik tagja S. D. Poisson – a fény részecske természetének híve – arra a következtetésre jutott, hogy ha

Fresnel elmélete helyes, akkor egy korong alakú átlátszatlan ernyő mögött, az árnyék közepén, az elhajlás következtében egy világos foltnak kellene látszani, amit lehetetlennek gondolt, és így a pályamunkát hibásnak ítélte. Ám a bizottság elnöke, F. Arago ténylegesen is elvégezte a kísérletet, és megfigyelte az azóta Poisson foltnak (néha Arago foltjának is) nevezett világos foltot. Ennek a kísérletnek a nyomán Fresnel elnyerte a pályadíjat, és végérvényesen látszott a fény hullámtermészetének bizonyítottága. Ugyanebből az időből származnak Fresnel és Arago kísérletei a fény polarizációjára vonatkozóan, ami szintén a fény hullámtermészetét és azon belül annak transzverzális voltát bizonyította.

A 19. század második felében a hullámelméletet J. C. Maxwell elektrodinamikája koronázta meg, aki fölismervén azt, hogy az elektromos mező időbeli változása is egyfajta áramként és ezáltal a mágneses mező forrásaként működik, tisztán matematikai eszközökkel levezette az elektromágneses hullámok létezésének szükségességét, és a kísérletek számszerű adataival való összehasonlításból arra következtetett, hogy a hullámok sebessége megegyezik az akkor már régóta megmért fénysebesség értékével. Kézenfekvő volt a következtetés: a fényhullám valójában az elektromágneses mező hullámozása. Ennek megerősítéseként szolgáltak H. Hertz kísérletei, aki egy elektromos dipólus rezgéseivel keltett elektromágneses hullámokat, és megfigyelte azoknak a Maxwell elméletéből következő tulajdonságait. Világossá vált, hogy a látható fény csupán frekvenciájában (és így hullámhosszában) különbözik a Hertz-féle dipólus által keltett hullámoktól. Ma már tudjuk, hogy a látható tartománybeli mezőt is rezgő dipólusok keltik, amelyek az atomban található pozitív töltésű magok és a hozzájuk képest mozgó elektronok mozgásából származnak.

A hullámtermészet mellett szóló bizonyítékok egyértelműnek látszottak egészen a 19. század utolsó évéig, amikor Berlinben két laboratóriumban is megmérték egy fölhevített fémtest belsejében található üregből kibocsátott sugárzás spektrumának frekvencia szerinti eloszlását, illetve ennek a hőmérséklettől való függését. A kapott mérési görbe elméleti értelmezésére történt próbálkozások eleinte nem vezettek sikerre. W. Wien termodinamikai megfontolásai csak a spektrum rövidhullámú részét tudták magyarázni, míg a Lord Rayleigh és J. Jeans által levezetett képlet a hosszúhullámú részre adott a kísérletekkel egyező eredményt. Rayleigh és Jeans az üregben kialakuló állóhullámokat egy-egy oszcillátornak tekintette, majd föltételezték, hogy ezek az üreg falával T hőmérsékleten termikus egyensúlyban vannak. Mint ismert, egy sok klasszikus oszcillátorból álló rendszer esetén egy oszcillátorra ekkor átlagosan $k_B T$ energia jut. Ám az oszcillátorok száma nem korlátos, így a számított teljes energia divergálni látszott. 1900-ban azután Planck előbb a Wien-féle és a Rayleigh-Jeans-féle képletek interpolációjának próbálgatásával egy olyan formulát talált, amely pontosan megadta a spektrum kísérletileg mért alakját, majd ezt követően egy teljesen új elv alapján sikerült az előzőleg próbálgatással megtalált képletet korrektül is levezetnie.

Az új elv szerint az oszcillátorok, a rezgési módusok, az üreg falától az energiát csak meghatározott adagokban, kvantumokban vehetik föl és adhatják le, ennek az energiakvantumnak a nagysága az $\varepsilon = h\nu$ képletnek megfelelően arányos a módus ν frekvenciájával, ahol az arányossági tényező a h Planck állandó, melynek értékét Planck a kísérleti görbével való összehasonlítással meg tudta határozni. Az adagosságból az következik, hogy nagy frekvencia esetén, amikor a kvantum energiája összemérhetővé válik a $k_B T$ termikus átlaggal, a klasszikus ekvipartíció tétele érvényét veszti.

Érdekes módon ez nem változtatta meg Planck véleményét arról, hogy a mező szigorúan véve hullámtermészetű, és sokáig vitatta Einstein öt évvel későbbi következtetését, aki – mint ismert – a fotoeffektus értelmezéséhez bevezette a fénykvantum fogalmát, és a ν frekvenciájú monokromatikus hullámot fénykvantumok összességének tekintette, amelyek egyenként $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$ energiát és ennek egy nulla nyugalmi tömeg esetén megfelelő $p = \hbar\omega/c = \hbar k$ nagyságú impulzust hordoznak. Ezeket a részecskéket nevezzük ma *fotonnak*. (Az elnevezés jóval későbből 1926-ból származik, és a névadó G. Lewis

fiziko-kémikus nem is az Einstein-féle fénykvantumot értette a név kapcsán.)

Mint ismert, a mező részecske-természete melletti további erős érvek szokás tekinteni a Compton effektust. Ennél az elektronon szóródó elektromágneses hullám (röntgen-sugárzás) frekvenciaváltozását illetve annak kapcsolatát a szórási szöggel avval a föltételezéssel a legegyszerűbb magyarázni, hogy a sugárzás $\hbar\omega$ energiájú és $\hbar k$ impulzusú "golyók" sokaságaként viselkedik.

A fönti tapasztalatok nyomán az a kép vált elfogadottá a fizikusok között, hogy a fény illetve általában az elektromágneses mező a szokásos klasszikus fizikai fogalmakkal nem írható le, hanem egy sajátos entitás, amelyről ha mégis mint klasszikusan megérthető objektumról akarunk beszélni a legegyszerűbb, ha azt mondjuk, hogy kettős természetű, a *terjedését* hullámegyenletek megoldásaival lehet leírni, az atomos anyaggal való *kölcsönhatásakor* viszont a részecske jellege lép előtérbe. Ezt az álláspontot még inkább alátámasztotta a L. de Broglie által fölvetett javaslat, hogy az olyan kicsiny, de nem nulla tömegű objektumok, mint az elektron – amelynél eredetileg ilyen kettősség föl sem merült – a mozgásuk során bizonyos értelemben maguk is hullámtulajdonságokat mutatnak. Minthogy ezt az elgondolást a kísérletek is bizonyították, majd a Schrödinger-féle kvantummechanika egy pontos matematikai elmélettel is alátámasztotta, az elektron kettős természetére vonatkozó elgondolás is teljesen elfogadottá vált, s ez sokak szemében eltüntette a fény kettős természetével kapcsolatos kételyeket is.

A kettős természet igazi matematikai megfogalmazása, a mezőt leíró térmennyiségek "operátorosítása" sem váratott magára sokáig. P. Dirac 1927-ben fogalmazta meg a mező kvantálásának módszerét, amelyet később W. Heisenberg, W. Pauli, P. Jordan majd V. Weisskopf és Wigner Jenő munkái követtek az 1930-as évek körül.

1.2. Problémák és konklúzió

Jóval kevésbé ismert, hogy a fönti meggyőzőnek látszó tények ellenére a 20. század során több neves fizikus kifejezte azt a nézetét, hogy a foton létének illetve a mező kvantálásának szükségessége nincs eldöntve. Említettük már, hogy maga Planck is sokáig ellenezte Einstein fotonhipotézisét. Most pedig néhány olyan további megfontolásról ejtünk szót, amelyek a föntebb ismertetett szokásos érveket megkérdőjelezték.

Tekintsük először magát a Planck törvényt. Az üreg sugárzása az üreg falában található atomok gerjesztése nyomán keletkezik, így a kvantálás előtt meg kell vizsgálnunk magának a fénykibocsátásnak a mechanizmusát. Ez azonban megtehető a félklasszikus elmélet segítségével is, csak annyit kell föltennünk, hogy az atomban diszkrét nívók vannak, és ekkor a mező kvantálása nélkül is kiszámítható két atomi nívó között a mező hatására létrejövő átmenet, abszorpció vagy indukált emisszió időegységre eső valószínűsége, az Einstein-féle B együttható. Nemdegenerált nívópárok esetén a kétfajta ráta megegyezik és értéke:

$$B = \frac{\pi}{3\varepsilon_0} \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2}, \quad (1.1)$$

ahol a $\hbar$ kizárólag az atomi állapotokra vonatkozó Schrödinger egyenlet következtében jelenik meg, és d_{21} az átmeneti dipólmatricelem szintén csak az atomra jellemző adat. Ugyanakkor úgy tűnik, hogy a szokásos félklasszikus elmélet nyilvánvalóan nem magyarázza a spontán emissziót, mert aszerint, ha nincs mező, akkor átmenet sincs. Azaz aszerint az Einstein-féle A együttható szigorúan 0 lenne, illetve a spontán emissziós tag nélkül az ismert Einstein-féle levezetés nem adná vissza a Planck törvényt. Ezzel szemben a kvantumoptika a spontán emissziót többek között az elektromágneses vákuum kvantumos fluktuációival, azaz implicite a mező kvantált jellegével magyarázza, ám a spontán emisszió ténye még

nem bizonyítja a fotonok létét. A spontán emissziót ugyanis olyan módon is föl lehet fogni, hogy az egyszerűen az energiának az egyetlen kitüntetett szabadsági fokról (atom) a sok szabadsági fokkal rendelkező másik objektumra (mező) való átadásának a következménye, ami mindennapos tapasztalat pl. a sűrűlódásos folyamatoknál, függetlenül attól, hogy ez a környezet diszkrét adagokban vagy folytonosan képes átvenni az energiát. A Planck-törvényhez vezető Einstein által követett megfontolásban ismét csak az atomi nívók diszkrétisége játszik szerepet a spontán emisszió szempontjából is.

A Compton effektust illetően – az elemi levezetésen túl – ismert annak az O. Klein és Y. Nishina által adott értelmezése is, amely szerint ott egy klasszikus elektromágneses hullám szóródik egy elektronon, amely gyorsulása révén egy másodlagos hullámot kelt. Ennek frekvenciaeltolódása összhangban van a "golyómodellel" kapható eredménnyel, de valójában ennél a levezetésnél sem kell föltétlenül a mező kvantumos szerkezetére hivatkozni.

Hasonló a helyzet a fotoeffektusnál is. A klasszikus mezőt tartalmazó kölcsönhatási energiával számolt időfüggő perturbációs számítás eredményeképpen az átmeneti rátát (az időegységre eső átmeneti valószínűséget) a $w_{fi} = (2\pi/\hbar) |\langle f | H_{int} | i \rangle|^2 \delta(\varepsilon_f - \varepsilon_i - \hbar\omega)$ formula (Fermi-féle arany szabály) szolgáltatja, amely a $t \gg 1/\omega$ esetben érvényes. Optikai terek esetében viszont, ahol $\omega = 10^{15}/s$, ez utóbbi minden gyakorlati esetben teljesül, azaz az elektronkibocsátás ezen elmélet szerint is lényegében késelelem nélkül történik. A δ függvény argumentuma, amelyben ε_f a végső szabad elektron állapotnak a folytonos spektrumba eső energiája, míg ε_i a kötött állapoté, mutatja a fotoelektromos egyenlet érvényességét. Az átmeneti mátrixelemben H_{int} a mező amplitúdójával, így a mátrixelem négyzete a mező intenzitásával arányos. Tehát a fotoelektromos jelenség minden lényeges tulajdonsága "kiadódik" a félklasszikus elméletből is, úgy látszik tehát, hogy nincs föltétlenül szükség a mező kvantálására. Ennek az álláspontnak nevezetes híve volt E. Jaynes, aki az 1960-as években részletes számításokat végzett többek között a spontán emisszió valószínűségére a mező kvantálása nélkül.

Az optikai frekvenciával változó mező vizsgálata mind kísérleti mind elméleti szempontból új lendületet kapott a lézerek fölfedezésével 1960-ban. Azt nem sokkal később követték R. Glaubernek az optikai koherencia kvantumelméletére vonatkozó munkái 1963-ban, amelyet 2005-ben Nobel-díjjal ismertek el, és számos újabb szép kísérleti eredmény, amelyek alapján a fotonok léte ma már mégsem vonható kétségbe. Emellett szólnak azok a még az 1950-es években Jánossy Lajos által kezdeményezett és később mások által (Clauser, Grangier) nagyon nagy pontossággal megismételt kísérletek, amelyek a foton oszthatatlanságát mutatták egy félig áteresztő tükrön való áthaladáskor. Ugyancsak a mező kvantálásának a szükségességét bizonyította a megfelelő körülmények között létrejövő úgynevezett fotonritkulás jelensége. Egy további nagyon szép, a foton létezését igazoló kísérleti eredmény (1996) az egymódusú üregben áthaladó, azzal rezonáns kölcsönhatásba lépő atomok két állapotának betöltöttségében jelentkező Rabi oszcillációk frekvenciájának diszkrét volta, amiért S. Haroche érdemelte ki a Nobel-díjat 2012-ben. Nagyon érdekes, hogy éppen ez volt az egyik pont, amelynél Jaynes és munkatársa Cummings 1963-ban rámutattak a klasszikus illetve a kvantumos mező által szolgáltatott eredmények különbözőségére és az akkoriban teljesen elképzelhetetlennek gondolt kísérletek elvégzésének szükségességére. Mindezek az elméleti és kísérleti eredmények tehát megerősítették a fény kettős természetének koncepcióját, amit a kvantumtérelmélet önt matematikai alakba.

1.3. A jegyzet fölépítése

A következőkben a mező kvantálásának egyik lehetséges útját járva először bevezetjük a foton fogalmát előbb egyetlen modell módusra, majd egy tetszőleges sokmódusú mezőre. Áttekintjük a mező

néhány fontos speciális kvantumállapotát és azok megadásának különböző módjait. Tárgyaljuk az interferencia jelenségének kvantumos értelmezését és a kvantumoptikában nagyon fontos eszköznek bizonyult nyalábosztóval kapcsolatos tényeket. Ezután áttérünk az egyetlen atom és egyetlen kvantumos módus kölcsönhatásának alapvető tulajdonságaira és az azokat bizonyító Nobel-díjjal jutalmazott kísérletek ismertetésére.

A mező úgynevezett vákuumenergiájának kérdése hosszú időn át sokat vitatott problémája volt a kvantumelektrodinamikának. A jegyzet végén három olyan kísérletileg is megfigyelt jelenséget ismertetünk, ami az elektromágneses vákuum létezésével, illetve annak az atomokra vagy akár makroszkópikus testekre kifejtett hatásával magyarázható. Ezek: a spontán emisszió, az úgynevezett Lamb-féle eltolódás és a Casimir-effektus. A jegyzet befejező fejezetében ezekről a problémákról lesz szó.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen kísérleti bizonyítékok szoltak a fény hullámtermészete mellett?
2. Hogyan következett Maxwell elméletéből a fény hullámtermészete, és milyen kísérlet bizonyította ezt?
3. Milyen kísérleti eredmények szoltak a fény részecske-természete mellett?
4. Mik az elemi fotonképhez mint részecskéhez tartozó fizikai mennyiségek értékei?
5. Milyen kísérletek alapozták meg a foton mint oszthatatlan objektum fogalmát?
6. Fogalmazzuk meg röviden a fény kettős természetének mibenlétét.

2. fejezet

Egymódusú mező, állóhullám kvantálása

2.1. Bevezetés

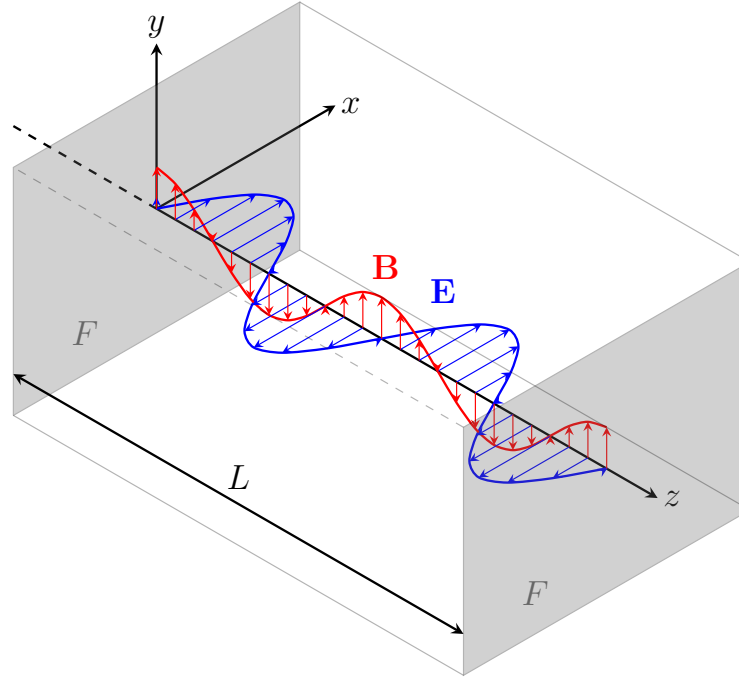
A fejezetben a legelemibb rendszer, egyetlen elektromágneses állóhullám forma, vagy más néven módus kvantumos tárgyalására kerül sor. Ennek kapcsán megismerkedünk a foton fogalmának matematikai hátterével, amely az elemi fotonfogalom egyszerű képe helyett, annak mélyebb értelmet ad, és megfelelő módon ragadja meg annak fizikai lényegét. Az itt bemutatandó anyaghoz ismerni kell a harmonikus oszcillátor klasszikus mechanikai tárgyalását, a Lagrange függvény segítségével, illetve nem árt fölleveníteni, amit a kvantummechanikában a harmonikus oszcillátor energia-sajátértékproblémájának algebrai tárgyalásánál tanultunk, bár ez utóbbi a kvantumoptikában szokásos beszédmóddal lényegében teljes mértékben ismertetésre kerül.

2.2. Állóhullám mint oszcillátor

Egy L hosszúságú F felületű $LF = V$ térfogatú üregben kvantáljuk az elektromágneses mező egy $\hat{x}$ irányban lineárisan poláros hullámformáját, tehát módusát, amelynek alakja klasszikusan:

$$\mathbf{E} = \hat{x} q(t) A \sin k_n z. \quad (2.1)$$

Itt $k_n = n\pi/L$, ahol $n = 1, 2, \dots$, azaz a *pozitív* egész számok valamelyike, ami biztosítja az állóhullámokra előírt $\mathbf{E}(L) = 0$ határföltétel teljesülését, míg az $\mathbf{E}(0) = 0$ automatikusan teljesül. (Itt $\hat{x}$, $\hat{y}$ és $\hat{z}$ jelöli a szokásos Descartes derékszögű: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ bázisvektorokat.)

2.1. ábra. Az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ mező az üregben.

Ez a mező transzverzális, ami közvetlenül látszik, de $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ is mutatja. $q(t)$ legyen dimenziótlán időfüggő függvény, ekkor az A amplitúdó elektromos térerősség dimenziójú, a nagysága egyelőre tetszőleges, a kvantálás után azonban rögzíteni fogjuk, ez az alábbiakban derül majd ki. A megfelelő mágneses mező a Maxwell egyenletekből következik. Kiválasztva tehát egy módust, azaz valamelyik n -et, a $k_n = k$ jelöléssel:

$$\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E} = - \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ q(t)A \sin kz & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{\mathbf{y}} q(t) A k \cos kz, \quad (2.2)$$

amiből

$$\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{y}} A s(t) k \cos kz, \quad \text{ahol } \dot{s}(t) = q. \quad (2.3)$$

Itt föltettük, hogy a mező nem sztatikus és transzverzális, tehát nincsenek állandó tagok. Ekkor

$$\dot{\mathbf{E}} = c^2 \nabla \times \mathbf{B} = -s(t) A k \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & \cos kz & 0 \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

miatt

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} \dot{q}(t) A \sin kz &= -\hat{\mathbf{x}} c^2 s(t) A k^2 \sin kz \\ \dot{q}(t) &= -c^2 k^2 s(t) = -\omega^2 s(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Amiből

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0. \quad (2.6)$$

Ez utóbbi differenciálegyenlet általános megoldása, amint az jól ismert

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.7)$$

ahol $\omega = ck$.

Az (2.6) mozgásegyenletet a fiktív M tömegű és ω körfrekvenciájú oszcillátor

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \quad (2.8)$$

Lagrange függvényéből lehet származtatni, ahol M egyelőre tetszőleges (energia $\times$ idő² dimenziójú) állandó. A megfelelő Hamilton függvény:

$$H = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{M} + M\omega^2 q^2 \right), \quad (2.9)$$

ahol

$$p := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = M\dot{q} = -M\omega^2 s(t). \quad (2.10)$$

Itt p hatás dimenziójú, az s változó pedig $s = -p/M\omega^2$. Ezzel a mágneses mező alakja

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} Ap(t) \frac{k}{M\omega^2} \cos kz = \hat{\mathbf{y}} Ap(t) \frac{1}{M\omega c} \cos kz. \quad (2.11)$$

Látható tehát, hogy míg oszcillátorunk kanonikus koordinátája az elektromos térerősségben, a hozzárendelt kanonikus impulzus a mágneses térerősségben szerepel.

A mező energiája az energiasűrűség integrálja.:

$$\begin{aligned} F \int_0^L \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dz &= F \frac{1}{2} A^2 \left(\underbrace{q^2(t) \varepsilon_0 \int_0^L \sin^2 kz dz}_{=L/2} + s^2(t) \frac{1}{\mu_0} \frac{\omega^2}{c^2} \underbrace{\int_0^L \cos^2 kz dz}_{=L/2} \right) = \\ &= \frac{FL}{2} A^2 \frac{\varepsilon_0}{2} (q^2 + \omega^2 s^2) = \frac{VA^2}{2} \frac{\varepsilon_0}{2} \left(q^2 + \frac{p^2}{M^2 \omega^2} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

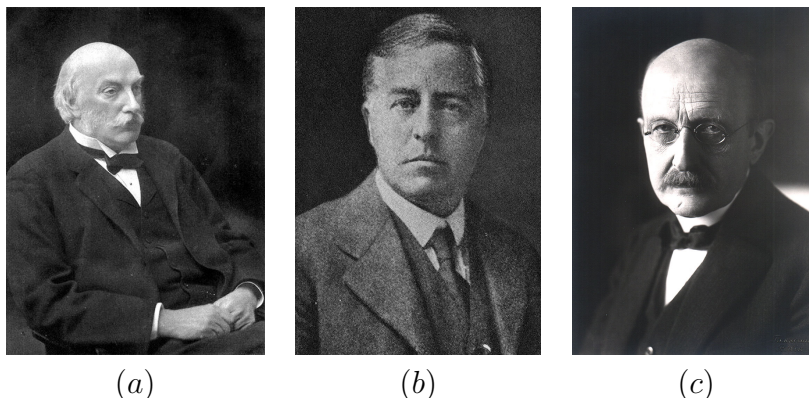
ami az M -re nézve az

$$\frac{\varepsilon_0 V A^2}{2} = M\omega^2 \quad (2.13)$$

azonosítással éppen a fenti Hamilton függvénnyel egyezik meg.

Egy adott módus időbeli dinamikája tehát olyan mint egy harmonikus oszcillátoré. Ezt a gondolatmenetet először *Lord Rayleigh* illetve *J. Jeans* használta az üreghullámok spektrumának levezetésére a 19. század végén, majd ugyanezt tette föl M. Planck is sugárzási törvényének levezetésekor, csak előírta, hogy az üreg módusai (amelyek közül a fentiekben csak egyetlen adott hullámhosszú és polarizációjú módust tekintettünk) az üreg falával való kölcsönhatás révén az energiát egymás közt csak a (kör)frekvenciával arányos $h\nu = \hbar\omega$ adagokban cserélhetik. A fotoeffektus Einstein féle magyarázata majd Compton kísérletei azonban arra utaltak, hogy a kvantáltság a mező általános jellegzetessége, amely

nem csak az üreksugárzásban hanem univerzálisan jelentkezik valahányszor a mező atomos anyaggal lép kölcsönhatásba. Ennek a különös kettős természetnek, miszerint az elektromágnes mező hullámszerűen terjed, de kölcsönhatásaiban kvantumos tulajdonságokkal is rendelkezik a matematikai megfogalmazása a kvantumelektrodinamika. Az ehhez szükséges kvantálási eljárást az alábbiakban tesszük meg, ebben a fejezetben egyelőre csak egyetlen módus esetén.



2.2. ábra. (a) Báró John William Strutt, III. Lord Rayleigh (1842 – 1919), angol fizikus. (b) Sir James Hopwood Jeans (1877 – 1946), angol fizikus, matematikus és asztronómus. (c) Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947), Nobel-díjas német fizikus. **Forrás:** http://commons.wikimedia.org/wiki/File:John_William_Strutt.jpg

Forrás: http://en.wikipedia.org/wiki/File:James_Hopwood_Jeans.jpg **Forrás:** <http://www.sil.si.edu/digitalcollections/hst/scientific-identity/fullsize/SIL14-P004-01a.jpg>

2.1 Feladat: Az egyszerűség miatt állóhullám módust kvantáltunk, de hasonló megfontolásokat tehetünk haladó hullám esetén is. Ebben az esetben az elektromos térerősséget szokásosan az

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} i A \left(\alpha(t) e^{ikz} - \alpha^*(t) e^{-ikz} \right). \quad (2.14)$$

alakba írjuk. Számoljuk ki a mágneses indukciót a Maxwell egyenletek segítségével és határozzuk meg az $\alpha(t)$ komplex függvény időfüggését.

2.3. Kvantálás

A szabad kölcsönhatásmentes mező egy módusa a fentiek szerint egy harmonikus oszcillátornak tekinthető, ezért kézenfekvő, hogy a mező *kvantum*os tulajdonságait ennek az oszcillátornak a kvantummechanikai tárgyalásával írjuk le. Mint ismeretes, ez úgy történik, hogy az oszcillátor állapotát megadó koordinátát és impulzust, illetve az ebből fölépülő energiát egy alkalmas Hilbert téren értelmezett lineáris és önadjungált operátoroknak tekintjük, amelyek általában nem fölcserélhetők.

Eszerint a fentiekben szereplő q és p változókat mostantól a Q és P önadjungált operátorokkal helyettesítjük, és előírjuk a

$$[Q, P] = i\hbar \quad (2.15)$$

fölcserélési relációt. Q itt dimenziótlan, míg P hatás dimenziójú, tehát a kommutátoruk is hatás dimenziójú. A kommutátorban szereplő $\hbar$ konstanst az alább röviden említendő mérési eredmények rögzítik. Amint azt a szerteágazó tapasztalatok megerősítik, a klasszikus "koordináta" és "impulzus" helyett a fon-ti operátorok bevezetésének matematikai lépése valóban elvezet a mező kísérletileg észlelt kvantum-s tulajdonságainak adekvát leírásához.

Q és P operátor volta arra vezet, hogy a mező módusának energiája is az operátornak tekintendő

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{P^2}{M} + M\omega^2 Q^2 \right) \quad (2.16)$$

Hamilton operátorba megy át. Vezessük be ezután az

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} Q + i \frac{P}{\sqrt{M\hbar\omega}} \right) = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \left(Q + i \frac{P}{M\omega} \right), \quad (2.17)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} Q - i \frac{P}{\sqrt{M\hbar\omega}} \right) = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \left(Q - i \frac{P}{M\omega} \right) \quad (2.18)$$

lineáris de nem önadjungált operátorokat. A kommutátorukra:

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2\hbar} ([Q, -iP] + [iP, Q]) = 1 \quad (2.19)$$

a mező módusának Hamilton operátorára pedig ezekkel a

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) \quad (2.20)$$

kifejezés adódik.

2.2 Feladat: Bizonyítsuk be az (2.19) és (2.20) összefüggéseket.

Mint a harmonikus oszcillátor kvantummechanikai elméletéből jól ismert, (és mint azt az alábbiakban le is vezetjük majd) az $a^\dagger a = \hat{n}$ operátor sajátértékei csak az $n = 0, 1, 2, \dots$ nemnegatív egész számok lehetnek (vagyázat ez nem azonos a módust indexelő n számmal), ami azt jelenti, hogy a

$$H |\varphi_n\rangle = \epsilon_n |\varphi_n\rangle \quad (2.21)$$

sajátértékegyenlet megoldásaiként a sajátértékekre az

$$\epsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2) \quad (2.22)$$

pozitív valós számokat kapjuk. Ez azt jelzi, hogy az energiasajátértékek a módusban az $n = 0$ -nak megfelelő $\hbar\omega/2$ nullponti energiához képest $\hbar\omega$ egész számú többszöröseivel nagyobbak. A szokásos beszédmód szerint a módus $|\varphi_n\rangle$ állapota *azt jelenti, hogy a módusban n darab foton van*. Ebből az is látható, hogy $\hbar$ értékét azok a tapasztalatok (a Planck féle sugárzási törvény illetve a fotoeffektus) rögzítik, amelyek szerint a mező energiája valamilyen értelemben diszkrét, és az energiaadagokra valóban a (kör)frekvenciával arányos mérési eredmények adódnak. A $\hbar$ mint arányossági tényező értékét

ennek alapján szolgáltatja a később tárgyalandó üreksugárzás spektrumára vonatkozó illesztés, illetve a fotoeffektusra vonatkozó Millikan féle kísérlet (nem keverendő az elemi töltésre vonatkozó másik fontos kísérletével) alapján kiszámítható ismert érték. Más szóval a fenti kommutátorból következő összefüggések akkor egyeznek a mérési eredményekkel, ha $\hbar$ -t éppen

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (2.23)$$

értékűnek választjuk. $\hbar$ neve redukált Planck állandó, ami megfelel a kísérleti fizikában inkább használatos Planck állandó

$$h = 2\pi\hbar = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (2.24)$$

értékének.

2.4. A mezőt jellemző mennyiségek operátorai

Visszatérve most az elektromos és mágneses térerősség (2.1) és (2.11) kifejezéséhez, a $q \rightarrow Q$, $p \rightarrow P$ helyettesítéssel és az (2.13) szerinti $\frac{\varepsilon_0 V A^2}{2\omega^2} = M$ azonosítással, az elektromos és mágneses térerősségek is operátornak tekintendők. Így

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} Q(t) A \sin kz = \hat{\mathbf{x}} \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} A \sin kz = \hat{\mathbf{x}} (a + a^\dagger) \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \sin kz, \quad (2.25)$$

illetve a mágneses térerősség az $s = -p/(M\omega^2)$ szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\hat{\mathbf{y}} A S(t) k \cos kz = \hat{\mathbf{y}} A \frac{P}{M\omega^2} \frac{\omega}{c} \cos kz = \hat{\mathbf{y}} A \sqrt{\frac{M\hbar\omega}{2}} \frac{1}{M\omega^2} \frac{\omega}{c} i(a^\dagger - a) \cos kz = \\ &= \hat{\mathbf{y}} A \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} \frac{1}{c} i(a^\dagger - a) \cos kz = \hat{\mathbf{y}} \frac{1}{c} i(a^\dagger - a) \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \cos kz. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Az $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ egymásra merőleges, de ezek a merőleges komponensek nem cserélhetők föl, hanem

$$[E_x, B_y] = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \frac{1}{c} 2i \sin kz \cos kz = i \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V c} \sin 2kz. \quad (2.27)$$

Vezessük be az

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \text{ és a } \mathcal{B}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar\omega}{V}} \quad (2.28)$$

mennyiségeket, amelyeket egy fotonra jutó térerősségeknek szokás nevezni. (Ez a szóhasználat pontosításra szorul, ami majd az alábbiakból látszani fog.) Így

$$E_x = \mathcal{E}_0 (a + a^\dagger) \sin kz, \quad B_y = i\mathcal{B}_0 (a^\dagger - a) \cos kz. \quad (2.29)$$

Egy módus energiáját ebből úgy kapjuk, hogy a módus energiasűrűségét kiintegráljuk az üreg térfogatára. Az integrálás során a $\sin^2$ és $\cos^2$ integrálja $L/2$ -et ad, ezt szorozzuk F -fel a felülettel, így $V/2$ -t

kapunk. Az energia ezzel:

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathcal{E}_0^2\frac{V}{2}(a + a^\dagger)^2 - \frac{1}{2\mu_0}\mathcal{B}_0^2\frac{V}{2}(a^\dagger - a)^2 = \quad (2.30)$$

$$= \frac{V}{4}\varepsilon_0\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}(a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a) - \frac{V}{4\mu_0}\frac{\mu_0\hbar\omega}{V}(a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a) = \quad (2.31)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}2(aa^\dagger + a^\dagger a) = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right). \quad (2.32)$$

A fentiek alapján tehát a mezőt jellemző fizikai mennyiségek operátorok, amelyek egy a lineáris harmonikus oszcillátor elméletében szerepet játszó térrel analóg és szükségképpen végtelen dimenziós Hilbert tér fölött vannak értelmezve. A mező ezen módusának egy állapota ennek a vektortérnek valamilyen eleme. Amint azt alább részletesen is megmutatjuk, a H önadjungált operátor sajátvektorai ebben az esetben az n nemnegatív egész számokkal indexelhető $|n\rangle$ úgynevezett számállapotok, melyeket $|n\rangle$ -nel szokás jelölni, és amelyek páronként ortogonális és teljes rendszert alkotnak a jelzett Hilbert térben. A módus tetszőleges kvantumállapotai ezeknek az állapotoknak a szuperpozícióiként adódnak, azaz $|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\psi\rangle$. A fizikai mennyiségek mérésekor az aktuális állapottól függően a megfelelő operátor sajátértékeit kapjuk a kvantummechanikában előírt valószínűséggel.

Megjegyezzük, hogy noha az irodalom egy részében a fent látott konvenciókat és jelöléseket használják, egy másik gyakran előforduló változat a következő. A fentebb bevezetett a és $a^\dagger$ operátorok helyett be lehet vezetni a szintén nem önadjungált $\tilde{a}$ és $\tilde{a}^\dagger$ operátort amelyek definíciója

$$\tilde{a} = ia, \quad \tilde{a}^\dagger = -ia^\dagger \quad (2.33)$$

Láthatólag ezek fölcserélési relációi azonosak azzal, amit az a -ra és $a^\dagger$ -ra megismertünk:

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = [a, a^\dagger] = 1 \quad (2.34)$$

az $\hat{n} = a^\dagger a$ operátor pedig szintúgy az

$$\hat{n} = a^\dagger a = \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \quad (2.35)$$

alakba írható. Az elektromos és a mágneses térerősség alakja ezekkel az operátorokkal

$$E = i\mathcal{E}_0(\tilde{a} - \tilde{a}^\dagger), \quad B = \mathcal{B}_0(\tilde{a} + \tilde{a}^\dagger). \quad (2.36)$$

2.5. Fotonszám-sajátállapotok

Ha töltések nincsenek jelen, akkor a mező módusának stacionárius állapotai a

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + 1/2\right) \quad (2.37)$$

sajátállapotai és ezeket az állapotokat töltések jelenléte esetén is használhatjuk bázisként egy tetszőleges állapot kifejtéséhez. Az elmélet szempontjából ezek a sajátállapotok alapvető fontosságúak, és megkeresésük az

$$\hat{n} := a^\dagger a \quad (2.38)$$

operátor sajátállapotainak meghatározásával ekvivalens. Az $\hat{n}$ operátort számoperátornak önadjungált és pozitív operátor, tehát sajátértékei csak nemnegatív valós számok lehetnek. Ezek meghatározása céljából szorozzuk az

$$aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad (2.39)$$

fölcserélési relációt jobbról a -val, illetve balról $a^\dagger$ -al. Átrendezés után:

$$\hat{n}a = a(\hat{n} - 1), \quad \hat{n}a^\dagger = a^\dagger(\hat{n} + 1). \quad (2.40)$$

Teljes indukcióval belátható, hogy minden $m \geq 0$ egész számra

$$\hat{n}a^m = a^m(\hat{n} - m), \quad (2.41)$$

$$\hat{n}a^{\dagger m} = a^{\dagger m}(\hat{n} + m). \quad (2.42)$$

Vizsgáljuk ezután az $a^{\dagger m}a^m$ operátort. $\hat{n}$ definícióját (2.38) és az előző formulát fölhasználva kapjuk, hogy

$$a^{\dagger m}a^m = a^{\dagger m-1}\hat{n}a^{m-1} = a^{\dagger m-1}a^{m-1}(\hat{n} - (m-1)). \quad (2.43)$$

Ezt az összefüggést ismételten alkalmazva a

$$a^{\dagger m}a^m = \hat{n}(\hat{n} - 1)(\hat{n} - 2) \dots (\hat{n} - (m-1)) \quad (2.44)$$

operátorazonossághoz jutunk. Ebből a képletből következik, hogy $\hat{n}$ spektrumának nem lehet folytonos része. Ha ugyanis lenne, akkor létezne olyan λ nem egész szám és olyan $|\varphi\rangle$ állapot, amelyre $\hat{n}|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$. Erre a $|\varphi\rangle$ állapotra az előző összefüggés szerint:

$$\langle\varphi|a^{\dagger m}a^m|\varphi\rangle = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - (m-1)). \quad (2.45)$$

A bal oldal minden $m \geq 1$ -re nemnegatív, mert bármely, az adott módot jellemző $|\varphi\rangle$ állapotra $\langle\varphi|a^{\dagger m}a^m|\varphi\rangle = \|a^m\varphi\|^2 \geq 0$. A jobb oldal viszont negatív lenne egy olyan (értelemszerűen egész) m -re, amelyre $\lambda + 1 < m < \lambda + 2$ teljesül. Ez az ellentmondás csak akkor nem lép föl, ha $\hat{n}$ sajátértékeire kikötjük, hogy csak nemnegatív egész számok lehetnek, ekkor u.i. mind a jobb mind a baloldal 0 lesz ha m egyenlő vagy nagyobb mint $\lambda + 1$ és ugyanakkor $a^m|\varphi\rangle = 0$.

Most *posztuláljuk*, hogy létezik legalább egy sajátvektor, amelyhez tartozó sajátérték (az előbbiek szerint szükségképpen) valamilyen nemnegatív egész: n . Ezt a sajátvektort jelöljük $|n\rangle$ -el:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \quad (2.46)$$

Belátható, hogy $a^\dagger|n\rangle$ is sajátvektor $(n+1)$ sajátértékkel:

$$\hat{n}a^\dagger|n\rangle = a^\dagger a a^\dagger|n\rangle = a^\dagger(a^\dagger a + 1)|n\rangle = a^\dagger(\hat{n} + 1)|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle \quad (2.47)$$

Hasonlóan:

$$\hat{n}a|n\rangle = (n-1)a|n\rangle \quad (2.48)$$

tehát $a|n\rangle$ is sajátvektor $(n-1)$ sajátértékkel. Ez utóbbi csak $n \geq 1$ esetén állhat fenn, mert – mint láttuk – $\hat{n}$ sajátértékei nemnegatívok, amiből az előző szerint az is következik, hogy ha $n = 0$, akkor $a|n\rangle$ a nulla vektor, mert másképpen a fönti (2.48) összefüggés nem teljesülhet, azaz

$$a|0\rangle = 0. \quad (2.49)$$

(Itt, ahogyan az szokás, a tér nulla vektorát és a nulla számot nem különböztetjük meg, aminek az az oka, hogy tetszőleges $|\varphi\rangle$ vektorra $0|\varphi\rangle$ a nulla vektor.) Ilyen módon az $|n\rangle$ értelmezése szerint, amely az n sajátértékhez tartozó sajátvektor, következik, hogy

$$a^\dagger|n\rangle = c_+|n+1\rangle \quad a|n\rangle = c_-|n-1\rangle \quad (2.50)$$

A sajátvektorokat normálnak választva: $\langle n|n\rangle = \langle n+1|n+1\rangle = 1$ alapján:

$$|c_+|^2 \langle (n+1)|n+1\rangle = \langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|a^\dagger a + 1|n\rangle = n+1 \quad (2.51)$$

Így

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (2.52)$$

és hasonlóan

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle. \quad (2.53)$$

2.3 Feladat: A keltő és eltüntető operátorokra vonatkozó (2.53) és (2.52) összefüggések segítségével mutassa meg, hogy érvényes az $\hat{n} = a^\dagger a$ számoperátorra vonatkozó (2.48) sajátértékegyenlet.

Az $|n=0\rangle$ állapotot vákuum állapotnak nevezzük amelyet az $a|0\rangle = 0$ összefüggés definiál. Ebből a további n sajátértékekhez tartozó állapotokat az $\frac{a^\dagger|n\rangle}{\sqrt{n+1}} = |n+1\rangle$ formulának megfelelően a következőképpen lehet generálni, vagyis:

$$|1\rangle = a^\dagger|0\rangle, \quad (2.54)$$

$$|2\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{(a^\dagger)^2}{\sqrt{2}}|0\rangle, \quad (2.55)$$

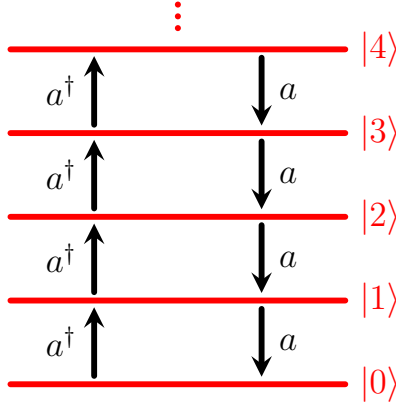
$$|3\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{3}}|2\rangle = \frac{(a^\dagger)^3}{\sqrt{3 \cdot 2}}|0\rangle \quad \dots \quad (2.56)$$

A normált sajátvektorok ezek szerint előállíthatók $|0\rangle$ -ból az

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (2.57)$$

alakban.

2.4 Feladat: Bizonyítsa be teljes indukcióval a fenti (2.57) formulát.



2.3. ábra. Az $a^\dagger$ és a operátorok végiglépegetnek a számállapotokon.

Tegyük fel, hogy pl. a $|0\rangle$ állapot még elfajult, azaz valójában a $|0, l\rangle$ ($l = 1, 2, \dots, L$) állapotok mindegyike az $\hat{n}$ -nek a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektora: $\hat{n}|0, l\rangle = 0$. Akkor az előzőek szerint minden n esetén ez lenne a helyzet, tehát a sajátvektorok rendszere valójában az $|n, l\rangle = (a^\dagger)^n \frac{1}{\sqrt{n!}} |0, l\rangle$ vektorok összessége lenne. Az a és $a^\dagger$ operátorok nem keverik különböző l -hez tartozó sajátvektorokat, ezért ha feltesszük, hogy minden releváns operátor az a és az $a^\dagger$ függvénye, akkor ilyen elfajulás nem lehetséges.

Egy módus Hamilton operátorának sajátértékei ezek szerint az

$$\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2) \quad (2.58)$$

energiák, amelyek nemelfajultak, a módus megfelelő állapotai pedig az $|n\rangle$ *foton-számállapotoknak* vagy röviden csak *számállapotoknak* nevezett energiasajátállapotok. Ehhez a formalizmushoz a következő beszédmodot fűzzük: *ha a mező valamelyik módusa az $|n\rangle$ állapotban van, akkor a módusban n számú foton van*, ennek megfelelően a módus energiája $n\hbar\omega$. Az $a^\dagger$ operátor egy fotont kelt a módusban, míg az a operátor egy fotont tüntet el a módusból. A különböző $|n\rangle$ -ek ortogonálisak egymásra, mert egy önadjungált operátor, az $\hat{n}$ különböző sajátértékeihez tartoznak: $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$. Az $\hat{n}$, $a^\dagger$, a , operátorok mátrixa az $|n\rangle$ állapotok által kifeszített bázisban a következő:

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 2 & 0 & \\ & & 0 & 3 & 0 \\ & & & 0 & \ddots \end{pmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & & \\ & \sqrt{2} & 0 & 0 & \\ & & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}, \quad a = a^{\dagger T}. \quad (2.59)$$

Számítsuk ki az elektromos ill. a mágneses mező várható értékét egy ilyen állapotban. Az elektromos mezőre:

$$\langle n| \mathbf{E} |n\rangle = \hat{\mathbf{x}} \mathcal{E}_0 \sin kz \langle n| a + a^\dagger |n\rangle = 0, \quad (2.60)$$

és ugyanez adódik a mágneses mezőre is, azaz nem felel meg a várakozásunknak az az intuitív kép, hogy minél több foton van a módusban, ott annál nagyobb a mező értéke. A mező négyzetének várható értéke, ami jelen esetben megegyezik a szórás négyzetével is, azonban nem tűnik el:

$$(\Delta E^2)_{|n\rangle} = \langle n| E^2 |n\rangle = \mathcal{E}_0^2 \sin^2 kz \langle n| (a + a^\dagger)^2 |n\rangle = \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \sin^2 kz (2n + 1). \quad (2.61)$$

Miután megállapítottuk a mező Hamilton operátorának sajátállapotait, azaz a stacionárius állapotokat, most már tetszőleges kezdőállapotnak a módus oszcillátor Hamilton operátorának hatására bekövetkező változását is fölírhatjuk. Amint a kvantummechanikából ismert ennek általános alakja:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i(n+1/2)\omega t} |n\rangle = e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\omega t} |n\rangle \langle n | \Psi(0) \rangle, \quad (2.62)$$

ahol $|\Psi(0)\rangle$ tetszőleges kezdőállapot, és így $c_n = \langle n | \Psi(0) \rangle$.

A (2.62) formula az időfüggésre a *Schrödinger-képnek* felel meg. A kvantumoptikában és általában a kvantumtérelméletben gyakorta a *Heisenberg-képet* használjuk az időfejlődés megadására. Ez esetben az állapot időben állandó, megegyezik a kezdőállapottal, az időfejlődést az operátorok hordozzák. A megfelelő mozgásegyenletekből a léptető operátorokra az

$$a = a(0)e^{-i\omega t}, \quad a^\dagger = a^\dagger(0)e^{i\omega t} \quad (2.63)$$

időfüggés adódik. A téroperátorok időfüggése ezzel egyetlen állóhullám módusra az

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{x}}(a(0)e^{-i\omega t} + a^\dagger(0)e^{i\omega t})\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \sin kz \\ \mathbf{B} &= \hat{\mathbf{y}}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}\frac{1}{c}i(a^\dagger(0)e^{i\omega t} - a(0)e^{-i\omega t}) \cos kz \end{aligned} \quad (2.64)$$

formulákkal adható meg.

2.6. Kvadratúra operátorok és szemléltetésük

Vezessük be a Q és P alábbi dimenziótlan változatát az

$$X = \frac{a + a^\dagger}{2}, \quad Y = \frac{a - a^\dagger}{2i} \quad (2.65)$$

definíciókkal, amelyek önadjungáltak és amelyeket *kvadratúra operátoroknak* szoktunk nevezni. Ezek fölcserélési relációja $[a, a^\dagger] = 1$ alapján egyszerűen kapható:

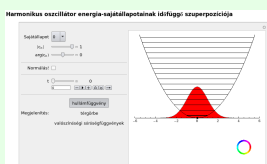
$$[X, Y] = \frac{i}{2}. \quad (2.66)$$

A módus állapotainak reprezentálására illetve szemléltetésére ennek megfelelően használhatjuk a mechanikai kvantumoszillátor szokásos koordináta- illetve impulzus-reprezentációbeli hullámfüggvényeit. A módus egy $|\psi\rangle$ állapotát tehát jellemezhetjük olyan komplex értékű függvényekkel, amelyek megadják, hogy mekkora $\langle x | \psi \rangle =: \psi(x)$ valószínűségi amplitúdóval találjuk az X operátor x sajátértékével jellemzett $|x\rangle$ állapotában a módust. Ezen $\psi(x)$ függvények terén az X operátornak a szokásos kvantummechanikai szabályoknak megfelelően az x -el való szorzás, az Y -nak pedig az $1/(2i)\partial_x$ művelet felel meg. Minthogy az elektromos térerősség nagysága (2.25) szerint az X operátorral arányos, a $|\psi(x)|^2$ függvény az elektromos térerősség amplitúdójának valószínűségi sűrűségfüggvényét, míg a $\psi(x)$ Fourier transzformáltjaként kapható $\tilde{\psi}(y)$ a mágneses mező valószínűségi amplitúdóját adja meg. A fotonszám sajátállapotokhoz tartozó amplitúdókat a harmonikus oszcillátor elméletéből jól ismerjük, és az alábbi

animáció a foton-számsajátállapotok ilyen ábrázolását valósítja meg. A lényeges különbség a mechanikai oszcillátorhoz képest abban áll, hogy itt a vízszintes tengely mentén a térerősség lehetséges értékeit mérjük föl.



Animáció:



Az interaktív animáció segítségével az egydimenziós harmonikus oszcillátor energia-sajátállapotainak szuperpozícióit hozhatjuk létre, majd a normálás után az így létrehozott kvantumállapot időbeli változását vizsgálhatjuk. Ez megfeleltethető a foton-szám sajátállapotokhoz tartozó elektromos térerősség térfüggő valószínűségi amplitúdójának. (lásd fentebb). Először alaposan figyeljük meg az alapállapot fázisának időbeli változását.

<http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/interactive/>

HarmonikusOscillatorIdofuggoSzuperpozicio.nbp

Ellenőrző kérdések

1. Mit jelent a módus fogalma?
2. Milyen irányúak az E és B és mezők egy állóhullám módusban?
3. Milyen klasszikus mechanikai rendszerrel egyenértékű egy elektromágneses módus?
4. Milyen matematikai lépés vezet a kvantumelméleti leíráshoz?
5. Mekkora a stacionárius állapotokhoz tartozó energiaértékek?
6. Hogyan vezetjük-be a léptető operátorokat?
7. Hogyan fejezzük ki a térerősségeket a léptető operátorokkal?
8. Önadjungáltak-e a léptető operátorok?
9. Önadjungáltak-e a térerősség operátorok?
10. Mik azok a kvadratúra operátorok?
11. Milyen értelmet ad a foton fogalmának a kvantálási eljárás?
12. Milyen mátrixok írják le a releváns fizikai mennyiségeket egy módus esetén?
13. Hogyan változik időben a módus egy tetszőleges állapota?
14. Mit mondhatunk a stacionárius állapotok elfajultságáról?

3. fejezet

A sokmódusú mező és a töltésrendszer dinamikájának együttes kvantálása

3.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben általánosságban is megismerkedünk a mező kvantálásával, figyelembe véve, hogy azt végtelen sok módus együttesének kell tekinteni. Ez néhány kivételes esettől eltekintve a valós kísérleti szituáció. A fejezet megértéséhez szükség van a Fourier transzformáció tulajdonságainak ismeretére továbbá a klasszikus elektrodinamika alapvető fogalmainak és egyenleteinek, a Maxwell-Lorentz egyenletek alapos ismeretére. Ezen túlmenően fontos, hogy alaposan elsajátítsuk az előző fejezetben tárgyalt kvantálási eljárást.

3.2. Klasszikus elektrodinamika reciprok térben

A mező kvantumozás tulajdonságainak matematikai megfogalmazása többféle módon is történhet. Itt mi azt a hagyományos utat követjük, hogy a mező térbeli változását fölbontjuk normál módusokra, és az egyes módusokat mint harmonikus oszcillátorokat kvantáljuk a kvantummechanikából megismert módon. Egy másik eljárás, amelyet gyakran használnak más kvantumtérelméletekben is a következő. A potenciálok mint dinamikai változók segítségével posztuláljuk a mező Lagrange sűrűségét, majd az ebből kapható kanonikus változó párokra – amelyek ilyenkor az idő és térkoordináták függvényei – írunk elő fölcserélési relációkat. Ez utóbbi tárgyalásmód is megtalálható pl. a [3] könyvben. A kvantumoptikában azért előnyösebb a módusokra bontás, mert a kísérletek során nagyon gyakran csak néhány módus játszik szerepet a folyamatokban.

A módusokra való bontás azt jelenti, hogy a mezők térbeli függését egy kifejtés segítségével vesszük figyelembe. A kifejtés úgynevezett módusfüggvények szerint történik, amelyek biztosítják, hogy a mezők teljesítsék a vizsgált problémához illeszkedő térbeli peremföltételeket. Tekintsük először azt az esetet, amikor az elektromágneses mezőt jellemző $\mathbf{E}$ elektromos és $\mathbf{B}$ mágneses térerősségekre olyan határföltételt írunk elő, hogy ezek a végtelenben elegendően gyorsan eltűnjenek. Ebben az esetben a Maxwell-Lorentz egyenletekben szereplő valamennyi mennyiségnek, a térerősségeknek és a töltéseknek illetve áramoknak továbbá az elektrodinamikában nagyon fontos szerepet játszó potenciáloknak létezik a térbeli Fourier transzformáltja. A megfelelő reciprok tér változóját a szokásos módon $\mathbf{k}$ -val jelöljük, míg ezek függvényeit írott betűkkel. Példaként az elektromos térerősséget véve, a Fourier transzformáltakra

vonatkozó összefüggések szerint

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (3.2)$$

Itt az utóbbi képlet mutatja, hogy jelen esetben a módusfüggvények éppen az $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ síkhullám "bázis" elemei, a kifejtési együtthatók pedig a $\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)$ Fourier amplitúdók. Alább a Fourier-transzformációs hozzárendelést egy kétféle nyíllal fogjuk jelölni, s így:

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathcal{E} \qquad \mathbf{A} \leftrightarrow \mathcal{A} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{B} \leftrightarrow \mathcal{B} \qquad U \leftrightarrow \mathcal{U} \quad (3.4)$$

$$\varrho \leftrightarrow \rho \qquad \mathbf{J} \leftrightarrow \mathbf{j} \quad (3.5)$$

Az elektrodinamikában előforduló mennyiségek valós függvények, ezért

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) \quad (3.6)$$

stb., amiből következik, hogy

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{E}^*(-\mathbf{k}, t) \quad (3.7)$$

vagy $\mathcal{E}^*(\mathbf{k}, t) = \mathcal{E}(-\mathbf{k}, t)$, ugyanis:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^* = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \mathcal{E}^*(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \mathcal{E}^*(-\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (3.8)$$

A továbbiakban gyakran használjuk a Fourier transzformáltakra vonatkozó Plancherel – Parseval tételt, mely szerint:

$$\int d^3\mathbf{r} F^*(\mathbf{r})G(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{k} \mathcal{F}^*(\mathbf{k})\mathcal{G}(\mathbf{k}). \quad (3.9)$$

Érvényes továbbá az úgynevezett konvolúciós tétel:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{r}' F(\mathbf{r}')G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \leftrightarrow \quad \mathcal{F}(\mathbf{k})\mathcal{G}(\mathbf{k}), \quad (3.10)$$

azaz

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \mathcal{F}(\mathbf{k})\mathcal{G}(\mathbf{k}). \quad (3.11)$$

Egyszerű integrálással vagy táblázatok segítségével meggyőződhetünk arról, hogy

$$\frac{1}{4\pi r} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{k^2}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{-i\mathbf{k}}{k^2}, \quad (3.13)$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) \leftrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_\alpha}. \quad (3.14)$$

A fentiek alapján a Maxwell–Lorentz egyenleteket reciprok térben a következő alakba írhatjuk:

$$i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0, \quad (3.15)$$

$$i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}}, \quad i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{1}{c^2} \dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \mathbf{j}. \quad (3.16)$$

A kontinuitási egyenlet:

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + \dot{\rho} = 0. \quad (3.17)$$

A potenciálok és a térerősségek kapcsolata pedig:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{A}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\dot{\boldsymbol{\mathcal{A}}} - i\mathbf{k} \mathcal{U}, \quad (3.18)$$

ahol $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ és $\mathcal{U}$ a vektor- illetve a skalárpotenciál Fourier transzformáltját jelenti. A reciprok térben fölirt összefüggések az $\mathbf{r}$ térben tekintett egyenletekkel szemben közönséges, csak időderiváltakat tartalmazó differenciálegyenletek, más szóval az elektrodinamika a $\mathbf{k}$ térben lokális.

3.3. Longitudinális és transzverzális vektormezők

Egy $\mathbf{V}_\parallel(\mathbf{r})$ vektormezőt longitudinálisnak nevezünk, ha

$$\nabla \times \mathbf{V}_\parallel(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.19)$$

azaz reciprok térben

$$i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mathcal{V}}_\parallel(\mathbf{k}) = 0. \quad (3.20)$$

Egy $\mathbf{V}_\perp(\mathbf{r})$ vektormező pedig transzverzális, ha

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_\perp(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.21)$$

azaz

$$i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}}_\perp(\mathbf{k}) = 0. \quad (3.22)$$

Ezen feltételeknek természetesen minden $\mathbf{r}$ illetve $\mathbf{k}$ helyen érvényesnek kell lennie. Ezek alapján a reciprok térben bármely $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{k})$ vektormező természetes és egyszerű módon fölbontható longitudinális és transzverzális komponensre. Bevezetve a

$$\boldsymbol{\kappa} := \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (3.23)$$

egységvektort,

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\mathcal{V}}_\parallel(\mathbf{k}) + \boldsymbol{\mathcal{V}}_\perp(\mathbf{k}), \quad (3.24)$$

ahol

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_\parallel(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}}) \quad (3.25)$$

és

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_\perp(\mathbf{k}) = \boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbf{k}) - \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}}) = -\boldsymbol{\kappa} \times (\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\mathcal{V}}). \quad (3.26)$$

$\mathbf{V}_{\parallel}(\mathbf{r})$ és $\mathbf{V}_{\perp}(\mathbf{r})$ ezekből Fourier transzformációval kaphatók meg.

A (3.15) “divergenciás” Maxwell egyenletek szerint

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp}, \quad \mathbf{B}_{\parallel} \equiv 0, \quad (3.27)$$

illetve

$$i\mathbf{k}(\mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}) = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\parallel} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (3.28)$$

Ez utóbbiból

$$\mathbf{E}_{\parallel} = -\frac{i}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{k}) \frac{\mathbf{k}}{k^2}. \quad (3.29)$$

Mivel az itt szereplő Fourier transzformáltakra fennáll, hogy

$$\frac{-i}{\varepsilon_0} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \leftrightarrow \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.30)$$

és

$$\rho(\mathbf{k}) \leftrightarrow \varrho(\mathbf{r}), \quad (3.31)$$

ezért a (3.10) konvolúciós tétel szerint:

$$\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \varrho(\mathbf{r}', t) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.32)$$

A mezőt keltő töltésekre mint pontszerű töltések összességére gondolunk, ilyenkor a töltéssűrűség és az áramsűrűség kifejezése:

$$\varrho(\mathbf{r}', t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \quad (3.33)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \quad (3.34)$$

ahol az α a pontszerűnek feltételezett töltéseket indexeli. Ennek megfelelően (3.32) alakja

$$\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)|^3}. \quad (3.35)$$

A longitudinális elektromos mező egy t időpillanatban olyan, mintha a $\varrho(\mathbf{r}, t)$ töltéseloszlás sztatikus lenne, ugyanis az $\mathbf{E}_{\parallel}$ ennek instantán értékétől függ, azaz nincs késleltetve. Ez azonban nem jelenti azt, hogy létezik a fénysebességnél gyorsabb jel, mert fizikai jelentése csak az $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ teljes térerősségnek van, amelyről viszont kimutatható hogy retardált.

Levezetésünkéből látható, hogy $\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$ fenti kifejezése független a mértéktől (bár néhány könyvben a Coulomb-mérték segítségével vezetik be), hiszen a potenciálokat nem is használtuk. Az $\mathbf{E}$ és a potenciálok kapcsolatára a következő érvényes:

$$\mathbf{E}_{\perp} = -\dot{\mathbf{A}}_{\perp}, \quad \mathbf{E}_{\parallel} = -\dot{\mathbf{A}}_{\parallel} - \nabla U, \quad (3.36)$$

mivel $\nabla \times \nabla U = 0$. Látható, hogy Coulomb-mértékben, (ahol $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, azaz $\mathbf{A}_{\parallel} = 0$) $\mathbf{E}_{\parallel} = -\nabla U$, amiből következik, hogy

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\varrho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.37)$$

Ezért is nevezik egyébként a $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ föltételt Coulomb- mértéknek, mert ekkor a skaláris potenciál időben változó töltések esetén is a Coulomb-törvénynek megfelelő alakú.

A föntiekből egyébként az is egyszerűen látható, hogy $\mathbf{A}_\perp$ mértékinvariáns, a mértéktranszformáció csak $\mathbf{A}_\parallel$ -t változtatja.

3.4. A töltések és a mező energiája, impulzusa

3.4.1. Energia

Az elektrodinamikából ismeretes, hogy a töltések és a mező teljes energiája:

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2(t) + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2), \quad (3.38)$$

A Maxwell egyenletek és a töltésekre vonatkozó mozgásegyenletek segítségével kimutatható, hogy H állandó, amennyiben egy végtelenben kiterjesztett felületen az $\mathbf{S} := \varepsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ Poynting-vektor integrálja nulla.

A (3.38) energiából a (3.9) Plancherel-tétel segítségével leválasztható az $\mathbf{E}_\parallel$ -hoz tartozó rész:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{E}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{k} |\mathcal{E}_\parallel(\mathbf{k})|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{k} |\mathcal{E}_\perp(\mathbf{k})|^2, \quad (3.39)$$

mert $\mathcal{E}_\parallel \cdot \mathcal{E}_\perp \equiv 0$. Bevezetve a

$$H_{\text{long}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{k} |\mathcal{E}_\parallel(\mathbf{k})|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r} E_\parallel^2 \quad (3.40)$$

és a

$$H_{\text{trans}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{E}_\perp^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \quad (3.41)$$

mennyiségeket, a mező teljes energiája a longitudinális és transzverzális rész összegeként áll elő:

$$H = H_{\text{long}} + H_{\text{trans}}. \quad (3.42)$$

Mivel az (3.29) Gauss törvény szerint $\mathcal{E}_\parallel(\mathbf{k}) = -\frac{i}{\varepsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{k})\mathbf{k}}{k^2}$, a longitudinális energia a

$$H_{\text{long}} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{k} \frac{\rho^*(\mathbf{k})\rho(\mathbf{k})}{k^2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \frac{\varrho(\mathbf{r})\varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.43)$$

alakba írható, azaz H_{long} éppen a töltések Coulomb-féle elektrosztatikus energiája, melyet a továbbiakban V_{Coul} -bal jelölünk. Így:

$$H = H_{\text{trans}} + V_{\text{Coul}} + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2. \quad (3.44)$$

3.4.2. Impulzus

Az elektrodinamika szerint a töltések és a mező együttes impulzusa:

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (3.45)$$

amelyről kimutatható, hogy állandó, ha a Maxwell féle feszültségi tenzor felületi integrálja egy elegendően nagy felületen eltűnik. A mező impulzusa a következő két tag összegére bontható:

$$\mathbf{P}_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{k} \mathcal{E}_{\perp}^*(\mathbf{k}) \times \mathcal{B}(\mathbf{k}), \quad (3.46)$$

$$\mathbf{P}_{\text{long}} = \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{r} \mathbf{E}_{\parallel} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{k} \mathcal{E}_{\parallel}^*(\mathbf{k}) \times \mathcal{B}(\mathbf{k}). \quad (3.47)$$

$\mathcal{E}_{\parallel} = -\frac{i\rho(\mathbf{k})\mathbf{k}}{\varepsilon_0 k^2}$ és $\mathcal{B} = i\mathbf{k} \times \mathcal{A}$ kihasználásával:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{long}} &= \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{k} \left(\frac{i\rho^*}{\varepsilon_0} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \right) \times (i\mathbf{k} \times \mathcal{A}) = \int d^3\mathbf{k} \rho^*(\mathbf{k}) (\mathcal{A} - \kappa(\kappa \cdot \mathcal{A})) = \\ &= \int d^3\mathbf{k} \rho^*(\mathbf{k}) \mathcal{A}_{\perp}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Így $\mathbf{P}_{\text{long}} = \int d^3\mathbf{r} \varrho \mathbf{A}_{\perp} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\alpha})$. Megjegyezzük, hogy $\mathbf{P}_{\text{long}}$ mértékfüggetlen, mert $\mathbf{A}_{\perp}$ is mértékfüggetlen.

A teljes impulzus tehát:

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} (m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} + q_{\alpha} \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\alpha})) + \mathbf{P}_{\text{trans}}. \quad (3.49)$$

Bevezetve az egyes részecskékre a

$$\mathbf{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} + q_{\alpha} \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\alpha}) \quad (3.50)$$

mennyiséget a teljes impulzus alakja:

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} + \mathbf{P}_{\text{trans}}. \quad (3.51)$$

A teljes energia pedig így a

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} (\mathbf{p}_{\alpha} - q_{\alpha} \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\alpha}))^2 + V_{\text{Coul}} + H_{\text{trans}} \quad (3.52)$$

alakba is írható. Erről a H -ról kimutatható, hogy az a mező és a részecskék együttes rendszerének Hamilton függvénye Coulomb mértékben (amikor $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\perp}$), azaz a belőle származó kanonikus egyenletek éppen a mező és a töltések mozgásegyenleteit adják.

3.5. A mező mozgásegyenletei, normálkoordináták

A korábbiak szerint a (3.16) “rotációs” Maxwell egyenletek alakja a $\mathbf{k}$ térben

$$\dot{\mathbf{B}} = -i \mathbf{k} \times \mathbf{E} = -i \mathbf{k} \times \mathbf{E}_\perp, \quad (3.53)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_\perp = i c^2 \mathbf{k} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}_\perp, \quad (3.54)$$

ahol (3.54) a (3.16) második egyenletének a $\mathbf{j}_\parallel$ -t már nem tartalmazó transzverzális része. Az (3.53) összefüggést $\mathbf{k}$ -val való vektori szorzással úgy is írhatjuk, hogy

$$\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{B}} = i k^2 \mathbf{E}_\perp. \quad (3.55)$$

Ezen elsőrendű differenciálegyenletek megoldását az egyes mennyiségek $t = 0$ -ban vett értékei teljesen meghatározzák, ezért a a mező és a töltések állapotát t_0 -ban a

$$\{\mathbf{E}_\perp(\mathbf{k}, t_0), \mathbf{B}(\mathbf{k}, t_0), \mathbf{r}_\alpha(t_0), \dot{\mathbf{r}}_\alpha(t_0)\} \quad (3.56)$$

mennyiségek adják meg. Vegyük észre, hogy a mezőnek csak a transzverzális része állapothatározó, a longitudinális részt (csak $\mathbf{E}$ -nek van) ugyanis (3.35) szerint a töltések helye már egyértelműen meghatározza.

A $\kappa = k/k$ jelöléssel a fönti (3.54) és (3.55) egyenleteket átírhatjuk a következő módon:

$$\kappa \times \dot{\mathbf{B}} = i k \mathbf{E}_\perp, \quad (3.57)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_\perp = i c^2 k \kappa \times \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}_\perp. \quad (3.58)$$

Az első egyenletet c -vel szorozva és a két egyenletet kivonva illetve összeadva a következő egyenletet nyerjük:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}_\perp \mp c \kappa \times \mathbf{B}) = \mp i \omega (\mathbf{E}_\perp \mp c \kappa \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}_\perp, \quad (3.59)$$

ahol az

$$\omega := c k \quad (3.60)$$

jelöléssel bevezettük a $\mathbf{k}$ -val jellemzett módus körfrekvenciáját vákuumban. ω csak k abszolút értékétől függ, ω megadása tehát nem jelenti a módus egyértelmű jellemzését.

Most a

$$-\frac{i}{2}(\mathbf{E}_\perp - c \kappa \times \mathbf{B}) =: \mathcal{N}(k) \alpha(\mathbf{k}) \quad (3.61)$$

definícióval bevezetjük a mező $\alpha(\mathbf{k})$ normálkoordinátáit, melyek az idő függvényei. Az $\mathcal{N}(k)$ itt egyelőre egy szabadon választott valós állandó, melynek értékét később alkalmas módon határozzuk meg. A térerősségek valós voltából (3.7) alapján egyszerűen következik, hogy

$$\alpha^*(\mathbf{k}) = \frac{i}{2\mathcal{N}(k)}(\mathbf{E}_\perp^*(\mathbf{k}) - c \kappa \times \mathbf{B}^*(\mathbf{k})) = \frac{i}{2\mathcal{N}(k)}(\mathbf{E}_\perp(-\mathbf{k}) + c(-\kappa) \times \mathbf{B}(-\mathbf{k})). \quad (3.62)$$

Azaz

$$\mathcal{N}(k) \alpha^*(-\mathbf{k}) = \frac{i}{2}(\mathbf{E}_\perp(\mathbf{k}) + c \kappa \times \mathbf{B}(\mathbf{k})). \quad (3.63)$$

Így előbbi (3.61) definícióink alakja:

$$-\frac{i}{2\mathcal{N}(k)}(\mathcal{E}_\perp - c\boldsymbol{\kappa} \times \mathcal{B}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}, t), \quad -\frac{i}{2\mathcal{N}(k)}(\mathcal{E}_\perp + c\boldsymbol{\kappa} \times \mathcal{B}) = -\boldsymbol{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t). \quad (3.64)$$

Az $\mathcal{E}_\perp$ és $\mathcal{B}$ időderiváltjaira vonatkozó (3.54, 3.53) egyenletekből pedig a következő mozgásegyenletet nyerjük:

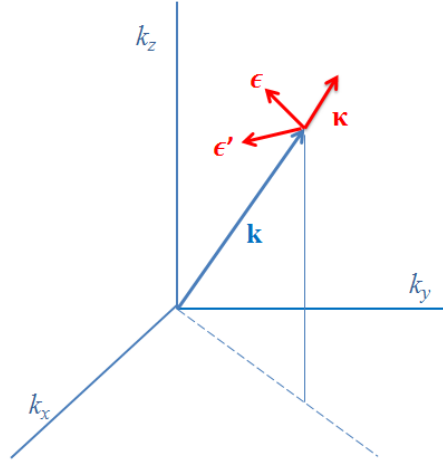
$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} + i\omega\boldsymbol{\alpha} = \frac{i}{2\varepsilon_0\mathcal{N}}\mathbf{j}_\perp(\mathbf{k}). \quad (3.65)$$

Látható, hogy $\boldsymbol{\alpha}$ is transzverzális:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (3.66)$$

Ennek alapján a $\mathbf{k}$ térben a $\mathbf{k}$ -ra merőlegesen bevezethetünk egy derékszögű bázist $\boldsymbol{\epsilon}$ és $\boldsymbol{\epsilon}'$ egységvektorokkal:

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = \boldsymbol{\epsilon}' \cdot \mathbf{k} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}' = 0 \quad (3.67)$$



3.1. ábra. A $\mathbf{k} = k\boldsymbol{\kappa}$ -ra merőleges vektorok fölbontása polarizációs komponensekre.

Így az írásmódot egyszerűsíthetjük:

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}, t) = \boldsymbol{\epsilon}\alpha_\epsilon + \boldsymbol{\epsilon}'\alpha_{\epsilon'} = \sum_{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\epsilon}\alpha_\epsilon(\mathbf{k}, t) \quad \text{ahol} \quad \alpha_\epsilon = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\alpha}. \quad (3.68)$$

Eszerint

$$\dot{\alpha}_\epsilon + i\omega\alpha_\epsilon = \frac{i}{2\varepsilon_0\mathcal{N}(k)}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{j}_\perp = \frac{i}{2\varepsilon_0\mathcal{N}(k)}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{j}. \quad (3.69)$$

Az $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})$ definíciójából kifejezhetjük $\mathcal{E}_\perp$ -et és $\mathcal{B}$ -t

$$\mathcal{E}_\perp = i\mathcal{N}(k)(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_-^*), \quad \mathcal{B} = \frac{i\mathcal{N}(k)}{c}(\boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{\alpha}_-^*), \quad (3.70)$$

ahol $\alpha_- = \alpha(-\mathbf{k}, t)$. Válasszuk most a normálási tényezőt a következőképpen:

$$\mathcal{N}(k) = \sqrt{\frac{\hbar k c}{2\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\varepsilon_0}}. \quad (3.71)$$

Ez a választás lesz a következőben tárgyalandó kvantumos formalizmussal összhangban. Ekkor az energia:

$$H_{\text{trans}} = \varepsilon_0 \int d^3\mathbf{k} \mathcal{N}^2(\alpha^* \alpha + \alpha_- \alpha_-^*) = \int d^3\mathbf{k} \frac{\hbar \omega}{2} (\alpha^* \alpha + \alpha_- \alpha_-^*), \quad (3.72)$$

amely a második tagban egy $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ helyettesítéssel a

$$H_{\text{trans}} = \int d^3\mathbf{k} \frac{\hbar \omega}{2} (\alpha^* \alpha + \alpha \alpha^*) \quad (3.73)$$

alakba is írható. A két tagot így össze is lehetne vonni, azonban ezt itt, alább tárgyalandó okok miatt, még nem tesszük meg. Az elektromos térerősség alakja ezzel a normálással

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) = i \int d^3\mathbf{k} \sum_{\epsilon} \mathcal{E}_\omega \boldsymbol{\epsilon} (\alpha_\epsilon e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \alpha_\epsilon^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}), \quad (3.74)$$

$$\text{ahol } \mathcal{E}_\omega = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}}.$$

3.6. Diszkrét változók

Mind elméleti, mind kísérleti szempontból fontos a mező normál módusokra való fölbontásának az a változata, amikor az elektromágneses teret egy üregben vizsgáljuk. Most az egyszerűség kedvéért az üreget egy L oldalhosszúságú kockának tekintjük, de itt – a 2. fejezettel szemben – periodikus peremföltételeket írunk elő. Ebben az esetben a térerősséget Fourier integrál helyett Fourier sorba fejthetjük, vagyis a $\mathbf{k}$ vektorra vonatkozó integrálok helyett a

$$\mathbf{k}_i = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z), \quad \text{ahol } n_j = 0, 1, 2 \dots \quad (3.75)$$

diszkrét indexekre való sorokat használunk, ahol az i mindhárom irányú diszkrét $\mathbf{k}$ -kat indexeli. Más-képpen ez azt jelenti, hogy a itt az $e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}/L^{3/2}$ diszkrét és valódi ortonormált rendszert használjuk módusfüggvényként. Az $\alpha_\epsilon(\mathbf{k}, t)$ változókat ekkor az $\alpha_{\mathbf{k}_i \epsilon_i}(t)$ diszkrét mennyiségek helyettesítik, amelyeket még tömörebben α_i -vel jelölhetünk, ahol az i index a $(\mathbf{k}_i \epsilon_i)$ indexek helyett áll, és ahol a korábbiakhoz hasonlóan ϵ_i a $\mathbf{k}_i$ -re merőleges. A folytonos és diszkrét előállítás között a kapcsolat a következő:

$$\int d^3\mathbf{k} \sum_{\epsilon} f(\mathbf{k}, \epsilon) \longleftrightarrow \sum_i \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 f(\mathbf{k}_i, \epsilon_i). \quad (3.76)$$

Az egyes fizikai mennyiségek alakja a diszkrét változat esetén a következő:

$$H_{\text{trans}} = \sum_i \frac{\hbar \omega_i}{2} (\alpha_i^* \alpha_i + \alpha_i \alpha_i^*), \quad (3.77)$$

$$\mathbf{P}_{\text{trans}} = \sum_i \frac{\hbar \mathbf{k}_i}{2} (\alpha_i^* \alpha_i + \alpha_i \alpha_i^*), \quad (3.78)$$

$$\mathbf{A}_{\perp} = \sum_i A_{\omega_i} \boldsymbol{\epsilon}_i (\alpha_i e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \alpha_i^* e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}), \quad (3.79)$$

$$\mathbf{E}_{\perp} = i \sum_i \mathcal{E}_{\omega_i} \boldsymbol{\epsilon}_i (\alpha_i e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - \alpha_i^* e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}), \quad (3.80)$$

$$\mathbf{B} = i \sum_i \mathcal{B}_{\omega_i} (\alpha_i \boldsymbol{\kappa}_i \times \boldsymbol{\epsilon}_i e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - \alpha_i^* \boldsymbol{\kappa}_i \times \boldsymbol{\epsilon}_i e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}), \quad (3.81)$$

ahol

$$\mathcal{E}_{\omega_i} = \left(\frac{\hbar \omega_i}{2 \varepsilon_0 L^3} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{B}_{\omega_i} = \frac{\mathcal{E}_{\omega_i}}{c}, \quad A_{\omega_i} = \frac{\mathcal{E}_{\omega_i}}{\omega_i}. \quad (3.82)$$

Az $\mathcal{N}(k)$ normálási tényező (3.71) szerinti választása így annak felel meg, hogy az i -edik módusban az elektromágneses energiasűrűség egy periódusra vett átlaga

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 (\mathcal{E}_{\omega_i}^2 + c^2 \mathcal{B}_{\omega_i}^2) |\alpha_i|^2 = \frac{1}{L^3} \frac{\hbar \omega_i}{2} |\alpha_i|^2, \quad (3.83)$$

vagyis az L^3 térfogatban $|\alpha_i|^2 = 1$ amplitúdó esetén éppen $\frac{\hbar \omega_i}{2}$ energia van.

Az α_i -re vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\dot{\alpha}_i + i \omega_i \alpha_i = \frac{i}{\sqrt{2 \varepsilon_0 \hbar \omega_i}} \int d^3 \mathbf{r} \frac{1}{\sqrt{L^3}} \boldsymbol{\epsilon}_i \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \quad (3.84)$$

Megjegyezzük még, hogy az α_i diszkrét változók dimenziótlanak, tehát dimenziójuk más, mint az $\alpha_{\epsilon}(\mathbf{k})$ folytonos változóké:

$$\alpha_i = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{3/2} \alpha_{\epsilon_i}(\mathbf{k}_i). \quad (3.85)$$

3.7. A mező kvantálása és a fotonkép

Az előzőek szerint a töltések és a mező együttesét úgy tekintjük mint pontszerű részecskékből és harmonikus oszcillátorokból álló kölcsönható rendszert. Ezen rendszer kvantálásának legegyszerűbb módja az, hogy a részecskék $r_{\alpha i}$ hely- illetve $p_{\alpha i}$ impulzuskomponenseit a szokásos módon operátoroknak tekintjük, és ugyanezt tesszük az oszcillátorok α_i és α_i^* normál változói helyett bevezetett

$$\alpha_i \rightarrow a_i, \quad \alpha_i^* \rightarrow a_i^{\dagger} \quad (3.86)$$

operátorokkal is, az alábbi fölcserélési relációkat írva elő rájuk:

$$[r_{\alpha i}, r_{\beta j}] = 0, \quad [p_{\alpha i}, p_{\beta j}] = 0, \quad [r_{\alpha i}, p_{\beta j}] = i \hbar \delta_{\alpha \beta} \delta_{ij}, \quad (3.87)$$

$$[a_i, a_j] = 0, \quad [a_i^{\dagger}, a_j^{\dagger}] = 0, \quad [a_i, a_j^{\dagger}] = \delta_{ij}. \quad (3.88)$$

Ez az eljárás megalapozható a mező és a töltések rendszerére alkalmazott kanonikus formalizmussal is. Az így nyerhető teljes Hamilton függvény Coulomb-mérték esetén azonos azzal a mennyiséggel,

amit korábban a teljes energiára kaptunk. Az eljárást lerövidítve itt most egyszerűen posztuláljuk, hogy a Hamilton függvény éppen a teljes energiának megfelelő kifejezés. Ezek után a kanonikus kvantálás szokásos szabályait követve a H -ban szereplő mennyiségeket operátoroknak tekintjük, és az eddig a klasszikus Hamilton-függvényre használt H a továbbiakban a Hamilton operátort fogja jelölni. Ezek szerint a mező és a töltések teljes Hamilton operátora:

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} (\mathbf{p}_{\alpha} - q_{\alpha} \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}_{\alpha}))^2 + V_{\text{Coul}} + H_{\text{trans}}, \quad (3.89)$$

ahol

$$H_{\text{trans}} = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2} (a_i^{\dagger} a_i + a_i a_i^{\dagger}). \quad (3.90)$$

(Itt és a továbbiakban az 3.6 pontban bevezetett diszkrét változókat használjuk.) Az ebben a H -ban szereplő mennyiségekre a fenti fölcserélési relációk éppen a szokásos kanonikus kvantálási szabályok. Eljárásunkat az indokolja, hogy ha ezzel a H operátorral fölírjuk az $\mathbf{r}_{\alpha}$, $\mathbf{p}_{\alpha}$ mennyiségekre vonatkozó kvantumdinamikai mozgásegyenleteket (Heisenberg-képben), akkor a töltések mozgásegyenleteinek kvantumos változatát nyerjük, ha pedig az a_i illetve $a_i^{\dagger}$ operátorok időderiváltját számítjuk ki, akkor a mező dinamikáját leíró Maxwell- egyenletek kvantumos megfelelőit kapjuk a (3.80) és (3.81) egyenletekben megadott elektromos és mágneses téroperátorokra. Ha az egyes módusok állapotait külön-külön tárgyaljuk, akkor egyetlen módusra vonatkozóan pontosan az előző fejezetben megismert eredményeket kapjuk, mivel azok mind az a és $a^{\dagger}$ ittenivel megegyező fölcserélési relációjából következnek. Így pl. az $\hat{n}_i := a_i^{\dagger} a_i$ operátor sajátértékei csak nemnegatív egész számok lehetnek, amelyeket a i -edik módusban mérhető fotonok számaként interpretálunk.

Megjegyezzük azonban a következőt. Az ebben a fejezetben szereplő módusok közül egyet kiválasztva, az nem azonos az 1. fejezetben vizsgált $\sin(2\pi x/L)$ típusú *állóhullám módussal*, mert itt periodikus határföltételeket írtunk elő, ami *haladó hullámoknak* felel meg. Ezért az itt szereplő a_i illetve $a_i^{\dagger}$ sem azonos azokkal az operátorokkal amelyeket az 2. fejezetben ugyanígy jelöltünk, noha önmagukban nézve az azonos fölcserélési relációik miatt a matematikai tulajdonságaik teljesen megegyeznek. Az itteni léptető operátorok a megfelelő haladó hullámban "keltenek illetve tüntetnek el" egy fotont, míg az 2. fejezetben szereplő megfelelő operátorok egy állóhullám módus állapotait változtatják.

H_{trans} fönti kifejezése a tradicionális alak, amelyet az $[a_i, a_j^{\dagger}] = \delta_{ij}$ fölcserélési reláció segítségével a

$$H_{\text{trans}} = \sum_i \hbar\omega_i (a_i^{\dagger} a_i + 1/2) \quad (3.91)$$

formába is írhatunk. Ezen pont kiemelése miatt nem vontuk össze korábban a klasszikusan megegyező $\alpha_i^* \alpha_i$ és $\alpha_i \alpha_i^*$ tagokat. Ha a hagyománnyal ellentétben a fordított eljárást követjük, és a kvantálás és az összevonás sorrendjét fölcseréljük, akkor a

$$H_{\text{trans}} = \sum_i \hbar\omega_i a_i^{\dagger} a_i \quad (3.92)$$

operátort nyerjük. Ez esetben a vákuum energiája eltűnik s ez egyszerűbbnek látszik mint a hagyományos módszer, ahol a szimmetrizálás miatt föllépő további $\hbar\omega/2$ tagot még külön kezelni kell. Az utolsó fejezetben azonban látni fogjuk, hogy az elmélet a vákuum energiájának fizikai következményeket tulajdonít, ezért általában nem hagyható el.

3.8. A teljes mező állapottere

Most már vizsgálhatjuk a teljes mező, azaz az összes módus együttes állapotterét. A mező állapottere az egyes módusokhoz tartozó állapotterek tenzorszorzata:

$$\mathcal{H}_{\text{mez}} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \quad (3.93)$$

ezt szokás Fock térnek nevezni. Egy lehetséges ortonormált bázis minden $\mathcal{H}_i$ -ben a számállapotok rendszere. Így $\mathcal{H}_{\text{mez}}$ egy lehetséges bázisa:

$$\{|n_1\rangle|n_2\rangle\dots|n_i\rangle\dots\} := |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle. \quad (3.94)$$

Ez nevezzük fotonszám bázisnak. A mező vákuumállapota definíció szerint az a $|0\rangle$ -val jelölt állapot, amelyben minden módusra $n_i = 0$, ekkor azt mondhatjuk, hogy a mezőben nincs foton. A fotonszám bázisvektorok a vákuumból az $a_i^\dagger$ operátorok ismételt alkalmazásával nyerhetők:

$$|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \dots \frac{(a_i^\dagger)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \dots |0\rangle. \quad (3.95)$$

Az $|n_1, \dots, n_i, \dots\rangle$ állapot, amely a teljes fotonszám operátor $N = \sum_i N_i = \sum_i a_i^\dagger a_i$ sajátállapota $\sum_i n_i$ sajátértékkel, olyan állapot ahol az i -edik módusban n_i foton van. A mező tetszőleges állapota ezen bázisvektorok lineáris kombinációja. Ebben az állapotban a mező energiája pontosan $\sum_i \hbar\omega_i(n_i + 1/2)$, impulzusa $\sum_i \hbar\mathbf{k}_i(n_i + 1/2)$.

A mező egy általános állapota, ahol a fotonszám nincs föltétlenül meghatározva:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_i=0}^{\infty} \dots c_{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots} |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle. \quad (3.96)$$

Ezek a Fock tér általános elemei.

3.8.1. Általános egyfotonos állapotok

Ha egyetlen módusban pl. az ℓ -edikben van egy foton, akkor annak alakja $|0, 0, \dots, 0, n_\ell = 1, 0, \dots\rangle$. Azonban világos, hogy tekinthetjük ilyen állapotok tetszőleges szuperpozícióját, amelynek alakja

$$|1\rangle = \sum_{\ell} c_{\ell} |0, 0, \dots, 0, n_{\ell} = 1, 0, \dots\rangle = \sum_{\ell} c_{\ell} |1_{\ell}\rangle, \quad (3.97)$$

ahol $\sum_{\ell} |c_{\ell}|^2 = 1$. Ezek az állapotok 1 sajátértékkel sajátállapotai az

$$\mathbf{N} = \sum_{\ell} a_{\ell}^\dagger a_{\ell} = \sum_{\ell} \hat{n}_{\ell} \quad (3.98)$$

operátornak, ezért ezeket általános egyfotonos állapotoknak nevezzük. Ezek nem sajátállapotai az egyes $\hat{n}_{\ell}$ operátoroknak, mivel $\hat{n}_{\ell} |1\rangle = c_{\ell} |0, 0, \dots, 0, n_{\ell} = 1, 0, \dots\rangle$, azaz nem kapjuk vissza az eredeti $\sum_{\ell} c_{\ell} |1_{\ell}\rangle$ állapot számszorosát, csak annak vetületét a ℓ -edik módusra. A különböző módusok általában különböző frekvenciájúak, s így az összegben minden tag a saját ω_{ℓ} körfrekvenciájával változik időben, így ezek összege nem stacionárius. Egy sokmódusú mező általános egyfotonos állapotának időfüggése tehát:

$$|1(t)\rangle = \sum_{\ell} c_{\ell} e^{-i\omega_{\ell} t} |0, 0, \dots, 0, n_{\ell} = 1, 0, \dots\rangle \quad (3.99)$$

alakú. Hasonlóan definiálhatjuk az általános kétfotonos stb. állapotokat is.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen matematikai eljárással vezetjük be a reciprok tér fogalmát?
2. Mit mond ki a Parseval-Plancherel tétel?
3. Két Fourier-transzformált szorzatának mi az inverz transzformáltja?
4. Mi a Coulomb-törvény alakja a reciprok térben?
5. Mi a Faraday-féle indukciós törvény alakja a reciprok térben?
6. Hogyan bontunk föl egy vektormezőt transzverzális és longitudinális részre?
7. Milyen tagokból tevődik össze a mező és a töltések együttes energiája?
8. Milyen adatok határozzák meg a mező és a töltések együttes állapotát?
9. Mik a mező normálkoordinátái és milyen mozgásegyenletnek tesznek eleget?
10. Hogyan térünk át diszkrét változókra?
11. A kvantálás után hogyan adhatók meg a szabad mező stacionárius állapotai?
12. Hogyan definiáljuk az általános egyfotonos állapotokat?

4. fejezet

Koherens állapotok

4.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben először is rámutatunk arra, hogy a módusok stacionárius állapotai, azaz a fotonszám-sajátállapotok tulajdonságai lényegesen különböznek attól, amit egy klasszikus mezőnek tulajdonítunk. Ebből kiindulva megkeressük azokat a kvantumállapotokat, amelyekben a léptető operátoroktól lineárisan függő térmennyiségek illetve az azoktól négyzetesen függő energia kifejezésének várható értékei a megfelelő klasszikus kifejezéseket adják. Ezután megvizsgáljuk ezeknek az úgynevezett kváziklasszikus vagy más néven koherens állapotoknak a tulajdonságait, kifejtésüket a számállapotok szerint stb. A koherens állapotok tulajdonságait szemléltetjük is egy módus fázisterén, ami nagymértékben segíti a koherens állapotok tulajdonságainak megértését. A fejezet megértéséhez szükséges előismeretek a 2. és 3. fejezetben találhatóak, és nagyon hasznos ha itt is fölidézzük kvantummechanikából a harmonikus oszcillátorról tanultakat.

4.2. A számállapotok nem mutatják a klasszikus mező tulajdonságait

Az elektromágneses mező azon állapotai, amelyekkel általában a fizikai kísérletek során találkozunk, csak egészen kivételes esetben fotonszám-sajátállapotok. Ezen állapotok nem sajátállapotai az elektromos térerősség operátorának, és azt is azonnal láthatjuk, hogy ha például az elektromos térerősséget egy fotonszám-sajátállapotban mérjük, akkor annak várható értéke 0. Valóban az

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i \sum_i \mathcal{E}_{\omega_i} \boldsymbol{\epsilon}_i (a_i e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - a_i^\dagger e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}), \quad \mathcal{E}_{\omega_i} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_i}{2\epsilon_0 V}} \quad (4.1)$$

operátor várható értéke nem csak a vákuum állapotban, de minden fotonszám-sajátállapotban 0:

$$\langle 0 | \mathbf{E}(\mathbf{r}) | 0 \rangle = 0, \quad \langle n | \mathbf{E}(\mathbf{r}) | n \rangle = 0. \quad (4.2)$$

Ez következik abból, hogy a keltő és eltüntető operátoroknak a számállapotokon vett diagonális mátrix-elemei eltűnnek.

Számítsuk ki most a térerősség operátorának

$$\Delta E^2(\mathbf{r}) = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 \quad (4.3)$$

szórását a vákuumállapotban. A második tag, mint láttuk, eltűnik. Az első tag kiszámításához vegyük figyelembe, hogy

$$\langle 0|a_i a_j|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a_i^\dagger a_j^\dagger|0\rangle = 0, \quad (4.4)$$

$$\langle 0|a_i^\dagger a_j|0\rangle = 0, \quad \langle 0|a_i a_j^\dagger|0\rangle = \delta_{ij}. \quad (4.5)$$

Így

$$\langle 0|E^2|0\rangle = \sum_i E_{\omega_i}^2 = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2\varepsilon_0 L^3}. \quad (4.6)$$

Ez az összeg végtelen, mert a módusok száma végtelen, és az összegben tetszőlegesen nagy frekvenciák is megjelennek. Ha áttérünk a doboz kvantálás helyett a végtelen térre, akkor ez a következőképpen is látható:

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2\varepsilon_0 L^3} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{k} \hbar c k = \\ &= \frac{4\pi\hbar c}{(2\pi)^3 2\varepsilon_0} \int_0^\infty dk k^3 = \frac{\hbar c}{2\varepsilon_0 \pi^2} \int_0^\infty dk k^3 = \infty. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Számállapotban tehát az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ várható értéke minden pontban 0, szórása viszont végtelen. Ez utóbbi annak a következménye, hogy a mező értékét egy „geometriai pontban” vizsgáltuk. A szingularitás oka hasonló ahhoz, ahogyan pl. egy pontszerű töltés energiája is végtelen nagynak adódik.

Ezt a divergenciát kiküszöbölhetjük ha a fönti egyszerű eljárás helyett az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vektornak az $\mathbf{r}$ -hez közeli pontokban vett átlagát tekintjük. Az átlagolást a következőképpen végezhetjük:

$$\bar{\mathbf{E}} = \int d^3\mathbf{r}' f(r') \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \quad (4.8)$$

ahol $f(r')$ egy gömbszimmetrikus simító függvény ($r' = |\mathbf{r}'|$), amely csak egy r_0 sugarú tartományon belül különbözik lényegesen 0-tól, azon kívül exponenciálisan nullához tart. Előírjuk még hogy $f(r')$ legyen normált, azaz

$$\int d^3\mathbf{r}' f(r') = 1. \quad (4.9)$$

Ekkor

$$\bar{\mathbf{E}} = i \sum_i \mathcal{E}_{\omega_i} \boldsymbol{\epsilon}_i g(\mathbf{k}_i) (a_i e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - a_i^\dagger e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}), \quad (4.10)$$

ahol $g(\mathbf{k})$ az $f(\mathbf{r}')$ Fourier transzformáltja:

$$g(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r}' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} f(r'). \quad (4.11)$$

Látható, hogy $g(0) = 1$, és hogy $g(\mathbf{k})$ csak $|\mathbf{k}|$ -től függ, és nullához tart, ha $|\mathbf{k}| \gg 1/r_0$

Ez azt jelenti, hogy csak azok a módusok adnak hozzájárulást a szóráshoz, amelyek hullámvektorainak hossza kisebb mint $1/r_0$. Azt szokás mondani, hogy egy levágást vezettünk be a $\mathbf{k}$ térben. Ekkor a szórásra a

$$\Delta \bar{\mathbf{E}}^2(\mathbf{r}) = \frac{\hbar c}{2\varepsilon_0 \pi^2} \int_0^\infty dk k^3 g^2(|\mathbf{k}|) \quad (4.12)$$

eredmény adódik, amely véges.

Számállapotban a várható érték egy hasonló átlagolás után azonban továbbra is eltűnik akármilyen nagy is a fotonok száma. Ez viszont azt jelenti, hogy a klasszikus elektromos mezőről alkotott fogalomnak nem felelnek meg a számállapotok, hiszen ha a laboratóriumban előállított fényhullámban a fotonok száma nagy, akkor a térerősségek is rendszerint nagyok.

4.3. A koherens állapotok bevezetése

A mező stacionárius állapotain azaz a számállapotokon tehát a mező operátorok várható értéke eltűnik, akármilyen nagy a kvantumok száma. Ezzel a problémával szembesülve azt a kérdést vetjük föl, hogy melyek a mezőnek azon kvantumállapotai, amelyek leginkább megfelelnek egy klasszikus elektromágneses hullámról alkotott képnek, azaz pl. a térerősség operátor várható értéke a klasszikus mezőt adja vissza.

Tekintsük ezért ismét a *klasszikus* mezőt töltésektől mentes térben. A mező állapotait az α_i normál változók jelentik. Ha az α_i -ket ismerjük, ismert a mező energiája, impulzusa, térerőssége stb. mint az $\{\alpha_i\}$ halmaz függvénye:

$$H_{\text{trans}}^{\text{kl}} = \sum_i \hbar \omega_i \alpha_i^* \alpha_i = H_{\text{trans}}^{\text{kl}}(\{\alpha_i\}), \quad (4.13)$$

$$\mathbf{P}_{\text{trans}}^{\text{kl}} = \sum_i \hbar \mathbf{k}_i \alpha_i^* \alpha_i, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{E}_{\perp}^{\text{kl}} = i \sum_i E_{\omega_i} \boldsymbol{\epsilon}_i (\alpha_i e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - \alpha_i^* e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}). \quad (4.15)$$

Kísérjük meg megtalálni azt a $|\{\alpha_i\}\rangle$ -vel jelölendő kvantumállapotot, amely a lehető legjobban visszaadja a klasszikus állapot, $\{\alpha_i\}$ tulajdonságait, olyan módon, hogy minden mennyiség: H , $\mathbf{P}$, $\mathbf{E}_{\perp}$, $\mathbf{B}$, stb operátorának várható értéke az $|\{\alpha_i\}\rangle$ állapotban éppen a megfelelő klasszikus mennyiség. Azaz olyan állapotokat keresünk, amelyre

$$\langle \{\alpha_i\} | H_{\text{trans}} | \{\alpha_i\} \rangle = H_{\text{trans}}^{\text{kl}}(\{\alpha_i\}). \quad (4.16)$$

ahol a vákuum energiát eleve levontuk, mert minden energiát ahhoz viszonyítunk.

$$\langle \{\alpha_i\} | \mathbf{P}_{\text{trans}} | \{\alpha_i\} \rangle = \mathbf{P}^{\text{kl}}, \quad (4.17)$$

$$\langle \{\alpha_i\} | \mathbf{E}_{\perp} | \{\alpha_i\} \rangle = \mathbf{E}_{\perp}^{\text{kl}}. \quad (4.18)$$

Ha ide behelyettesítjük a megfelelő operátorokat akkor a fenti követelmények szerint az:

$$\langle \{\alpha_i\} | a_i | \{\alpha_i\} \rangle = \alpha_i \quad (4.19)$$

$$\langle \{\alpha_i\} | a_i^{\dagger} a_i | \{\alpha_i\} \rangle = \alpha_i^* \alpha_i \quad (4.20)$$

összefüggéseknek minden i -re teljesülnie kell. Egy módus esetén ez azt jelenti, hogy a módus olyan $|\alpha\rangle$ állapotban van, amelyre:

$$\langle \alpha | a | \alpha \rangle = \alpha, \quad (4.21)$$

$$\langle \alpha | a^{\dagger} a | \alpha \rangle = \alpha^* \alpha. \quad (4.22)$$

Legyen $b = a - \alpha \mathbb{1}$, ahol $\mathbb{1}$ az egységoperátor, akkor ezen b operátor várható értéke a keresett $|\alpha\rangle$ állapotban 0:

$$\langle \alpha | b | \alpha \rangle = \langle \alpha | a - \alpha | \alpha \rangle = 0 \quad (4.23)$$

Vizsgáljuk most a $b^{\dagger} b$ operátor várható értékét.

$$\begin{aligned} \langle \alpha | b^{\dagger} b | \alpha \rangle &= \langle \alpha | a^{\dagger} a - a^{\dagger} \alpha - \alpha a^* + \alpha^* \alpha | \alpha \rangle = \\ &= \underbrace{\langle \alpha | a^{\dagger} a | \alpha \rangle}_{\alpha^* \alpha} - \underbrace{\alpha \langle \alpha | a^{\dagger} | \alpha \rangle}_{\alpha^*} - \underbrace{\alpha^* \langle \alpha | a | \alpha \rangle}_{\alpha} + \alpha^* \alpha = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Mivel :

$$\langle \alpha | b^\dagger b | \alpha \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b | \alpha \rangle = 0 \quad (4.25)$$

ezért:

$$a | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle. \quad (4.26)$$

A módus azon $| \alpha \rangle$ állapota, amelyre $a | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle$, azaz amely az eltüntető operátor sajátállapota, teljesíti az adott módus esetén a fent kirótt kritériumot. Itt a ket előtt álló α sajátérték egy komplex szám, hiszen a nem önadjungált, és magát a sajátállapotot is ezzel a komplex számmal szokás jelölni. (Vigyázat, ha az α véletlenül pozitív egész, azért $| \alpha \rangle$ nem azonos egy számállapottal, ez a jelölésrendszer inkonzisztenciája!) Egyszerűen belátható, hogy általában, sok módus esetén pedig az

$$| \{ \alpha_i \} \rangle = | \alpha_1 \rangle | \alpha_2 \rangle \dots \quad (4.27)$$

állapot teljesíti feltételünket, ahol $a_i | \alpha_i \rangle = \alpha_i | \alpha_i \rangle$. $| \alpha \rangle$ vagy $| \{ \alpha_i \} \rangle$ neve *kváziklasszikus*, másnéven *koherens állapot*. Ebben az állapotban H , P , E , B várható értékei megegyeznek a megfelelő klasszikus kifejezésekkel. Vegyük észre, hogy speciális esetként a vákuum is koherens állapot, ekkor $\alpha = 0$. Ez az egyetlen kivétel a fönti zárójeles megjegyzés alól.

4.4. A koherens állapotok kifejtése a számállapotok szerint

Vizsgáljuk most meg, hogy tényleg léteznek-e ilyen állapotok. Mivel a számállapotok bázist alkotnak a módushoz tartozó Hilbert téren, ezért a fönt definiált koherens állapotoknak kifejtethetőnek kell lennie a számállapotok szerint. Ismét csak egyetlen módusra korlátozva számításainkat:

$$| \alpha \rangle = \sum_n c_n | n \rangle = \sum_n | n \rangle \langle n | \alpha \rangle \quad (4.28)$$

Keressük meg a $c_n = \langle \alpha | n \rangle$ kifejtési együtthatókat! Ehhez az $| n \rangle$ számállapotokat az $a^\dagger$ n -edik hatványával előállítjuk a vákuumból, majd kihasználjuk, hogy $a^\dagger$ adjungáltja a :

$$\langle n | \alpha \rangle = \langle \alpha | n \rangle^* = \langle \alpha | \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} | 0 \rangle^* = \langle 0 | \frac{a^n}{\sqrt{n!}} | \alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \alpha \rangle, \quad (4.29)$$

azaz a $c_n = \langle n | \alpha \rangle$ kifejtési együtthatókra érvényes a következő:

$$\langle n | \alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \alpha \rangle. \quad (4.30)$$

Eszerint:

$$| \alpha \rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \alpha \rangle | n \rangle = \langle 0 | \alpha \rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle. \quad (4.31)$$

$\langle 0 | \alpha \rangle$ -t a normálásból határozhatjuk meg. Írjuk elő, hogy legyen $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$. Akkor:

$$1 = \langle \alpha | \alpha \rangle = | \langle 0 | \alpha \rangle |^2 \sum_{m,n} \frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\langle m | n \rangle}_{\delta_{mn}} = \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} | \langle 0 | \alpha \rangle |^2 = | \langle 0 | \alpha \rangle |^2 e^{|\alpha|^2} \quad (4.32)$$

Ebből $\langle 0|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$, ahol a fázistényezőt konvenció szerint 1-nek választottuk. A keresett kifejtés tehát:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.33)$$

azaz $|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$, ahol

$$c_n = \langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}. \quad (4.34)$$

A

$$|c_n|^2 = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (4.35)$$

számok egy $|\alpha|^2$ paraméterű *Poisson-eloszlásnak* felelnek meg, és a kvantummechanika szokásos interpretációja szerint, (amelyet axiómaként is meg szokás fogalmazni) megadják annak a valószínűségét, hogy az adott módban (itt most egy módustról van szó) az $|\alpha\rangle$ állapot esetén n darab fotont mér egy fotonszámláló berendezés, hiszen az $|n\rangle$ állapotok a fotonszám operátor sajátállapotai. Láthatólag $\sum_n |c_n|^2 = 1$. Ezek szerint az $|\alpha\rangle$ állapotok tetszőleges komplex α esetén normálhatók, szokatlan viszont, hogy számosságuk a kontinuuméval megegyező. (Ne felejtjük el, hogy az $|\alpha\rangle$ szimbólum itt azt jelzi, hogy az adott koherens állapot az a eltüntető operátornak milyen komplex sajátértékéhez tartozik.)

Vizsgáljuk meg mennyi a fotonszám $\langle \hat{n} \rangle_\alpha$ várható értéke az $|\alpha\rangle$ koherens állapotban.

$$\langle \hat{n} \rangle_\alpha = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (4.36)$$

Ugyanez a valószínűségi számítás szokásos módszerével kissé hosszadalmasabb:

$$\langle \hat{n} \rangle_\alpha = \sum_n n |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \sum_n n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \quad (4.37)$$

Használjuk a $\lambda = |\alpha|^2$ jelölést. Ekkor az utóbbi összeget átírhatjuk a következő módon:

$$e^{-\lambda} \sum_n n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} e^\lambda = \lambda = |\alpha|^2. \quad (4.38)$$

Azaz a fotonszám várható értéke az előző (4.36) számítással összhangban $\langle \hat{n} \rangle_\alpha = |\alpha|^2$.

A fotonszám szórását az $|\alpha\rangle$ koherens állapotban a kvantummechanika szerint a

$$(\Delta \hat{n})_\alpha^2 = \langle \hat{n}^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{n} \rangle_\alpha^2 \quad (4.39)$$

szórásnégyzet négyzetgyöke adja. Az $\hat{n} = a^\dagger a$ segítségével:

$$(\Delta \hat{n})_\alpha^2 = \langle \alpha | (a^\dagger a)^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle^2 = \langle \alpha | a^\dagger (a^\dagger a + 1) a | \alpha \rangle - |\alpha|^4 = |\alpha|^2 \quad (4.40)$$

Vagyis koherens állapotban szórás négyzete éppen megegyezik a várható értékkel:

$$(\Delta \hat{n})_\alpha^2 = |\alpha|^2 = \langle \hat{n} \rangle_\alpha \quad (4.41)$$

Ugyanez a szokásos valószínűségi számítási technikával, az $a^\dagger a$ nélkül:

$$\langle \hat{n}^2 \rangle_\alpha = \sum_n n^2 |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-\lambda} \sum_n n^2 \frac{\lambda^n}{n!}. \quad (4.42)$$

Az összegben szereplő n^2 szorzót az eredeti összeg második deriváltjával lehet összefüggésbe hozni:

$$\lambda^2 = e^{-\lambda} \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_n n(n-1) \frac{\lambda^n}{n!} = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle = \langle n^2 \rangle - \lambda. \quad (4.43)$$

Azaz

$$\langle \hat{n}^2 \rangle_\alpha = \lambda^2 + \lambda = |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \langle \hat{n} \rangle_\alpha^2 + \langle \hat{n} \rangle_\alpha, \quad (4.44)$$

ami ismét a fönti (4.41) $(\Delta \hat{n})_\alpha^2 = |\alpha|^2 = \langle \hat{n} \rangle_\alpha$ eredményt adja.

A

$$\frac{(\Delta \hat{n})^2}{\langle \hat{n} \rangle} = 1 \quad (4.45)$$

kapcsolat a szórás és a várható érték között a *Poisson-eloszlásra* jellemző. Ezért ha valamilyen egyéb (nem koherens) állapotban:

$$\frac{(\Delta \hat{n})^2}{\langle \hat{n} \rangle} < 1 \quad (4.46)$$

akkor *szub-Poisson* állapotról beszélünk. Például ilyen az $|n\rangle$ számállapot, amelyre $\langle \hat{n} \rangle_n = n$ és $\Delta \hat{n} = 0$, lévén ez az $\hat{n}$ operátor sajátállapota. Fordítva, ha

$$\frac{(\Delta \hat{n})^2}{\langle \hat{n} \rangle} > 1 \quad (4.47)$$

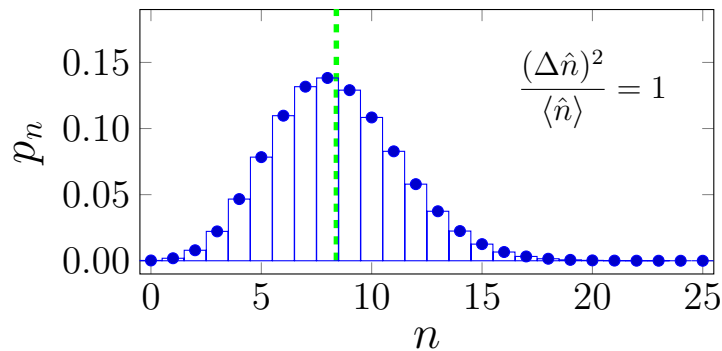
akkor *super-Poisson* állapotú a módus. Lásd részletesebben az 7 fejezetben szerelő 7.5 ábrán.

Megjegyezzük még, hogy egy tetszőleges módusállapotnak a Poisson eloszlástól való eltérését a fönti arány helyett szokás az ún. *Mandel féle Q_M paraméterrel* is jellemezni. Ennek definíciója:

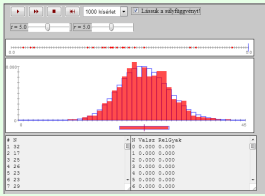
$$Q_M := \frac{(\Delta \hat{n})^2}{\langle \hat{n} \rangle} - 1. \quad (4.48)$$

Egy Poisson eloszlás esetén, tehát egy koherens állapotban is Q_M láthatóan eltűnik. Super-Poisson esetben a Mandel paraméter pozitív, míg szub-Poisson esetben negatív. Q_M minimális értéke -1 , amelyet számállapotok esetén kapunk, kivéve az $|n=0\rangle$ vákuumállapotot, amelyre Q_M nincs értelmezve.

Koherens állapot: $|\alpha| = \sqrt{8.4}$



4.1. ábra. Koherens állapotban a fotonszám eloszlásfüggvénye Poisson-eloszlást mutat

**Animáció:**

Valószínűségelméleti szempontból tanulhatunk a Poisson-eloszlás és a Poisson-folyamat kapcsolatáról ezen magyarra lefordított interaktív oktató animáció segítségével.

<http://nagysandor.eu/AsimovTeka/PoissonProcess/index.html>

4.5. Koherens állapotok belső szorzata, és (túl)teljessége

Tekintsük két koherens állapot belső szorzatát:

$$\begin{aligned} \langle \beta | \alpha \rangle &= \sum_n e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sum_m e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \frac{\beta^{*m}}{\sqrt{m!}} \underbrace{\langle m | n \rangle}_{\delta_{mn}} = \\ &= \sum_n \frac{(\alpha \beta^*)^n}{\sqrt{(n!)^2}} e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}} = e^{\alpha \beta^*} e^{-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Tehát

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = e^{\beta \alpha^* + \alpha \beta^* - |\alpha|^2 - |\beta|^2} = e^{-|\alpha - \beta|^2}. \quad (4.50)$$

Látható, hogy a koherens állapotok nem ortogonálisak, de ha a két komplex szám, az α és β a komplex síkon elég messze esik egymástól, akkor a belső szorzat jó közelítéssel 0.

Most megmutatjuk, hogy az $|\alpha\rangle$ állapotok túlteljes (overcomplete) rendszert alkotnak. Ez azt jelenti, hogy bármely állapot kifejezhető egy az $|\alpha\rangle$ állapotok szerinti „folytonos összegzéssel”, azaz integrálással (teljesség), de minthogy az $|\alpha\rangle$ -k száma nagyobb mint az egész számoké, (ezért is nem lehetnek ortogonálisak) egy túlságosan teljes rendszert alkotnak.

Az, hogy például az $|n\rangle$ állapotok rendszere teljes, azt jelenti, hogy tetszőleges $|\varphi\rangle$ állapotra vannak olyan c_n együtthatók, hogy $|\varphi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$. Ebből $\langle m |$ -el való szorzással $\langle m | \varphi \rangle = c_m$, és

$$|\varphi\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \varphi \rangle \quad \text{azaz} \quad \sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{I}, \quad (4.51)$$

ahol $\mathbb{I}$ az egységoperátor. A teljesség egy másik megfogalmazása tehát az, hogy a megfelelő egydimenziós projektorok összege a teljes térre vetítő operátor, azaz az egységoperátor. Az $|\alpha\rangle$ állapotok folytonos halmazára a teljesség analóg módon azt jelenti, hogy

$$\frac{1}{\pi} \int \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d(\text{Re } \alpha) d(\text{Im } \alpha) = \mathbb{I}. \quad (4.52)$$

Ezt az összefüggést olyan módon látjuk be, hogy visszavezetjük a számállapotok teljességére, és a fönti komplex síkra történő integrálban az $|\alpha\rangle$ állapotokat kifejtjük számállapotokon:

$$\frac{1}{\pi} \int \int e^{-|\alpha|^2} \sum_{m,n} \frac{\alpha^{*m}}{\sqrt{m!}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \langle m| d(\text{Re } \alpha) d(\text{Im } \alpha). \quad (4.53)$$

Áttérve az $|\alpha| = \varrho$, $\alpha = \varrho e^{i\varphi}$ változókra az integrál így írható:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\varrho^2} \varrho d\varrho \sum_{n,m} \varrho^{n+m} e^{i(n-m)\varphi} |n\rangle \langle m| \frac{1}{\sqrt{n!m!}} d\varphi \quad (4.54)$$

Most az

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{nm} \quad (4.55)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\varrho^2} \varrho^{2n+1} \cdot 2\pi d\varrho = n! \quad (4.56)$$

összefüggéseket és a számállapotok teljességét használva, a koherens állapotok teljességét kifejező (4.52) összefüggést nyerjük.

4.6. A koherens állapotok időfejlődése szabad térben

Az $|\alpha\rangle$ állapotok az alapállapottól eltekintve nem sajátállapotai a töltésektől mentes mező, azaz oszcillátor Hamilton operátorának, ezért a triviálistól különböző módon függenek az időtől. Fejtsük ki a koherens állapotokat egy adott időpillanatban a számállapotok szerint:

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle. \quad (4.57)$$

Abból, hogy minden állapot az időfüggő Schrödinger egyenlet szerint fejlődik, következik, hogy

$$|\alpha\rangle_t = \sum_n c_n(0) |n\rangle e^{-i\omega n t}, \quad (4.58)$$

$$|\alpha\rangle_0 =: |\alpha_0\rangle = \sum_n c_n |n\rangle. \quad (4.59)$$

Kihasználva most a kifejtési együtthatók korábban nyert alakját írhatjuk, hogy

$$|\alpha\rangle_t = \sum_n e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle e^{-i\omega n t} = \sum_n e^{-\frac{|\alpha(t)|^2}{2}} \frac{(\alpha(t))^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (4.60)$$

ahol $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$. Ez viszont, azt jelenti, hogy

$$|\alpha\rangle_t = |\alpha_0 e^{-i\omega t}\rangle. \quad (4.61)$$

4.7. Egy klasszikus forrás koherens állapotú mezőt kelt

Most megmutatjuk, hogy ha a módus eltüntető operátorára vonatkozó mozgásegyenletben, a 3 fejezet (3.84) összefüggésének kvantumoztatásában a mező forrásaként szereplő áramot klasszikusnak tekintjük, akkor a keltett módusállapot éppen egy koherens állapot. A mező egy módusának eltüntető

operátorára az említett formulából Heisenberg képben a következő mozgásegyenlet adódik (a képet jelző $_H$ indexet nem írjuk ki):

$$\dot{a} + i\omega a = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_0\hbar\omega V}} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \varepsilon e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r. \quad (4.62)$$

Itt most föltesszük, hogy a forrás klasszikus, az azt leíró $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ mennyiség nem operátor, és hogy azt egy külső forrás tartósan, a kisugárzott energiát pótolva táplálja. A mezőt viszont kvantumosan kezeljük, ennek megfelelően azt az a eltüntető operátor reprezentálja. Legyen kezdetben a mező módusának állapota a vákuum, s ez – mint tudjuk – Heisenberg képben minden időpillanatban azonos a kezdőállapottal:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi(t)\rangle_H = |0\rangle. \quad (4.63)$$

A mező későbbi állapotát végül majd Schrödinger képben adjuk meg, de a direkt eljárásnál jóval egyszerűbb, ha az (4.62) egyenletet előbb Heisenberg képben oldjuk meg, majd ezután térünk át Schrödinger képbe, és úgy határozzuk meg a $|\psi(t)\rangle_S$ állapotot.

Egyenletünk alakja tehát

$$\dot{a} + i\omega a = s, \quad (4.64)$$

ahol a módushoz tartozó klasszikus forrástagra, tehát (4.62) jobb oldalára itt röviden az s jelölést használtuk. (4.64) megoldása

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t} + \int_0^t dt' s(t') e^{-i\omega(t-t')}. \quad (4.65)$$

Itt az első tag jelenti a kvantumos mezőnek a forrástól független időbeli változását, a második pedig a klasszikus forrás által sugárzott mezőt, amely az egységoperátorral arányos. A fenti (4.64) differenciálegyenlet teljesen klasszikus

$$\dot{\alpha} + i\omega \alpha = s \quad (4.66)$$

változatának az α klasszikus amplitúdóra vonatkozó megoldása viszont

$$\alpha(t) = \int_0^t dt' s(t') e^{-i\omega(t-t')}, \quad (4.67)$$

hiszen azt tettük föl, hogy $t = 0$ -kor a mező vákuumállapotban van, azaz klasszikus mező nem lehet jelen, s így $\alpha(0) = 0$. A (4.67) megoldást a (4.65)-vel összevetve azt látjuk, hogy az ottani második tag éppen ez az $\alpha(t)$, azaz

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t} + \alpha(t). \quad (4.68)$$

Alkalmazzuk ezt az $a(t)$ operátort a $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ kezdőállapotra, ez utóbbi a rendszer állapota a Heisenberg képben tetszőleges időpontban. Mivel az eltüntető operátor a vákuumot kinullázza, $a(0)|0\rangle = 0$, kapjuk, hogy

$$a(t)|\psi(0)\rangle = \alpha(t)|\psi(0)\rangle. \quad (4.69)$$

Térjünk most át a Schrödinger képbe. Alkalmazzuk a fenti egyenlet mindkét oldalára az $U(t, 0) \equiv U$ evolúciós operátort, továbbá szűrjük be az $U^\dagger U$ egységoperátort a baloldalra. Kapjuk, hogy

$$U a(t) U^\dagger U |\psi(0)\rangle = \alpha(t) U |\psi(0)\rangle. \quad (4.70)$$

Itt $U |\psi(0)\rangle = |\psi(t)\rangle_S$ illetve $Ua(t)U^\dagger = a_S$, azaz Schrödinger képben

$$a_S |\psi(t)\rangle_S = \alpha(t)_S |\psi(t)\rangle_S. \quad (4.71)$$

Eszerint a mező kvantumállapota tetszőleges időpontban az eltüntető operátor sajátvektora az $\alpha(t) = \int_0^t dt' s(t') e^{-i\omega(t-t')}$ komplex függvénynek megfelelő aktuális sajátértékkal. Ez azt jelenti, hogy a klasszikus forrás által keltett mező állapota a t időpillanatban egy ilyen $\alpha(t)$ paraméterű koherens állapot:

$$\left| \alpha(t) = \int_0^t dt' s(t') e^{-i\omega(t-t')} \right\rangle. \quad (4.72)$$

Megmutattuk tehát, hogy egy klasszikusnak tekinthető áram koherens állapotú mezőt kelt, melynek $\alpha(t)$ paraméterét a (4.72) formula adja meg, ahol az $s(t)$ függvény az (4.62) egyenlet jobb oldalával egyezik meg. Ilyen mezőt várhatunk egy stabil folytonos üzemű kis sáv szélességen működő gázlézertől.

4.8. A koherens állapotok mint a vákuum eltolásai

Most a koherens állapotok egy másik lehetséges definícióját adjuk meg. Vezessük be az úgynevezett eltolási (displacement) operátort a

$$D(\alpha) := e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}. \quad (4.73)$$

definícióval. A $D(\alpha)$ operátor unitér:

$$D^\dagger(\alpha) D(\alpha) = D(\alpha) D^\dagger(\alpha) = \mathbb{1}, \quad (4.74)$$

ami abból látható, hogy

$$D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha). \quad (4.75)$$

Az operátor neve arra utal, hogy hatására az $|\alpha = 0\rangle = |0\rangle$ vákuumállapot eltolódik az $|\alpha\rangle$ koherens állapotba:

$$D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle. \quad (4.76)$$

A fenti (4.76) egyenlőség igazolására tekintsük a Baker-Campbell-Hausdorff azonosságot (l. alább a 4.10 szakaszban a (4.104) tételt), mely szerint, ha $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, akkor:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \quad (4.77)$$

Legyen:

$$A = \alpha a^\dagger, \quad B = -\alpha^* a. \quad (4.78)$$

$$[A, B] = -|\alpha|^2 \underbrace{[a^\dagger, a]}_{-1} = |\alpha|^2 \quad (4.79)$$

Így:

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \quad (4.80)$$

$$D(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} \left(1 - \alpha^* a + \frac{(\alpha^* a)^2}{2!} + \dots \right) |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle = \quad (4.81)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \left(\alpha^0 |0\rangle + \alpha |1\rangle + \frac{\alpha^2}{2!} \sqrt{2!} |2\rangle + \dots \right) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (4.82)$$

ahol a keltő operátorokra vonatkozó $(a^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle$ formulát használtuk.

Egy további érdekes tulajdonság, hogy a D operátor az a operátorokon is eltolásként hat a következő értelemben:

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha. \quad (4.83)$$

Ennek kimutatására használjuk a szintén a fejezet végén bizonyítandó (4.93) $e^A B e^{-A} = B + [A, B]$ operátorazonosságot az

$$A = \alpha^* a - \alpha a^\dagger, \quad B = a \quad (4.84)$$

operátorokkal, melyek kommutátora az egységoperátorral arányos. Így kapjuk, hogy

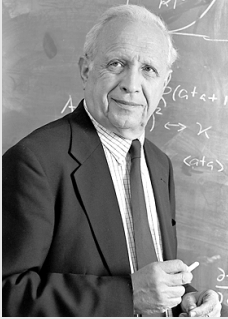
$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + [\alpha^* a - \alpha a^\dagger, a] = a + \alpha \quad (4.85)$$

Hasonlóan:

$$D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^* \quad (4.86)$$



Olvasnivaló:



A koherens állapotok használatát Roy Glauber vezette be a fotonok leírására. Az alábbi linken megtalálható R. Glauber előadása angol nyelven, amelyet a 2005-ös Nobel díj átadáson tartott, One Hundred Years of Light Quanta címmel.

http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2005/glauber-lecture.html

4.9. A koherens állapotok szemléltetése a fázistéren

Tekintsük ismét a dimenziótlan X és Y önadjungált kvadratúra operátorokat az

$$X := \frac{a + a^\dagger}{2} \quad Y := \frac{a - a^\dagger}{2i} \quad (4.87)$$

definícióval. Az egyetlen szinuszos állóhullám módus kvantálásánál az X éppen az elektromos mező Y pedig a mágneses mező operátorával arányos, míg ha megtartjuk ugyanezt a definíciót, de a haladó hullámokra vonatkozó konvenciót használjuk, akkor az X és Y kapcsolata a mező elektromos illetve mágneses részével a (4.1) formulából láthatóan függ a helytől.

4.1 Feladat: A $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \pi/2 =: \phi_i(\mathbf{r}, t)$ definícióval vezessük be a módus fázisát. Mutassuk meg hogy ekkor haladó hullámú kvantálásnál az elektromos mező $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_i \mathcal{E}_{\omega_i} \boldsymbol{\epsilon}_i (a_i(0) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t} - a_i^\dagger(0) e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} + i\omega t})$ operátora az

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i 2\mathcal{E}_{\omega_i} \boldsymbol{\epsilon}_i (X_i \cos \phi_i + Y_i \sin \phi_i)$$

alakba írható.

Egyetlen módus esetén az X és Y fölcserélési relációja az $[a, a^\dagger] = 1$ kommutátorból következően:

$$[X, Y] = \frac{i}{2} \quad (4.88)$$

A szórásaikra vonatkozóan a mező tetszőleges ψ állapotában így fönnáll a Heisenberg egyenlőtlenség:

$$(\Delta X)_\psi (\Delta Y)_\psi \geq \frac{1}{4} \quad (4.89)$$

Legyen az $|\alpha\rangle$ koherens állapotot indexelő α komplex szám alakja:

$$\alpha = x + iy. \quad (4.90)$$

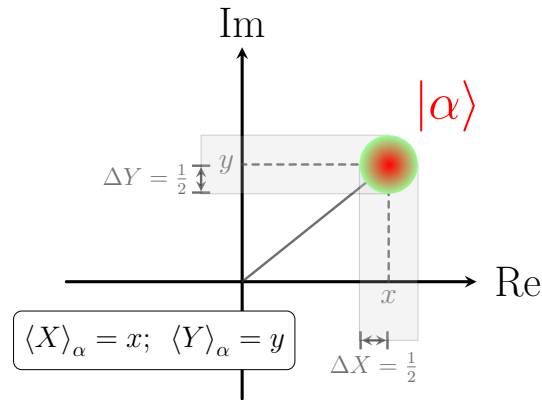
Ha kiszámítjuk az X és Y várható értékét egy $|\alpha\rangle$ állapotban az eredmény egyszerűen láthatóan

$$\langle \alpha | X | \alpha \rangle = x, \quad \langle \alpha | Y | \alpha \rangle = y \quad (4.91)$$

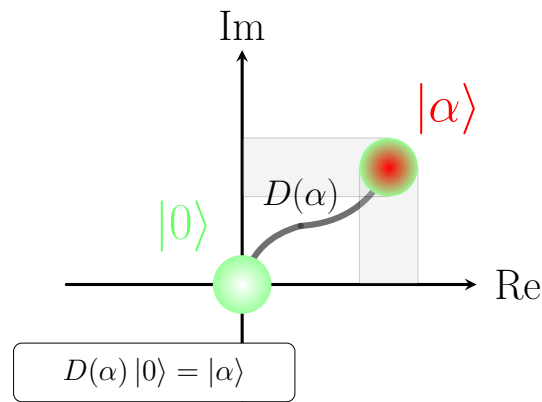
míg a szórásnégyzetükre α tól függetlenül a

$$(\Delta X)_\alpha^2 = \langle \alpha | (X - x)^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{4}, \quad (\Delta Y)_\alpha^2 = \langle \alpha | (Y - y)^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{4} \quad (4.92)$$

értékek adódnak. A szórássok értéke mindkét kvadratúrára egyformán $\frac{1}{2}$, és ebből is láthatóan a koherens állapotok minimalizálják a Heisenberg egyenlőtlenséget, amely ezeken az állapotokon egyenlőségbe megy át. A koherens állapotok tehát az X és Y szempontjából úgynevezett intelligens állapotok. Emiatt az $|\alpha\rangle$ állapotot szokás úgy szemléltetni a komplex α számok síkján, hogy pontként jelöljük meg az α síkon az x valós és y képzetes részű számot, majd eköré egy $\frac{1}{2}$ sugarú kört rajzolunk. Ez arra utal, hogy ebben az állapotban mérve az X illetve az Y operátort, a mérési eredmények az x illetve az y körül szóródnak és a mért eredmények eloszlását az $1/2$ szóráss jellemzi.



4.2. ábra. A koherens állapot szemléltetése a komplex számsíkon.

4.3. ábra. A $D(\alpha)$ eltolási (displacement) operátor hatásának szemléltetése a komplex számsíkon vákuum állapotra

4.2 Feladat: A koherens állapot időfejlődésének $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$ képlete alapján mutassuk meg hogy a koherens állapot időfejlődése során az $|\alpha|$ modulusú komplex számot jelző vektor ω szögsebességgel forog az origó körül a komplex számsíkon, míg a szórást jellemző kör mérete változatlan, és követi a kör középpontjának mozgását.

A következő fejezetben látni fogjuk, hogy ez az intuitív kép egzaktta tehető az állapothoz tartozó úgynevezett Wigner-függvény segítségével.

4.3 Feladat: A 2. fejezet végén jeleztük a módus állapotának jellemzését a $\langle x | \psi \rangle =: \psi(x)$ valószínűségi amplitúdóval (hullámfüggvénnyel). Mutassuk meg, hogy egy $|\alpha_0 = x_0 + iy_0\rangle$ koherens állapot esetén ez a hullámfüggvény $\psi_\alpha(x) = C e^{-(x-x_0)^2} e^{iy_0 x}$, ahol C ugyanaz a normálási állandó, ami az $x_0 = 0, y_0 = 0$ alapállapothoz is tartozik.

Az alábbi animációkon koherens állapotokat szemléltető hullámfüggvények időbeli változását mutatjuk, ez megfelel az elektromos mező időbeli változásának a geometriai tér egy pontjában. Emlékeztetünk arra, hogy az $|x_0 + iy_0\rangle$ állapot időben a $|(x_0 + iy_0)e^{-i\omega t}\rangle$ formula szerint változik.



Animáció:

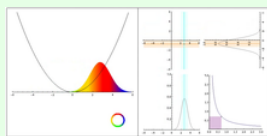


Az animáción a módus $|\alpha = 1\rangle$ koherens állapotát szemléltető hullámfüggvény időfejlődése látható. A függvény az elektromos térerősség nagyságának függvényében annak valószínűségi amplitúdóját ábrázolja. A függvény abszolút értékének alakja azonos az $|n = 0\rangle$ vákumállapothoz tartozó hullámfüggvény alakjával (lásd 2 fejezet végén), de ω körfrekvenciával rezeg az egyensúlyi helyzet körül. A szín a komplex valószínűségi amplitúdó fázisát kódolja.

http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/video/Harmonikus_oszcillator_koherens_allapota_1.flv



Animáció:

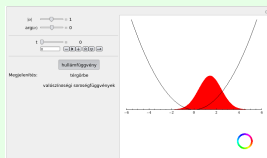


Az animáción a módus $|\alpha = 2\rangle$ koherens állapotát szemléltető hullámfüggvény időfejlődése látható. A függvény az elektromos térerősség nagyságának függvényében annak valószínűségi amplitúdóját ábrázolja. A függvény abszolút értékének alakja azonos az $|n = 0\rangle$ vákumállapothoz tartozó hullámfüggvény alakjával (lásd 2 fejezet végén), de ω körfrekvenciával rezeg az egyensúlyi helyzet körül. A szín a komplex valószínűségi amplitúdó fázisát kódolja.

http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/video/Harmonikus_oszcillator_koherens_allapota_2.flv



Animáció:



Az interaktív animáció segítségével a módus kohres állapotait vizsgálhatjuk.

<http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/interactive/HarmonikusOszcillatorKoherensAllapot.nbp>

4.10. Két operátorazonosság

Ebben a függeléknek szánt szakaszban két olyan – operátorokra vonatkozó – hasznos matematikai azonosságot mutatunk meg, amelyeket ebben a fejezetben használtunk, és amelyekre a későbbiekben is hivatkozni fogunk.

1. azonosság:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (4.93)$$

Bizonyítás:

Tekintsük az $F(t) = e^{At} B e^{-At}$ operátort, ahol t egy valós paraméter. Fejtsük $F(t)$ -t MacLaurin sorba:

$$F(t) = \sum_k \frac{d^k F(t)}{dt^k} \Big|_{t=0} \frac{t^k}{k!}; \quad F(0) = B. \quad (4.94)$$

$$\frac{dF}{dt} = AF - FA = [A, F], \quad t = 0 : \quad \frac{dF}{dt} \Big|_{t=0} = [A, B]. \quad (4.95)$$

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = A[A, F] - [A, F]A = [A, [A, F]], \quad t = 0 : \quad \frac{d^2 F}{dt^2} \Big|_{t=0} = [A, [A, B]]. \quad (4.96)$$

...

Így

$$F(t) = B + [A, B]t + \frac{t^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots, \quad (4.97)$$

amiből $t = 1$ -re kapjuk a bizonyítandó összefüggést.

Speciális esetben, ha $[A, [A, B]] = 0$ akkor,

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B]. \quad (4.98)$$

2. A Baker-Campbell-Hausdorff azonosság:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]} = e^B e^A e^{-\frac{1}{2}[B, A]} \quad (4.99)$$

ha

$$[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0. \quad (4.100)$$

Bizonyítás:

Tekintsük a $G(t) = e^{At} e^{Bt}$ függvényt, és deriváljuk t szerint:

$$\frac{dG}{dt} = AG + GB = AG + e^{At} e^{Bt} B = AG + e^{At} B e^{-At} e^{At} e^{Bt} = \quad (4.101)$$

$$= AG + e^{At} B e^{-At} G = (A + B + [A, B]t) G \quad (4.102)$$

Ahol az utolsó egyenlőségénél használtuk az előző (4.93) azonosságot, és kihasználtuk a kettős kommutátorok eltűnését. Ezt integrálva:

$$G(t) = e^{(A+B)t + \frac{1}{2}t^2[A, B]} G(0). \quad (4.103)$$

Figyelembe véve, hogy $G(0) = 1$, a $t = 1$ helyen véve a fenti egyenlőséget kapjuk a bizonyítandó képletet:

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A, B]}. \quad (4.104)$$

Ellenőrző kérdések

1. Mennyi a mező-operátorok várható értéke a fotonszám állapotokban?
2. Hogyan regularizálhatjuk a mező-operátorok szórását a számállapotokban?
3. Milyen előírások vezetnek a koherens állapot fogalmához?
4. Hogyan fejthetők ki a koherens állapotok a számállapotok bázisán?
5. Milyen eloszlást követ a fotonszám mérése koherens állapotban?
6. Mennyi a fotonszám várható értéke és szórása koherens állapotban?
7. Ortogonálisak-e a különböző koherens állapotok?
8. Mit jelent a koherens állapotok túlteljessége?
9. Hogyan fejlődnek időben a koherens állapotok szabad térben?
10. Hogyan definiáljuk az eltolási operátort?
11. Mit jelent a fázistér egy optikai módus esetén?
12. Hogyan szemléltetünk egy koherens állapotot a fázistéren?

5. fejezet

A mező keverék állapotai

Ha a mező egy vagy több módusa a környezetével termikus egyensúlyban van, akkor – mint általában egy nyílt kvantumrendszer – már nem jellemezhető egyetlen állapotvektorral, azaz állapota nem egy tiszta állapot. A kvantumrendszer tiszta állapota – amelyet egyetlen $|\varphi\rangle$ Hilbert térbeli vektorral adunk meg – tudniillik azt jelenti, hogy a kvantummechanika által egyáltalán hozzáférhetővé tett minden információnk megvan az állapotról, azaz elvégeztük rajta fölcserélhető operátorok egy teljes rendszerének megfelelő összes fizikai mennyiség mérését. Mindazonáltal a megfelelő Hilbert térbeli vektor ekkor még mindig csak egy számmal való szorzás erejéig van meghatározva, (amely normált állapot esetén egységnyi abszolút értékű), mert egy ilyen szorzás nem változtat azon, hogy ez az állapot mely operátorok sajátállapota. Eszerint tehát a $|\varphi\rangle$ és az $e^{i\beta} |\varphi\rangle$ vektor, valós β -val, ugyanazt a normált állapotot adja meg. Azoknak vektoroknak a halmazát, amelyek csak egy ilyen $e^{i\beta}$ szorzóban különböznek egymástól – és így a hosszuktól eltekintve valójában egy egydimenziós alteret jelentenek – a $\mathcal{H}$ tér egy “sugarának” szokás nevezni. Világos, hogy egy sugár és a neki megfelelő altérre vetítő projekciós operátor egyértelműen meghatározza egymást, így egy tiszta állapotot valójában egy $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ egydimenziós projekcióval, illetve az ennek megfelelő sugárral adunk meg.

5.1. A sűrűségoperátor

Van olyan eset azonban, amikor nem tudjuk pontosan, hogy milyen vektor jellemzi az állapotot, azt mégis matematikailag jellemezni akarjuk. Ez egy úgynevezett keverék állapot, amelyet a tiszta esetet jellemző

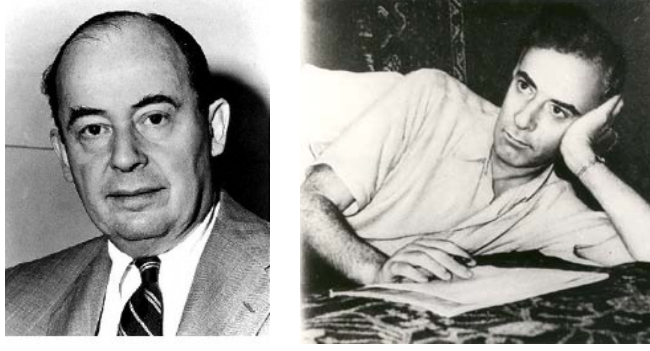
$$\hat{\rho} = |\varphi\rangle\langle\varphi| \quad (5.1)$$

projekció helyett az ennél általánosabb

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad (5.2)$$

operátorral adunk meg, ahol $|\varphi_i\rangle$ -k egy $\mathcal{H}$ Hilbert tér elemei, amelyek *nem föltétlenül ortogonálisak*, de *normáltaknak* választjuk őket, és

$$0 \leq w_i \leq 1, \quad \sum_i w_i = 1 \quad (5.3)$$



5.1. ábra. Neumann János (1903 - 1957) és Lev Davidovics Landau (1908 - 1968). További érdekes képek és olvasnivalók a BME OMIKK Tudomány- és technikatörténeti archívumában: <http://www.omikk.bme.hu/archivum/neumann/htm/neumannindex.htm> illetve a Természetvilága archívumában: <http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2008/tv0805/solt.html>

Az ilyen w_i számokkal képzett (5.2) típusú formulát a $|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ egydimenziós projekciók *konvex* lineáris kombinációjának nevezzük, és a definícióban w_i annak a valószínűségét jelenti, hogy a rendszer az i -edik $|\varphi_i\rangle$ tiszta állapotban van. Ha csak egyetlen w nem nulla, akkor az szükségképpen 1, és akkor (5.2) éppen egy tiszta állapotot ad meg, ellenkező esetben az állapotot *keveréknek*, vagy *kevert állapotnak* nevezzük. A $\hat{\rho}$ neve *sűrűségoperátor*, néha W -vel jelölik, Neumann János illetve Lev Landau vezették be ezt a fogalmat. Látni fogjuk, hogy tipikusan akkor használjuk, ha egy rendszer egy másik, nagyobb rendszer *részrendszere*.

A $\hat{\rho}$ önadjungált operátor, ez látható a definícióból. Egy további tulajdonsága $\hat{\rho}$ -nak az, hogy pozitív (nemnegatív) operátor, ami azt jelenti, hogy tetszőleges $|\psi\rangle$ esetén $\hat{\rho}$ várható értéke nemnegatív:

$$\langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle \geq 0 \quad (5.4)$$

hiszen

$$\langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle = \sum_i w_i \langle\psi|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\psi\rangle = \sum_i w_i |\langle\psi|\varphi_i\rangle|^2 \geq 0. \quad (5.5)$$

Ebből látható hogy $\hat{\rho}$ várható értéke akkor és csak akkor 0, ha ψ valamennyi előforduló φ_i -re ortogonális.

Számítsuk ki valamely diszkrét ortonormált $|v_k\rangle$ bázisban a $\hat{\rho}$ nyomát (spur, trace):

$$\text{Tr}\hat{\rho} = \sum_k \sum_i w_i \langle v_k|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|v_k\rangle = \sum_i \sum_k |\langle v_k|\varphi_i\rangle|^2 = 1. \quad (5.6)$$

$\hat{\rho}$ tehát egy un. *trace-class operátor* (trace-osztályú operátor), mert a nyoma véges, és a nyom értéke éppen 1. Megmutatható ld. Neumann J. könyvét [1], hogy ekkor a spur független a bázistól, és $\hat{\rho}$ -nak *pontspektruma* van. Ekkor pedig a véges dimenziós esethez hasonlóan létezik olyan *diszkrét*, ortonormált $|u_i\rangle$ bázis, amely $\hat{\rho}$ sajátvektoraiból áll, amelyben tehát a sűrűségoperátor diagonális, tehát szigorúan érvényes rá a spektráltétel:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |u_i\rangle\langle u_i|. \quad (5.7)$$

Az $|u_i\rangle$ bázis nem föltétlenül egyértelmű, mert a p_i sajátértékek általában degeneráltak is lehetnek. Figyeljük meg, hogy a diagonalizált alak hasonló ahhoz, ami a (5.2) definícióban szerepel, de itt az $|u_i\rangle$

állapotok általában mások mint az ott szereplő és nem föltétlenül ortogonális $|\varphi_i\rangle$ -k, és így a p_i -k sem azonosak a w_i számokkal. A $\hat{\rho}$ pozitív volta miatt a p_i sajátértékek is mind nemnegatívak. Mivel a spur, ha létezik, akkor független a az ortonormált bázistól amiben kiszámítjuk, azaz invariáns, így ha éppen a sajátbázisban számítjuk ki, akkor láthatóan

$$\sum_i p_i = 1 \quad (5.8)$$

adódik. Ebből és a p_i -k nemnegatív voltából következik, hogy $0 \leq p_i \leq 1$. Ha az állapot tiszta, akkor nyilván csak egyetlen p_i nem nulla, és akkor az szükségképpen 1, míg a többi sajátvektor a 0 sajátértékhez tartozik, amely a kétdimenziós eset kivételével ilyenkor degenerált, és az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektorra ortogonális altérben elvben tetszőlegesen választható. Valójában ilyenkor, tiszta állapotról lévén szó, nincs is szükség a sűrűségoperátorra. Ez utóbbi esetben a $\hat{\rho}$ projekció, s így nyilvánvalóan idempotens, hiszen $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$, ami miatt:

$$\text{tiszta állapotban} \quad \text{Tr} \hat{\rho}^2 = \text{Tr} \hat{\rho}, \quad \text{azaz} \quad \text{Tr} \hat{\rho}^2 = 1 \quad (5.9)$$

Ez utóbbi egyenlőséget azért írtuk föl, mert a $\hat{\rho}$ ismeretében éppen ezen tulajdonság alapján dönthetjük el egyszerűen, hogy az egy tiszta vagy kevert állapotot ad-e meg. Ugyanis általában

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2 \leq 1, \quad (5.10)$$

és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\hat{\rho}$ tiszta állapotot jellemez. Ez a következőléppen látható be. A négyzetreemelés és a spur a $\hat{\rho}$ sajátbázisában számolva

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2 = \sum_i p_i^2 \quad (5.11)$$

ugyanakkor

$$1 = (\text{Tr} \hat{\rho})^2 = \left(\sum_i p_i \right)^2 = \sum_i p_i^2 + \sum_{i < j} 2p_i p_j \geq \sum_i p_i^2 = \text{Tr} \hat{\rho}^2, \quad (5.12)$$

mert a $p_i p_j$ szorzatok nemnegatívak (és egynél kisebbek). Világos, hogy egyenlőség csak akkor van, ha csak egyetlen pozitív (nem nulla) sajátérték van, ami ilyenkor szükségképpen 1. Ha egynél több pozitív p_i sajátérték van, akkor a kétszeres szorzatok között lesz olyan, amelyik nem nulla, így annak elhagyása csökkenti az összeget, azaz ha $\text{Tr} \hat{\rho}^2 = 1$. Összefoglalva tehát az állapot akkor és csak akkor tiszta, ha $\text{Tr} \hat{\rho}^2 = 1$, a $\text{Tr} \hat{\rho}^2 < 1$ esetben viszont keverék.

5.2. Várható érték keverék állapotban, redukált sűrűségmátrix

Egy $|\varphi\rangle$ tiszta állapotban az A operátorral megadott fizikai mennyiség várható értékét a $\langle \varphi | A | \varphi \rangle$ képlettel számítjuk ki. A $\hat{\rho} = \sum_i w_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$ állapotban a megfelelő súlyokkal képezzük az egyes $|\varphi_i\rangle$ állapotokban vett várható értékeket és ezzel azonosítjuk az A várható értékét, azaz:

$$\langle A \rangle_{\hat{\rho}} = \sum_i w_i \langle \varphi_i | A | \varphi_i \rangle. \quad (5.13)$$

Ez utóbbi formulát egy másik fontos alakba írhatjuk, ha a $|\varphi_i\rangle$ vektorokat kifejtjük egy tetszőleges $|v_k\rangle$ ortonormált bázisban $|\varphi_i\rangle = \sum_k |v_k\rangle\langle v_k| \varphi_i\rangle$, amiből

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} w_i \langle \varphi_i | v_j \rangle \langle v_j | A | v_k \rangle \langle v_k | \varphi_i \rangle &= \sum_{jk} \langle v_k | \sum_i w_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| v_j \rangle \langle v_j | A | v_k \rangle = \\ &= \sum_{jk} \hat{\varrho}_{kj} a_{jk} = \text{Tr}(\hat{\varrho}A) = \text{Tr}(A\hat{\varrho}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Legyen egy nagy rendszer a $|\Psi\rangle$ tiszta állapotban és tegyük föl, hogy ennek egy kis részrendszere érdekel minket, amely a környezetével együtt adja a teljes zárt rendszert. Ekkor a teljes rendszer állapota a két részrendszer tenzori szorzatterében van, és kifejthető a részrendszer ($\mathcal{S}$) valamely $|\psi_i\rangle$ és a környezet ($\mathcal{E}$) $|v_j\rangle$ ortonormált bázisában, azaz

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |\psi_i\rangle |v_j\rangle. \quad (5.15)$$

A normáltság miatt itt $\sum_{ij} |c_{ij}|^2 = 1$. Előfordulhat, hogy $|\Psi\rangle$ a két részrendszer $\mathcal{S}$ és $\mathcal{E}$ egy-egy tiszta állapotának tenzori szorzata: $|\Psi\rangle = |\psi\rangle_{\mathcal{S}} |\phi\rangle_{\mathcal{E}}$, azaz egy úgynevezett szorzat állapot. De általában nem ez a helyzet, olyankor összefonódott állapotokról beszélünk. A teljes zárt rendszer tiszta állapotának sűrűségoperátora:

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{ij} c_{ij} |\psi_i\rangle |v_j\rangle \sum_{kl} c_{kl}^* \langle\psi_k| \langle v_l|. \quad (5.16)$$

De tegyük föl, hogy a környezet nem érdekel minket részleteiben, ekkor nincs más lehetőség mint, hogy kiátlagolunk a környezet állapotaira, oly módon hogy képezzük a $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ projekció *parciális spurját* (részleges nyomát) az alábbi módon:

$$\text{Tr}_{\mathcal{E}}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_n \langle v_n | \Psi\rangle\langle\Psi | v_n \rangle = \sum_n \sum_{ij} \sum_{kl} c_{ij} c_{kl}^* \delta_{nj} \delta_{nl} |\psi_i\rangle\langle\psi_k| = \quad (5.17)$$

$$= \sum_n \sum_{ik} c_{in} c_{kn}^* |\psi_i\rangle\langle\psi_k| = \hat{\varrho}_{\mathcal{S}}. \quad (5.18)$$

Bevezetve az $\mathcal{S}$ -beli

$$|\varphi_n\rangle = \sum_i c_{in} |\psi_i\rangle \frac{1}{\sqrt{\sum_i |c_{in}|^2}} \quad (5.19)$$

normált állapotokat (5.18) a

$$w_n := \sum_i |c_{in}|^2 \quad (5.20)$$

jelöléssel a

$$\hat{\varrho}_{\mathcal{S}} = \sum_n w_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n| \quad (5.21)$$

formulát eredményezi. Ez a $\hat{\varrho}_{\mathcal{S}}$ láthatólag már csak az $\mathcal{S}$ részrendszerre jellemző úgynevezett *redukált sűrűségoperátor*, amely általában nem írható $|\phi\rangle\langle\phi|$ alakba, mert ehhez az kellene, hogy $|\phi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle$ miatt $|\phi\rangle\langle\phi| = \sum_{ik} a_i a_k^* |\psi_i\rangle\langle\psi_k|$ -ban $a_i a_k^* = \sum_n c_{in} c_{kn}^*$ teljesüljön minden i -re és k -ra, ami n^2 db föltétel teljesülését kívánja az n db ismeretlenre az a_i -kre, és ezeket nem lehet egyszerre teljesíteni. Így általában redukált sűrűségmátrix keverék.

5.1 Feladat: Mutassuk meg, hogy a redukált sűrűségmátrix akkor és csak akkor jellemez tiszta állapotot, ha a kiinduló állapot nem összefonódott.

Éppen ezért a rendszer és környezet egy összefonódottsági mértékének egyik lehetséges jellemzője a redukált sűrűségmátrixból megkapható: $S_L = 1 - \text{Tr} \hat{\rho}_S^2$ mennyiség, amelyet a részrendszer *lineáris entrópiájának* nevezünk. Egy másik lehetőség az $S_N = -\text{Tr}(\hat{\rho}_S \log \hat{\rho}_S) = -\sum_i p_i \log p_i$ *Neumann-entrópia* (Shannon-entrópia), ahol p_i -k a $\hat{\rho}_S$ sajátértékei, és amely szintén 0, ha a $\hat{\rho}_S$ tiszta állapotnak felel meg, egyébként viszont pozitív.

5.3. Időfejlődés

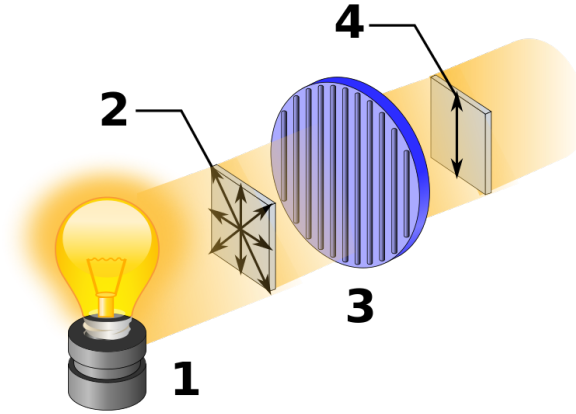
Föltesszük, hogy a rendszer egyes $|\varphi_j\rangle$ tiszta állapotai valamely H Hamilton operátor hatására a Schrödinger egyenletnek megfelelően fejlődnek időben, azaz minden j -re $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi_j\rangle = H |\varphi_j\rangle$, a w_j súlyok viszont nem változnak, ekkor $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|) = H |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| - |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| H$, s így

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [H, \hat{\rho}], \quad (5.22)$$

amit Neumann- (von-Neumann-) egyenletnek szokás hívni. A Neumann-egyenlet ebben a formában a Schrödinger-képben érvényes, Heisenberg-képben az állapotot leíró sűrűségoperátor nem függ az időtől, viszont a fizikai mennyiségeket jellemző operátorok időfüggőek lesznek.

5.4. Kétállapotú rendszer

A legegyszerűbb nemtriviális példa a sűrűségoperátorra a már a klasszikus optikából is ismert – és alább részletesen tárgyalandó – polarizálatlan vagy csak részben polarizált fény esete, ahol nincs teljesen meghatározott polarizációs állapot. A kvantumos jelleg itt abban nyilvánul meg, hogy most polarizált fotonról beszélünk, azaz a polarizációs állapotot egyetlen részecskére vonatkoztatjuk. Első példaként ezt a viszonylag egyszerű, de az alkalmazások pl. a kvantuminformatika szempontjából nagyon fontos kétállapotú rendszert tárgyaljuk, amely egy speciális reprezentánsa az úgynevezett kvantumbitnek, azaz egy olyan fizikai objektumnak, amelynek tiszta állapotai egy kétdimenziós komplex Hilbert-tér elemeivel – pontosabban sugaraival egyeznek meg. Válasszunk a kétdimenziós Hilbert-térben két bázisvektort legyenek ezek $|+\rangle$ és $|-\rangle$.



5.2. ábra. Fotonok polarizációját vizsgálva az (1) izzólámpa (2) teljesen véletlen polarizációval bocsát ki fotonokat, amelyek sűrűség operátorát $\hat{\rho} = 1/2 |n_+\rangle\langle n_+| + 1/2 |n_-\rangle\langle n_-|$ módon reprezentálhatjuk. Egy függőlegesen beállított (3) polarizátoron áthaladva a foton függőlegesen polarizált tiszta állapotba kerül, melynek állapotát a $\hat{\rho} = |n_+\rangle\langle n_+|$ sűrűségoperátor írja le. Itt $|n_\pm\rangle$ a vízszintes és függőleges polarizációs irányhoz tartozó bázist jelöli. **Forrás:** http://en.wikipedia.org/wiki/File:Vertical_polarization.svg

Fotonok polarizációja esetén bázisállapotoknak rendszerint a pozitív illetve negatív helicitású foton-állapotokat választjuk, de lehetnek ezek pl. a függőleges és a vízszintes polarizációs irányok is. Feles spin, mint kétállapotú rendszer esetén pedig valamely fizikai mennyiség (pl. mágneses mező) által kijelölt irányba mutató impulzusnyomaték vetület $|+\rangle$ illetve $|-\rangle$ sajátállapotai, rendszerint ezt választjuk z irányának, azaz $S_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$. A sűrűségoperátor általános alakja ebben a kétdimenziós térben:

$$\hat{\varrho} = \varrho_{++} |+\rangle\langle +| + \varrho_{--} |-\rangle\langle -| + \varrho_{+-} |+\rangle\langle -| + \varrho_{-+} |-\rangle\langle +|, \quad (5.23)$$

ahol az önadjungáltság miatt a következőknek kell teljesülnie: ϱ_{++} és ϱ_{--} valós, $\varrho_{+-} = \varrho_{-+}^*$, s ezen túlmenően $\varrho_{++} + \varrho_{--} = 1$ a spurra vonatkozó kikötés miatt. Vezessük be a

$$\varrho_{++} - \varrho_{--} = s_3, \quad \varrho_{+-} + \varrho_{-+} = s_1, \quad i(\varrho_{+-} - \varrho_{-+}) = s_2 \quad (5.24)$$

jelöléseket, akkor egyszerűen láthatóan a $\hat{\varrho}$ mátrixa a $|+\rangle, |-\rangle$ bázisban

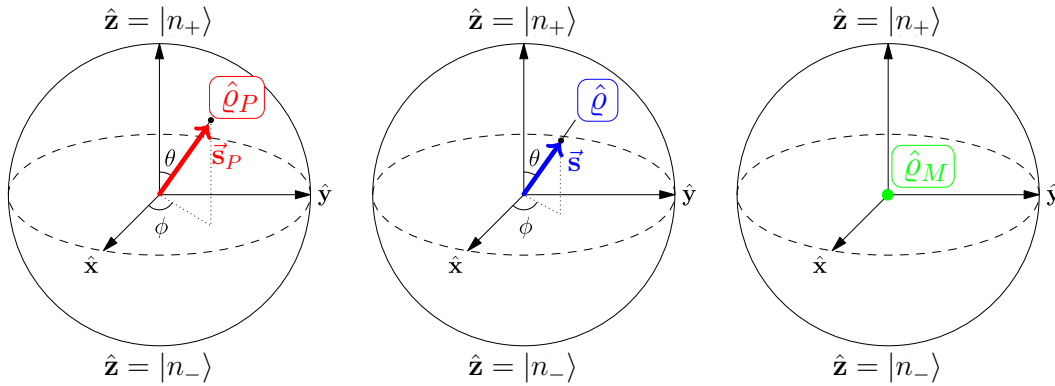
$$\varrho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & 1 - s_3 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Ezt másképp írva $\varrho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma})$, ahol $\vec{\sigma}$ a három Pauli mátrixot jelenti. Magát a $\hat{\varrho}$ operátort pedig írhatjuk a $\hat{\varrho} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{\sigma} \cdot \langle \hat{\sigma} \rangle)$ alakba is, ahol $\hat{\sigma}$ a Pauli mátrixoknak megfelelő operátorokat jelöli, vagyis

$$\hat{\sigma}_1 = |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|, \quad \hat{\sigma}_2 = -i(|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|), \quad \hat{\sigma}_3 = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|. \quad (5.26)$$

Láthatóan a spur valóban 1, míg $\text{Tr} \varrho^2 = \frac{1}{2}(1 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{2}(1 + s^2)$, ahol

$$s^2 := s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leq 1 \quad (5.27)$$



5.3. ábra. Kétállapotú rendszer esetén a $\hat{\rho}$ keverék állapot egy egységsugarú gömb (Bloch-gömb) segítségével szemléltethető. Az első ábrán a gömb felszínét elérő (piros) $\vec{s}_P$ polarizáció fok vektor egy $\hat{\rho}_P$ teljesen polarizált (tiszt) állapotot ír le. A második ábrán az $\vec{s}$ (kék) polarizáció fok vektor már nem éri el a gömb felszínét, ez egy $\hat{\rho}$ keverék állapotot ír le. A harmadik ábrán az origóban lévő (zöld) pont a teljesen kevert $\hat{\rho}_M = \frac{1}{2} \mathbb{I}$ állapotot szemlélteti.

míg $\det \varrho = \frac{1}{4}(1 - s^2)$ amiből látható, hogy $\text{Tr} \varrho^2 = \frac{1}{2}(1 + 1 - 4 \det \varrho) = 1 - 2 \det \varrho$ és ez a bázis választásától független invariáns mennyiség. Az egyes s_i -k a megfelelő irányokban mért polarizáció fokok, ezek lényegében a klasszikus optikából is ismert Stokes-paraméterek, itt azonban ezek egyetlen fotonra vannak vonatkoztatva, így itt $s_0 = 1$. Az

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = s \quad (5.28)$$

invariáns mennyiség pedig a polarizáció foka. ϱ -t diagonalizálva a két sajátérték éppen $\frac{1}{2}(1 + s)$ és $\frac{1}{2}(1 - s)$. A megfelelő két sajátvektor $|n_+\rangle$ és $|n_-\rangle$ adja meg azt a $\hat{\sigma}_n = |n_+\rangle\langle n_+| - |n_-\rangle\langle n_-|$ operátort illetve a neki megfelelő polarizációs irányokat, amelynél a polarizáció mértéke éppen s . Az $s = 0$ esetben a foton teljesen polarizálatlan, az állapot a polarizáció szempontjából maximálisan kevert, míg az $s = 1$ tiszta állapotot jelent, a foton teljesen polarizált. ϱ -t diagonalizálva a sajátértékek éppen $\frac{1}{2}(1 + s)$ és $\frac{1}{2}(1 - s)$, amiből következik, hogy a sűrűségoperátor bázistól függetlenül

$$\hat{\rho} = s \hat{\rho}_P + (1 - s) \varrho_M \quad (5.29)$$

alakba írható, ahol $\hat{\rho}_M = \frac{1}{2} \mathbb{I}$ a teljesen kevert állapot sűrűségoperátora, $\hat{\rho}_P$ pedig olyan, amelyiknek a determinánsa 0, azaz teljesen polarizált.

5.5. Termikus állapot

Térjünk most át egy bonyolultabb esetre, ahol az állapottér végtelen dimenziós. A korábban tárgyalt $|n\rangle$ számállapotok által kifeszített egyetlen mezőmódus állapotterét tekintjük. Az állapotok közül a gyakorlatban nagyon sokszor az úgynevezett termikus állapotok fordulnak elő, amelyek egy a környezetével termikus egyensúlyban lévő módusban alakulnak ki. Mivel a termikus rendszer – definíciója szerint – energiát cserélhet a környezetével, s így nem lehet zárt, ezért a kvantumállapota csak sűrűségoperátorral

írható le. A termikus állapotról a statisztikus fizikában levezetik, hogy ebben a rendszer energiaállapotainak betöltési valószínűségeit a Boltzmann-faktor adja meg, ritkábban pedig még azt is, hogy a ebben az állapotban a sűrűségoperátor nemdiagonális elemei által reprezentált koherenciák az egyensúly elérése során eltűnnek. Eszerint, ha a rendszer most az elektromágneses mező egy módusa, amely a környezetével (beleértve ebbe a többi módust is) T hőmérsékleten termikus egyensúlyban van, akkor a módus állapotát leíró sűrűségoperátor alakja definíció szerint:

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |n\rangle\langle n|, \quad (5.30)$$

ahol

$$p_n = \frac{e^{-\hbar\omega(n+1/2)/kT}}{Z}, \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega(n+1/2)/kT}. \quad (5.31)$$

Másképpen ezt úgy is írhatjuk, hogy

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)/kT}}{Z}. \quad (5.32)$$

Az állapotösszeget a mértani sor összegképletéből ki tudjuk számítani

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega(n+1/2)/kT} = e^{-\hbar\omega/2kT} \frac{1}{1-x}, \quad \text{ahol} \quad x := e^{-\hbar\omega/kT} < 1. \quad (5.33)$$

Így

$$p_n = (1-x)x^n. \quad (5.34)$$

A fotonszám várható értéke:

$$\langle \hat{n} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{n}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = (1-x) x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \quad (5.35)$$

$$= (1-x) x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = x(1-x) \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x} = \frac{e^{-\hbar\omega/kT}}{1 - e^{-\hbar\omega/kT}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (5.36)$$

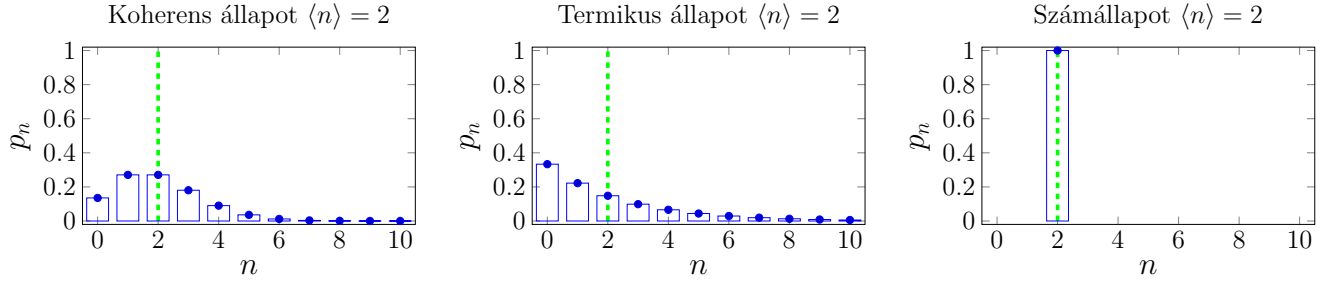
Ez egy speciális Bose-Einstein eloszlás, ahol $\mu = 0$. Ennek következménye a Planck-törvény: Egy foton energiája $\hbar\omega$: tehát az átlagos energia termikus állapot esetén egy módusban $\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$. A módusok száma térfogategységben ω^2 -el arányos, a statisztikus fizikában vagy a szilárdtestfizikában tanult állapotsűrűség számításához hasonló megfontolás szerint a módussűrűség $g(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{c^3\pi^2} d\omega$, azaz

$$w_T(\omega) d\omega = \hbar\omega \langle \hat{n} \rangle g(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{c^3\pi^2} \frac{d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (5.37)$$

A fentiek alapján a termikus állapot sűrűségoperátora a

$$\hat{\rho} = (1 - e^{-\hbar\omega/kT}) e^{-\hbar\omega a^\dagger a / kT} \quad (5.38)$$

alakba is írható.



5.4. ábra. A koherens, a termikus és a számállapotok fotonszám eloszlásának összehasonlítása. Mind a három állapot esetén a fotonszám várható értéke 2.

5.2 Feladat: Mutassuk meg, hogy a termikus állapot sűrűségoperátora valóban az (5.38) alakban írható.

A $p_n = (1-x)x^n$ valószínűségekben szereplő $x = e^{-\hbar\omega/kT}$ -t ki szokás fejteni az $\langle \hat{n} \rangle = x/(1-x)$ összefüggésből. Ez utóbbi szerint $x = \langle \hat{n} \rangle / (1 + \langle \hat{n} \rangle)$, s így

$$p_n = (1-x)x^n = \frac{1}{1 + \langle \hat{n} \rangle} \cdot \frac{\langle \hat{n} \rangle^n}{(1 + \langle \hat{n} \rangle)^n} = \frac{\langle \hat{n} \rangle^n}{(1 + \langle \hat{n} \rangle)^{n+1}}. \quad (5.39)$$

A fotonszám szórásának kiszámítása:

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{n}^2) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n n^2 = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) + n] x^n = \quad (5.40)$$

$$= (1-x) \left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} \right) \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (5.41)$$

Itt mint láttuk $\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$, és $\frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$. Eszerint

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = (1-x)x^2 \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)} = \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{x}{(1-x)} = 2\langle \hat{n} \rangle^2 + \langle \hat{n} \rangle. \quad (5.42)$$

Így

$$(\Delta \hat{n})^2 = \langle \hat{n} \rangle^2 - \langle \hat{n} \rangle^2 = \langle \hat{n} \rangle^2 + \langle \hat{n} \rangle. \quad (5.43)$$

Mint láttuk a koherens állapot esetén $(\Delta \hat{n})^2 = \langle \hat{n} \rangle$, ami a Poisson-eloszlásra jellemző. Mivel a termikus állapotra a fotonszám szórásnégyzete nagyobb mint a várható értéke:

$$\frac{(\Delta \hat{n})^2}{\langle \hat{n} \rangle} > 1 \quad (5.44)$$

a termikus állapot fotonszámeloszlása a (4) fejezetben tanultak szerint szuper-Poisson jellegű.

5.3 Feladat: Számítsuk ki a Q_M Mandel paramétert egy termikus állapotú módusra.

Ellenőrző kérdések

1. Milyen állapotokat kell sűrűségoperátorral megadni?
2. Mi a sűrűségoperátor általános definíciója?
3. Mik a sűrűségoperátor tulajdonságai?
4. Hogyan számítjuk ki egy operátor várható értékét a sűrűségoperátorral?
5. Mi a redukált sűrűségoperátor fogalma és mikor használjuk?
6. Hogyan jellemezzük egy foton általános polarizációs állapotát?
7. Mi egy módus termikus állapotának sűrűségoperátora?
8. Milyen eloszlást követ a fotonszám termikus állapotban?
9. Mennyi a fotonszám várható értéke és szórása termikus állapotban?
10. Mit értünk azon, hogy a termikus állapot szuper-Poisson típusú állapot?

6. fejezet

Az állapotok szemléltetése a fázistéren, Wigner-függvény és más kvázivalószínűségek

Ebben a fejezetben először megismerkedünk a kvantummechanikai állapot egy speciális leírási módjával, amelyet Wigner Jenő vezetett be 1932-ben. Ez a módszer jól mutatja, hogy a kvantummechanika inkább a klasszikus statisztikus mechanika általánosítása, mint egyszerűen a klasszikus mechanikáé. Az itt mutatott bevezetés az irodalomban általában ad-hoc módon megadott definíciónál mélyebben indokolja a Wigner-függvény meghatározásának módját. A kvantummechanikai tárgyalás után a kvantumoptikai alkalmazásra térünk át, hiszen a módszer ismertetésének fő indoka, hogy éppen ezen a területen használják legelterjedtebben ezt az ún. fázisteres leírást. A fejezet első részének megértéséhez a klasszikus és statisztikus mechanika ismerete szükséges. Az ezt követő kvantumoptikai részhez, pedig az előző fejezetekben tanultakra hivatkozunk.

6.1. Klasszikus mechanika a fázistéren

Tekintsünk először az egyszerűség kedvéért egy egyetlen szabadsági fokú klasszikus mechanikai rendszert, amelynek Hamilton függvénye $\mathcal{H}(x, p)$. A kanonikus mozgásegyenletek alakja

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}. \quad (6.1)$$

Ezek megoldása valamilyen $\{x_0, p_0\}$ kezdeti érték esetén kijelöli a fázispont mozgását mint az idő függvényét a fázistérben, ez az $\{x_0, p_0\} \rightarrow \{x(t), p(t)\}$ fázistrajektória.

Egyszerű példaként tekinthetjük a szabad tömegpont, vagy a harmonikus oszcillátor egydimenziós mozgását, ahol a fázistér csak kétdimenziós.

Jelöljük a fázispont sebességét a fázistéren $\mathbf{u}$ -val: $\mathbf{u} = \{\dot{x}(t), \dot{p}(t)\}$. A mozgásegyenletek miatt az $\mathbf{u}$ vektor divergenciája a tényleges mozgáshoz tartozó trajektória mentén eltűnik, mert

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right) = 0. \quad (6.2)$$

Tegyük föl most azonban, hogy a részecske helyzetét a fázistérben nem ismerjük pontosan már a kezdeti időpillanatban sem, ehelyett azt egy valószínűségi változónak tekintjük. Ez esetben föltesszük, hogy megadható egy $f(x, p)$ valószínűségegsűrűség a fázistéren – ezt szoktuk fázisvalószínűségnek nevezni –

ami megadja, hogy mekkora valószínűséggel tartózkodik a fázispont a $dx dp$ fázistérbeli térfogatelemben. (Ez a konstrukció elsősorban a klasszikus statisztikus fizikai tárgyalásánál bizonyult hasznosnak, ahol éppen a részecskék nagy száma miatt nem tudjuk pontosan megadni a fázispont helyzetét. Emlékeztetünk arra, hogy a rendszer pontos állapota nagyszámú részecske esetén is csak egyetlen pont az általában bonyolult szerkezetű fázistéren). Továbbra is egyetlen részecske egydimenziós mozgását vizsgálva, rendszer állapotváltozását most az $f(x, p, t)$ időfüggő fázisvalószínűség adja meg. Elvárjuk, hogy az

$$f(x, p, t) \geq 0, \quad \text{és} \quad \int f(x, p, t) dx dp = 1. \quad (6.3)$$

összefüggések minden időpillanatban teljesüljenek. Az utóbbi követelményből következik a *kontinuitási egyenlet*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) = 0. \quad (6.4)$$

Érvényes továbbá *Liouville tétele*, amely szerint a tényleges pálya mentén:

$$\frac{df(x, p, t)}{dt} = 0. \quad (6.5)$$



6.1. ábra. Joseph Liouville francia matematikus (1809-1882) http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Liouville

Valóban

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \mathbf{u}) - f \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (6.6)$$

azért mert az első két tag összege a (6.4) kontinuitási egyenlet miatt, a harmadik tag pedig a mozgásegyenletekből következő $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (6.2) miatt tűnik el.

A (6.6) összefüggés a Liouville-egyenlet:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \quad (6.7)$$

ami egy $\mathcal{H} = p^2/2m + V(x)$ alakú Hamilton-függvény esetén f -re az

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} \quad (6.8)$$

mozgásegyenletre vezet. Harmonikus-oszcillátorra ennek alakja:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} + m\omega^2 x \frac{\partial f}{\partial p} \quad (6.9)$$

és ebben az esetben az explicit megoldást is föl tudjuk írni:

$$f(x, p, t) = f_0\left(x \cos \omega t - \frac{p}{m\omega} \sin \omega t, p \cos \omega t + m\omega x \sin \omega t\right) \quad (6.10)$$

ahol $f_0(x, p)$ a $t = 0$ -hoz tartozó kezdeti föltétel.

Ez a megoldás azt mutatja, hogy egy oszcillátor esetén az $f(x, p, t)$ függvény időben ω szögsebességgel forog a fázistér fölött, miközben alakját nem változtatja.

6.1 Feladat: Igazoljuk, hogy 6.10 valóban megoldása az oszcillátor Liouville-egyenletének.

6.2. Fázisvalószínűség a kvantummechanikában

A klasszikus Liouville-egyenlet az impulzus és a koordináta együttes eloszlásának időfüggésére vonatkozik. Nincs olyan klasszikus egyenlet, amely csak a koordináta- $w(x, t)$ vagy csak az impulzus-eloszlás $w(p, t)$ valószínűségi sűrűségét adná meg, ilyen egyenlet csak az együttes eloszlást jellemző $f(x, p, t)$ -re létezik. Ezért nem várunk ilyen mozgásegyenletet a megfelelő kvantummechanikai sűrűségfüggvényekre sem. Valóban nincs is ilyen egyenlet $|\psi(x, t)|^2$ -re, amely a részecske koordinátájának valószínűségi sűrűségét adja meg. De nincs ilyen a $\psi(x, t)$ amplitúdó (inverz) Fourier-transzformáltjaként adódó $\tilde{\psi}(p, t)$ impulzus-amplitúdóból számítható $|\tilde{\psi}(p, t)|^2$ impulzus valószínűségi sűrűségre sem.

A kvantummechanikában dinamikai egyenlet a $\psi(x, t)$ -re vagy a Fourier-transzformáltjára, $\tilde{\psi}(p, t)$ -re adható meg, ez a Schrödinger egyenlet, és a két szóban forgó függvény közül bármelyik egyszerre kódolja akár az x akár a p szerinti eloszlást. Ettől függetlenül fölvethető a kérdés, hogy van-e olyan függvény a kvantummechanikában, amely egyszerre az x és a p függvényeként, azaz a Fourier-transzformáció nélkül is tartalmazza a mindkét változó szerinti valószínűségeloszlást. A válasz igen, és ilyen kvantummechanikai függvényt először Wigner Jenő adott meg 1932-ben. Később további ilyen függvényeket definiáltak, de legelterjedtebben ma is a Wigner által megadott konstrukciót használjuk.



6.2. ábra. Wigner Jenő (1902-1995). További érdekes képek és olvasnivalók a BME OMIKK Tudomány- és technikatörténeti archívumában: <http://www.omikk.bme.hu/archivum/wigner/htm/wignerindex.htm>

Az alábbiakban egy részecske egydimenziós mozgására szorítkozunk, az eljárás egyszerűen kiterjeszthető háromdimenziós mozgásra, vagy arra az esetre ha sokrészecske-rendszerünk van. Az itteni tárgyalásban kikötjük, hogy a klasszikus fázistér legyen sík.

Kvantummechanikában egy $\mathcal{A}(x, p)$ fizikai mennyiségnek önadjungált operátorok felelnek meg. Az ehhez hozzárendelt operátor azonban nincs egyértelműen meghatározva, mivel az függhet attól, hogy az X és P operátorokat azok szorzatát is tartalmazó tag jelenléte esetén azokat milyen sorrendben helyettesítjük az $\mathcal{A}(x, p)$ megfelelő változói helyére. Az az eljárás bizonyult helyesnek, ha az úgynevezett szimmetrizált változatot használjuk, amelynél pl. a legegyszerűbb nemtriviális esetben az xp szorzat helyére az $(XP + PX)/2$ operátort helyettesítjük. Az ennek megfelelő szimmetrizált operátort itt $A_W(X, P)$ -vel fogjuk jelölni, ahol a W index H. Weyl nevére utal, aki a szimmetrizálásra az alább ismertetendő általános eljárást adta.

Tekintsük a klasszikus $\mathcal{A}(x, p)$ függvény (inverz) Fourier-transzformáltját:

$$\alpha(\lambda, \mu) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iint dx dp \mathcal{A}(x, p) e^{-i(\lambda x + \mu p)/\hbar} \quad (6.11)$$

A föllépő integrálok a közönséges értelemben általában divergensek, pl. az $\mathcal{A}(x, p) = 1$ függvénynek, amelyet szintén tekinthetünk fizikai mennyiségnek, az $\alpha(\lambda, \mu) = \delta(\lambda)\delta(\mu)$ kettős Dirac-delta felel meg, az $\mathcal{A}(x, p) = x$ Fourier-transzformáltja pedig az $\alpha(\lambda, \mu) = i\hbar\delta'(\lambda)\delta(\mu)$ „disztribúció”, tekintettel a Dirac-delta deriváltjának a $\int \delta'(\lambda)g(\lambda)d\lambda = -g'(\lambda=0)$ értelmezésére. A (6.11) transzformáció inverze segítségével kapjuk az $\mathcal{A}(x, p)$ klasszikus fizikai mennyiség Fourier-előállítását:

$$\mathcal{A}(x, p) = \iint d\lambda d\mu \alpha(\lambda, \mu) e^{i(\lambda x + \mu p)/\hbar}. \quad (6.12)$$

Helyettesítsük az utóbbi formulában az exponenciálisban szereplő klasszikus x és p mennyiségek helyett az X és P operátorokat, ekkor az integrálás eredménye az X és P operátorok függvénye lesz:

$$A_W(X, P) := \iint d\lambda d\mu \alpha(\lambda, \mu) e^{i(\lambda X + \mu P)/\hbar}. \quad (6.13)$$

Ezt nevezzük az A operátor Weyl szimmetrizáltjának.

6.2 Feladat: Igazoljuk, hogy a (6.13) definícióból az $xp = px$ klasszikus szorzatnak valóban az $(XP + PX)/2$ operátor felel meg. Útmutatás: használjuk a Baker–Campbell–Hausdorff-azonosságot és a $\delta'(\lambda)$ fön­tebb említett tulajdonságát.

Mint tudjuk, az A_W operátor várható értéke egy $|\psi\rangle$ (tiszt) állapotban az

$$\langle A_W(X, P) \rangle_\psi = \langle \psi | A_W(X, P) | \psi \rangle \quad (6.14)$$

formulával, számítható ki. (A későbbiekben ezen a ponton nem tiszta, azaz keverék állapotokat is meg fogunk engedni.)

Most azt kérdezzük, hogy *van-e olyan* a $|\psi\rangle$ állapothoz tartozó $W_\psi(x, p)$ függvény a fázistéren, amellyel mint valószínűségi sűrűségfüggvénnyel az átlag kiszámítására szolgáló klasszikus valószínűség-számítási szabályt használva éppen a kvantummechanikai átlaggal megegyező eredményt kapjuk, azaz érvényes a

$$\iint dx dp W_\psi(x, p) \mathcal{A}(x, p) = \langle \psi | A_W(X, P) | \psi \rangle \quad (6.15)$$

formula. (A bal oldalon alkalmazott klasszikus szabály szerint u.i. tetszőleges a valószínűségi változótól függő mennyiség várható értéke a sűrűségfüggvény és a kérdéses mennyiség szorzatának teljes térre vett integrálja.) A válasz az, hogy létezik ilyen függvény, ez a $|\psi\rangle$ állapot Wigner-függvénye, amelynek kifejezését alább több formában is megadjuk.

A megkövetelt (6.15) egyenlőség jobb oldala (6.13) szerint:

$$\langle \psi | A_W(X, P) | \psi \rangle = \langle \psi | \iint d\lambda d\mu \alpha(\lambda, \mu) e^{i(\lambda X + \mu P)/\hbar} | \psi \rangle = \iint d\lambda d\mu \alpha(\lambda, \mu) \chi_\psi(\lambda, \mu), \quad (6.16)$$

ahol bevezettük a $|\psi\rangle$ állapothoz tartozó $\chi_\psi(\lambda, \mu)$ *karakterisztikus függvényt*, amely az operátorokat tartalmazó $e^{i(\lambda X + \mu P)/\hbar}$ Fourier operátorbázis várható értéke:

$$\langle \psi | e^{i(\lambda X + \mu P)/\hbar} | \psi \rangle =: \chi_\psi(\lambda, \mu). \quad (6.17)$$

Tekintsük most (6.15) baloldalát, ahol a klasszikus $\mathcal{A}(x, p)$ várható értéke szerepel a keresett $W(x, p)$ sűrűségfüggvénnyel a klasszikus szabály szerint számolva. $\mathcal{A}(x, p)$ helyére beírva annak Fourier-előállítását az $\alpha(\lambda, \mu)$ -vel, kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \iint dx dp W_\psi(x, p) \mathcal{A}(x, p) &= \iint dx dp W_\psi(x, p) \iint d\lambda d\mu \alpha(\lambda, \mu) e^{i(\lambda x + \mu p)/\hbar} = \\ &= \iint d\lambda d\mu \alpha(\lambda, \mu) \iint dx dp W_\psi(x, p) e^{i(\lambda x + \mu p)/\hbar}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Az előírni kívánt (6.15) egyenlőség következik a (6.16) és (6.18) egyenlőségből, azaz (6.15) teljesül, ha

$$\iint dx dp W_\psi(x, p) e^{i(\lambda x + \mu p)/\hbar} = \chi_\psi(\lambda, \mu), \quad (6.19)$$

amiből

$$W_\psi(x, p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iint \chi_\psi(\lambda, \mu) e^{-i(\lambda x + \mu p)/\hbar} d\lambda d\mu. \quad (6.20)$$

Azaz a $W_\psi(x, p)$ -től elvárt tulajdonság teljesül, ha az a (6.17) alatt definiált $\chi_\psi(\lambda, \mu)$ karakterisztikus függvény inverz Fourier-transzformáltja, vagy az állapottal közvetlenül:

$$W_\psi(x, p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iint \langle \psi | e^{i(\lambda X + \mu P)/\hbar} | \psi \rangle e^{-i(\lambda x + \mu p)/\hbar} d\lambda d\mu. \quad (6.21)$$

6.3. A Wigner függvény kiszámítása koordináta-reprezentációban

Az alábbiakban következő átalakítások alapján a ψ állapot ismeretében W_ψ -t közvetlenül, a karakterisztikus függvény kiszámítása nélkül is meg lehet határozni. Pl. ha a $\psi(x)$ koordináta hullámfüggvény adott, akkor (6.17) szerint

$$\chi_\psi(\lambda, \mu) = \int \psi^*(x) e^{i(\lambda X + \mu P)/\hbar} \psi(x) dx. \quad (6.22)$$

Használjuk itt a Baker–Campbell–Hausdorff-formulát a most következő alakban:

$$e^{A+B} = e^{A/2+B+A/2} = e^{\frac{A}{2}} e^B e^{\frac{A}{2}}, \quad (6.23)$$

amely fönnáll, ha $[A, B]$ az egységoperátorral arányos. Ezért

$$\begin{aligned} \chi_\psi(\lambda, \mu) &= \int \psi^*(x) e^{i\mu P/2\hbar} e^{i\lambda X/\hbar} e^{i\mu P/2\hbar} \psi(x) dx = \\ &= \int (e^{-i\mu P/2\hbar} \psi(x))^* e^{i\lambda X/\hbar} e^{i\mu P/2\hbar} \psi(x) dx = \int \psi^*(x - \mu/2) e^{i\lambda x/\hbar} \psi(x + \mu/2) dx. \end{aligned} \quad (6.24)$$

(Itt az ismert $e^{i\mu P/2\hbar} \psi(x) = \psi(x + \mu/2)$ összefüggést használtuk, ami azt fejezi ki, hogy az impulzus operátora a térbeli eltolást generálja, és az infinitezimálisan kis $\mu/2$ esetén érvényes $(1 + i\mu P/2\hbar) \psi(x) = (1 + \frac{\mu}{2} \partial_x) \psi(x) = \psi(x + \frac{\mu}{2})$ iterálása alapján bizonyítható véges $\mu/2$ -re is.) Így $\chi_\psi(\lambda, \mu)$ Fourier-transzformáltjára vagyis a Wigner-függvényre

$$W_\psi(x, p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iint \left(\int \psi^*(y - \mu/2) e^{i\lambda y/\hbar} \psi(y + \mu/2) dy \right) e^{-i(\lambda x + \mu p)/\hbar} d\lambda d\mu \quad (6.25)$$

adódik, s minthogy itt

$$\int e^{i\lambda(y-x)/\hbar} d\lambda = 2\pi\hbar \delta(y-x) \quad (6.26)$$

kapjuk, hogy

$$W_\psi(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \psi^*(x - \mu/2) \psi(x + \mu/2) e^{-i\mu p/\hbar} d\mu. \quad (6.27)$$

Ez a kívánt formula tiszta állapotra, amelyből a Wigner-függvény egy másik gyakran használt alakját kapjuk az $y = -\mu/2$, $d\mu = -2dy$ helyettesítéssel, amiből az integrációs határok előjelváltozását azok fölcserélésével kompenzálva kapjuk, hogy

$$W_\psi(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \psi^*(x+y) \psi(x-y) e^{2iyp/\hbar} dy. \quad (6.28)$$

6.3 Feladat: Adjuk meg a Wigner-függvényt közvetlenül a $\tilde{\psi}(p)$ impulzus-amplitúdó függvénnyel.

6.3.1. Keverék állapot Wigner-függvénye

Mint láttuk, tiszta állapotokon a Wigner-függvény a $e^{i(\lambda X + \mu P)/\hbar}$ eltolási operátor várható értékének, azaz a χ karakterisztikus függvénynek a Fourier-transzformáltja. Keverék állapot esetén a definíció ugyanez, csak a várható értéket a keverék esetén használandó

$$\chi_{\hat{\rho}}(\lambda, \mu) = \text{Tr}(\hat{\rho} e^{i(\lambda X + \mu P)/\hbar}) \quad (6.29)$$

képlettel kell kiszámítani, majd itt is a (6.20) formulát kell alkalmazni. Ennek nyomán a Wigner-függvényre koordináta-reprezentációban az előző alszakaszban végrehajtott átalakítások megfelelő módosításával a

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \varrho(x + \mu, x - \mu) e^{2i\mu p/\hbar} d\mu \quad (6.30)$$

eredmény adódik, ahol $\varrho(x', x)$ a $\hat{\rho} = \sum_i w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ sűrűségoperátornak megfelelő $\varrho(x', x) = \langle x' | \hat{\rho} | x \rangle = \sum_i w_i \psi_i^*(x) \psi_i(x')$ "mátrix", (valójában kétváltozós függvény) koordináta-reprezentációban valamilyen $\psi_i(x)$ -ekkel, ahol $\sum_i w_i = 1$.

6.4. A Wigner-függvény tulajdonságai

(i) A Wigner-függvény valós.

Bizonyítás: képezzük a komplex konjugáltját, majd utána egy egyszerű változóhelyettesítéssel megmutatható, hogy $W^*(x, p) = W(x, p)$.

(ii) A helyes marginális sűrűségeket adja.

A $W(x, p)$ -t integrálva p szerint kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int W(x, p) dp &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int \varrho(x - \mu/2, x + \mu/2) \int e^{-i\mu p/\hbar} d\mu dp = \\ &= \int \delta(\mu) \varrho(x - \mu/2, x + \mu/2) d\mu = \varrho(x, x) = |\psi(x)|^2 \end{aligned} \quad (6.31)$$

A Wigner-függvény x szerint integrálja:

$$\int W(x, p) dx = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint \psi^*(x - \mu/2) \psi(x + \mu/2) e^{-i\mu p/\hbar} d\mu dx, \quad (6.32)$$

amiben viszont a $\mu = y - z$ és $x = (y + z)/2$ változótranszformációval áttérhetünk az y és z szerinti integrálokra, ahol az integrál két (inverz) Fourier-transzformált szorzataként írható. Mivel a Jacobi-determináns 1 kapjuk, hogy,

$$\int W(x, p) dx = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \psi^*(z) e^{ipz/\hbar} dz \int \psi(y) e^{-iyp/\hbar} dy = |\tilde{\psi}(p)|^2. \quad (6.33)$$

A 6.31 és 6.33 formulák szerint a marginális sűrűségek éppen a megfelelő koordináta és impulzus-reprezentációbeli valódi valószínűsége-sűrűségek. A fentiekből az is látszik, hogy tiszta állapotra:

$$\iint W(x, p) dx dp = 1. \quad (6.34)$$

6.4 Feladat: Bizonyítsuk be ugyanezt a (6.34) *normáltsági* tulajdonságot kevert állapotra.

(iii) A Wigner-függvény bizonyos tartományokon negatív értékű is lehet.

Tekintsük példaként a harmonikus oszcillátor stacionárius $u_n(x)$ állapotaihoz tartozó Wigner függvények értékét a fázistér $(x = 0, p = 0)$ origójában. A definícióból és az u_n normáltságából következően

$$W_{u_n}(0, 0) = \frac{1}{\pi\hbar} \int u_n^*(y) u_n(-y) dy = \frac{1}{\pi\hbar} (-1)^n, \quad (6.35)$$

mivel az u_n állapotok az n kvantumszám paritásától függő sajátértékekkel a paritás sajátállapotai, azaz $u_n(-y) = (-1)^n u_n(y)$. Látható, hogy a páratlan n -hez tartozó állapotok Wigner függvénye az origóban negatív, míg páros n esetén ez pozitív.

Így a Wigner-függvény bizonyos tartományokon általában negatív értékű is lehet. Mivel egy szokásos klasszikus valószínűségi sűrűségfüggvény mindig nemnegatív, ezért a W függvényt *kvázivalószínűségi-sűrűségfüggvénynek* nevezzük.

(iv) Két állapot átfedésének mértéke a megfelelő Wigner-függvények szorzatának integráljával arányos.

Két Wigner-függvény szorzatintegrálja a következőképpen számolható ki. Először a p szerinti integrálást hajtuk végre és használjuk, hogy $\int e^{+i(\mu-\nu)p/\hbar} dp = 2\pi\hbar\delta(\mu - \nu)$, amiből

$$\begin{aligned} \int dx dp W_\psi(x, p) W_\varphi(x, p) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int dx dp \left[\int \psi(x - \mu/2) \psi^*(x + \mu/2) e^{+i\mu p/\hbar} d\mu \right] \times \\ &\quad \times \left[\int \varphi^*(x - \nu/2) \varphi(x + \nu/2) e^{-i\nu p/\hbar} d\nu \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \int \psi(x - \mu/2) \psi^*(x + \mu/2) \varphi^*(x - \nu/2) \varphi(x + \nu/2) \delta(\mu - \nu) d\nu d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \int \psi(x - \mu/2) \psi^*(x + \mu/2) \varphi^*(x - \mu/2) \varphi(x + \mu/2) d\mu. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Itt áttérünk az $x - \mu/2 = y$, $x + \mu/2 = z$ változókra, és használjuk, hogy a Jacobi determináns $J(\frac{\partial yz}{\partial x\mu}) = 1$. Kapjuk, hogy

$$\int dx dp W_\psi(x, p) W_\varphi(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \psi(y) \varphi^*(y) dy \int \psi^*(z) \varphi(z) dz = \frac{1}{2\pi\hbar} |\langle \psi | \varphi \rangle|^2, \quad (6.37)$$

azaz a két Wigner-függvény szorzatának integrálja a megfelelő két állapot belső szorzatának abszolút érték négyzetét adja az $1/2\pi\hbar = 1/h$ tényezőtől eltekintve.

Mint hogy a ψ állapotok általában függenek az időtől, a Wigner-függvény is változik időben a:

$$W(x, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \psi^*(x + y, t) \psi(x - y, t) e^{2iyp/\hbar} dy \quad (6.38)$$

képletnek megfelelően. A $W(x, p, t)$ -re potenciális (konzervatív) erőterben mozgó részecske esetén egy olyan mozgásegyenlet is fölírható, amely W időderiváltját a W x és p változói szerint vett parciális deriváltjaival határozza meg. Általános esetben azonban ez egy rendkívül bonyolult alakú parciális egyenlet,

ezért azt a legritkább esetben használjuk. Ehelyett inkább a ψ -re vonatkozó szokásos Schrödinger egyenlet megoldását írjuk be minden időpillanatban a W definícióját adó integrálba.

Abban a számunkra fontos speciális esetben azonban, amikor a potenciális energia x^2 -el arányos, azaz egy szabad harmonikus oszcillátor esetében, meg lehet mutatni, hogy a Wigner-függvény egyszerűen az oszcillátor ω frekvenciájával megegyező szögsebességgel forog körbe a fázistér fölött miközben alakja változatlan. Ez ugyanaz a tulajdonság, amit a klasszikus Liouville egyenletből is kaptunk, ami a harmonikus oszcillátor kitüntetten egyszerű kvantummechanikájának a következménye.

6.5. A Wigner-függvény a kvantumoptikában

A kvantumoptikában különösen kiterjedten használják az állapotok jellemzésére a Wigner-függvényt. Ennek egyik oka, hogy egy módus esetén a két kvadratúra az X és az Y ugyanolyan fölcserélési relációnak tesz eleget mint a mechanikai rendszer koordináta és az impulzus operátora. Ezen fölül a kvantumoptikai esetben a két operátor teljesen egyenrangú, így a fázisteres leírás, amely ezt az egyenrangúságot a maga természetes módján hangsúlyozza, teljesen kézenfekvő. A következőkben áttekintjük a legfontosabb módusállapotok Wigner-függvényeit és rámutatunk arra, hogyan tükröződnek tulajdonságaik a Wigner-függvényükben.

Az X és Y kvadratúra operátorokkal jellemzett kvantumoptikai módus esetén egy tiszta $|\psi\rangle$ állapot karakterisztikus függvényét a (6.17) definíciónak megfelelően a

$$\chi_\psi(\lambda, \mu) = \langle \psi | e^{i(\lambda X + \mu Y)} | \psi \rangle \quad (6.39)$$

kifejezéssel, általánosabban pedig $\hat{\rho}$ a sűrűségoperátorral megadott keverékekre is érvényes

$$\chi_{\hat{\rho}}(\lambda, \mu) = \text{Tr}(\hat{\rho} e^{i(\lambda X + \mu Y)}) \quad (6.40)$$

formulával adjuk meg. Itt az $e^{i(\lambda X + \mu Y)}$ operátor az $X = (a + a^\dagger)/2$, $Y = (a - a^\dagger)/2i$ alapján a koherens állapotok bevezetésénél megismert

$$D(\beta) = \exp(\beta a^\dagger - \beta^* a) \quad (6.41)$$

eltolási operátorként is írható, a $\beta = (-\mu + i\lambda)/2$ azonosítással. A karakterisztikus függvény ebben a β komplex változóban

$$\chi_{\hat{\rho}}(\beta) = \text{Tr}(\hat{\rho} D(\beta)) = \text{Tr}(\hat{\rho} e^{\beta a^\dagger - \beta^* a}). \quad (6.42)$$

Ezután a Wigner-függvény az előzőek szerint, az $\alpha = x + iy$ változóban

$$\begin{aligned} W_{\hat{\rho}}(x, y) &= W_{\hat{\rho}}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \iint \text{Tr}(\hat{\rho} D(\beta)) e^{-(\beta \alpha^* - \beta^* \alpha)} d^2 \beta = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \iint \text{Tr}(\hat{\rho} e^{\beta a^\dagger - \beta^* a}) e^{-(\beta \alpha^* - \beta^* \alpha)} d(\text{Re} \beta) d(\text{Im} \beta) \end{aligned} \quad (6.43)$$

ahol a $\hbar$ hiánya az $[X, Y] = i/2$ kommutátor következménye, az $1/2^2$ prefaktort pedig a $(\mu, \lambda) \rightarrow (\text{Re} \beta, \text{Im} \beta)$ változó-helyettesítéskor föllépő Jacobi determináns tünteti el.

6.5.1. Koherens állapot Wigner-függvénye

Az $|\alpha_0\rangle$ koherens állapot egy tiszta állapot, amelynek sűrűségoperátora

$$\hat{\rho}_{\alpha_0} = |\alpha_0\rangle\langle\alpha_0|. \quad (6.44)$$

Számítsuk ki először a $\chi_{\hat{\rho}}(\beta) = \text{Tr}(\hat{\rho}_{\alpha_0} D(\beta)) = \langle\alpha_0| D(\beta) |\alpha_0\rangle$ karakterisztikus függvényt. A BCH azonosságot használva:

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha_0} &= \langle\alpha_0| D(\beta) |\alpha_0\rangle = \langle\alpha_0| e^{\beta a^\dagger - \beta^* a} |\alpha_0\rangle = \\ &= e^{-|\beta|^2/2} \langle\alpha_0| e^{\beta a^\dagger} e^{-\beta^* a} |\alpha_0\rangle = e^{-|\beta|^2/2} e^{\beta \alpha_0^* - \beta^* \alpha_0}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Ebből a Wigner-függvényre (az integrálok alatt kettős integrált értve):

$$W_{\alpha_0}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \chi_{\alpha_0}(\beta) e^{-(\beta \alpha^* - \beta^* \alpha)} d^2 \beta = \frac{1}{\pi^2} \int e^{-|\beta|^2/2} e^{\beta \alpha_0^* - \beta^* \alpha_0} e^{-\beta \alpha^* + \beta^* \alpha} d^2 \beta = \quad (6.46)$$

Az ilyen típusú integrálok kiszámításához használjuk az

$$\frac{1}{\pi} \int \int e^{-\gamma|\beta|^2} e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} d^2 \beta = \frac{1}{\gamma} e^{-|\alpha|^2/\gamma} \quad (6.47)$$

integrálformulát, ami tulajdonképpen az $e^{-\gamma|\beta|^2}$ kétváltozós Gauss sűrűség kettős Fourier-transzformáltja, s erről tudjuk, hogy az maga is egy Gauss függvény.

6.5 Feladat: Bizonyítsuk a (6.47) integrálképletet a β és az α valós és képzetes részre való bontásával.

A fenti (6.47) formulával a (6.46)-ból a koherens állapot Wigner-függvényére a

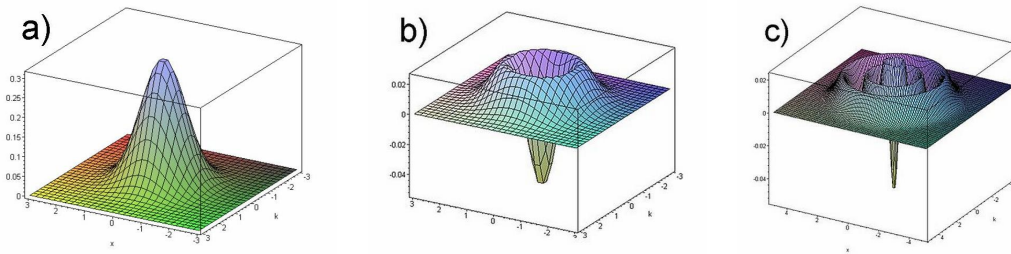
$$W_{\alpha_0}(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha - \alpha_0|^2} \quad (6.48)$$

eredményt nyerjük. Látható, hogy ez a függvény sehol sem negatív, és be lehet bizonyítani, hogy *a tiszta állapotok közül* ez a nemnegativitás csak az oszcillátor intelligens állapotaira érvényes, azaz azokra, amelyek minimalizálják a két kvadratúra szorzatára vonatkozó bizonytalansági relációt, tehát az intelligens állapotok részhalmazát képező koherens állapotokra is. Ez utóbbiakat neveztük kváziklasszikus állapotoknak. Megjegyezzük, hogy a következőkben tárgyalandó préselt koherens állapotokat, amelyekre a Wigner-függvény még szintén mindenütt pozitív, már nemklasszikus állapotoknak szokás nevezni. A préselt állapotok szemléltetésére a Wigner-függvény egyébként különösen alkalmasnak bizonyul majd. Azokat az állapotokat viszont, amelyeken a Wigner-függvény negatív értéket is fölvesz itt erősen nemklasszikus állapotoknak fogjuk nevezni.

6.5.2. Fotonszám sajátállapotok Wigner-függvénye

Erősen nemklasszikus állapotokra példa egy fotonszám sajátállapot (a vákuumot kivéve), amelynek Wigner-függvényét itt részletes levezetés nélkül közöljük. A karakterisztikus függvény alakja

$$\chi_{|n\rangle}(\beta) = \langle n| D(\beta) |n\rangle = \langle n| e^{\beta a^\dagger - \beta^* a} |n\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \langle n| e^{\beta a^\dagger} e^{-\beta^* a} |n\rangle \quad (6.49)$$



6.3. ábra. Néhány számállapot Wigner-függvénye. a) Vákuum állapot, b) Az $|1\rangle$ számállapot. c) Az $|5\rangle$ számállapot

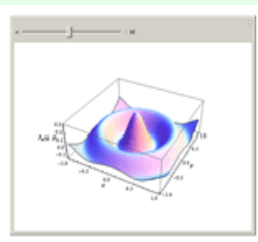
ami az a és $a^\dagger$ operátorok $|n\rangle$ -re való hatásából kiértékelhető. Az eredményből Fourier-transzformációval kiszámítható a számállapot Wigner-függvénye:

$$W_n(\alpha) = \frac{(-1)^n}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} L_n(4|\alpha|^2), \quad (6.50)$$

ahol L_n az n -edik Laguerre polinom. Látható, hogy $W_n(\alpha)$ függvény csak $|\alpha|^2$ -től függ, tehát (6.50) az α síkon egy hengerszimmetrikus függvényt határoz meg. Mivel a polinomnak n zéróhelye van, és az azt szorzó exponenciális mindig pozitív, ez a Wigner-függvény n -szer metszi az α síkot, csúcsa az $\alpha = 0$ helyen van, értéke pedig ott n paritásának megfelelően pozitív vagy negatív, amint azt már lényegében korábban is láttuk. Meg lehet mutatni, hogy a $W_n(\alpha)$ függvény legkülső inflexiós pontja éppen $|\alpha|^2 = n$ -nél van, azaz ott, ahol a függvény értéke a fotonszám várható értékével egyezik meg. Ennek a függvénynek az α síkon megjelenő hengerszimmetriája azt jelzi, hogy a számállapotban az állapot fázisa teljesen határozatlan mivel az eloszlás az $\arg \alpha$ szerint teljesen egyenletes.



Animáció:



Az alábbi linkről elérhető animációban az egyes számállapotok Wigner-függvényét ábráztuk. A forgatható 3D ábrákon figyeljük meg, hogy mely n -ekre vesz fel a Wigner-függvény negatív értékeket.

<http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/demos/WignerFunctionOfHarmonicOscillator-dp.html>

6.5.3. Termikus állapot Wigner-függvénye

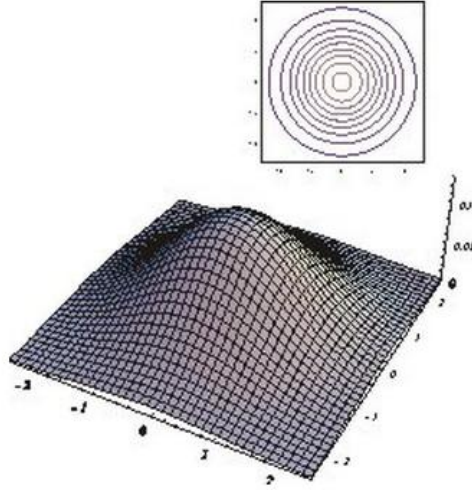
A termikus állapot Wigner-függvényéhez a $\text{Tr}(\hat{\rho}_T D(\alpha))$ karakterisztikus függvényt kell Fourier-transzformálni. Számítsuk a spurt a számállapotok bázisán.

$$\text{Tr}(\hat{\rho}_T D(\alpha)) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x) \langle n | x^n D(\alpha) | n \rangle. \quad (6.51)$$

Az eredmény:

$$W_T(\alpha) = \frac{2}{\pi} \tanh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) e^{-2|\alpha|^2 \tanh(\hbar\omega/2kT)} \quad (6.52)$$

ami a $T = 0$ helyen visszaadja az $|n = 0\rangle$ alapállapot, illetve ami ugyanaz, az $|\alpha_0 = 0\rangle$ koherens állapot Wigner-függvényét.



6.4. ábra. Termikus állapot Wigner-függvénye

6.6. További kvázivalószínűségi sűrűségfüggvények

A teljesség és az irodalmi tájékozódás kedvéért megjegyezzük még, hogy a Wigner-függvényen kívül más kvázivalószínűségi sűrűségfüggvények is használatosak. Ezek közül megemlíjtük a Wigner-függvényen kívül leggyakrabban használt ún. Husimi (vagy a japán nevet helyesebben átírva Fusimi) féle $Q_{\hat{\rho}}(\alpha)$ sűrűségfüggvényt, amely definíció szerint a kérdéses állapot sűrűségoperátorának várható értéke az $|\alpha\rangle$ koherens állapotokon mint az α paraméter függvénye:

$$Q_{\hat{\rho}}(\alpha) := \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle, \quad (6.53)$$

ahol az $1/\pi$ faktor az $\int Q_{\hat{\rho}}(\alpha) d^2\alpha = 1$ normálást biztosítja.

Minthogy a $\hat{\rho}$ nemnegatív operátor, a $Q_{\hat{\rho}}(\alpha)$ a Wigner-függvénnyel ellentétben sehol sem negatív. Egy $|\psi\rangle$ tiszta állapotban, amikor $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ez a függvény a

$$Q_{|\psi\rangle}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \psi \rangle \langle \psi | \alpha \rangle = \frac{1}{\pi} |\langle \psi | \alpha \rangle|^2 \quad (6.54)$$

alakot ölti.

6.6 Feladat: Mutassuk meg a fenti 6.54 Q függvény normáltsági tulajdonságát.

Egy további kvázi valószínűségi sűrűségfüggvény a R. Glauber és E. Sudarshan által bevezetett úgynevezett P függvény. Mint tudjuk, egy normálható $\hat{\rho}$ sűrűségoperátor ($\text{Tr} \hat{\rho} = 1$) egy $|u_k\rangle$ tetszőleges valódi ortonormált bázisban általában nem diagonális:

$$\hat{\rho} = \sum_{k,l} \rho_{kl} |u_k\rangle\langle u_l|, \quad (6.55)$$

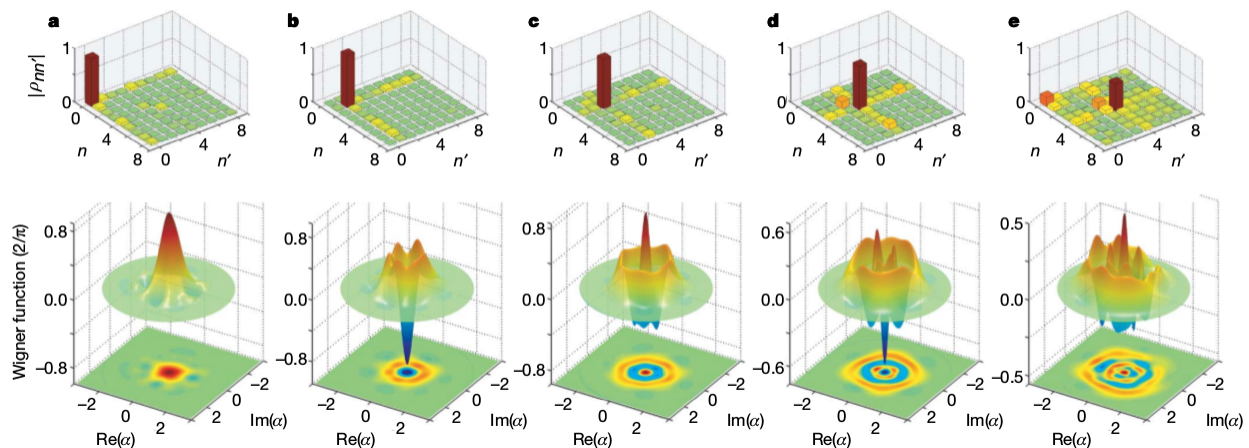
de szigorúan diagonalizálható. Érdekes módon azonban a koherens állapotok túlteljes rendszerén *minden* $\hat{\rho}$ sűrűségoperátor formálisan diagonális alakúvá tehető egy alkalmasan választott $P_{\hat{\rho}}(\alpha)$ “függvénnyel”, ami azt jelenti, hogy teljesül a

$$\hat{\rho} = \int P_{\hat{\rho}}(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha \quad (6.56)$$

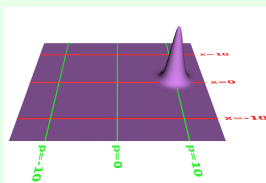
egyenlőség. A függvény szó idézőjelét az indokolja, hogy a $P_{\hat{\rho}}(\alpha)$ általában erősen szinguláris kifejezés. Egy $|\alpha_0\rangle$ koherens állapotra láthatólag

$$P_{|\alpha_0\rangle}(\alpha) = \delta^2(\alpha - \alpha_0), \quad (6.57)$$

azaz már a legklasszikusabbnak tekinthető tiszta állapotokra, tehát a koherens állapotokra sem egy valódi függvény. Még inkább így van ez pl. egy számállapot esetén, ahol a megfelelő P függvény a Dirac-delta deriváltjaival adható meg. (A részleteket illetően az irodalomra utalunk.) A P függvény csak bizonyos keverék állapotok esetén válik a szokásos értelemben függvénnyé, pl. termikus állapotok esetén, ezért használata is leginkább azok leírásánál hasznos.

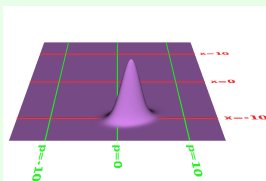


6.5. ábra. Az alsó ábráson az S. Haroche (Párizs) csoportja által végzett kísérletek során előállított számállapotok mérési eredmények alapján rekonstruált Wigner-függvénye látható. Míg a felső ábrán az állapot redukált sűrűségmátrixának elemeit követhetjük. Lásd 11 fejezet. **Forrás:** <http://www.nature.com/nature/journal/v455/n7212/pdf/nature07288.pdf>

**Animáció:**

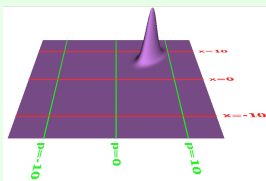
Ez a gif animáció *koherens állapot* Wigner-függvényének időfejlődését szemlélteti. **Forrás:** <http://www.av8n.com/physics/coherent-states.htm>

<http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/demos/glauber-movie.gif>

**Animáció:**

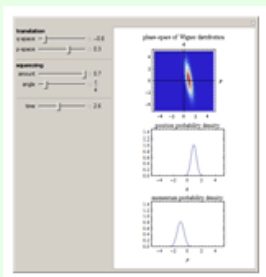
Ez a gif animáció *amplitúdó préselt állapot* (lásd 7 fejezet) Wigner-függvényének időfejlődését szemlélteti. **Forrás:** <http://www.av8n.com/physics/coherent-states.htm>

<http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/demos/glauber-movie-squeezed.gif>

**Animáció:**

Ez a gif animáció *fázis préselt állapot* (lásd 7 fejezet) Wigner-függvényének időfejlődését szemlélteti. **Forrás:** <http://www.av8n.com/physics/coherent-states.htm>

<http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/demos/glauber-movie-squeezed-90.gif>

**Animáció:**

Ezen az animáción az un. préselt állapot (lásd 7 fejezet) Wigner-függvényének időfejlődését követhetjük nyomon. Az egyes változókra való kiintegrálással kapjuk a másik változó valószínűségi-sűrűségfüggvényét, amelyet szintén ábrázoltunk.

<http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/demos/>

[TimeEvolutionOfSqueezedQuantumStatesOfTheHarmonicOscillator-dp.html](http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/demos/TimeEvolutionOfSqueezedQuantumStatesOfTheHarmonicOscillator-dp.html)

Ellenőrző kérdések

1. Mire vonatkozik a Liouville egyenlet?
2. Mit jelent a Weyl szimmetrizálás a kvantummechanikában?
3. Mit nevezünk karakterisztikus függvénynek?

4. Milyen előírás vezet egy kvantumállapot Wigner-függvényéhez?
5. Soroljuk föl a Wigner-függvény tulajdonságait?
6. Hogyan definiáljuk egy módus állapotának Wigner-függvényét?
7. Mik a jellegzetességei egy koherens állapot Wigner-függvényének?
8. Mik a jellegzetességei egy számállapot Wigner-függvényének?
9. Mik a jellegzetességei egy termikus állapot Wigner-függvényének?
10. Milyen további kvázi valószínűségi sűrűségfüggvényeket szokás használni a mező állapotainak jellemzésére?

7. fejezet

A mező préselt állapotai

7.1. Bevezetés

Az 1980-as évek második felében sikerült először előállítani egy mező módus olyan állapotát, amelyben az egyik kvadratúra szórása kisebb volt mint a vákuumállapotban. Ezek a préseltnek nevezett (angolul squeezed) állapotok rendkívül nagy érdeklődést váltottak ki, akkor elsősorban pusztán a létezésük lehetőségének bizonyítottsága miatt. Elméletileg egy ilyen állapot hullámfüggvényét már a kvantumelmélet születése idején fölírt Schrödinger egy kvantummechanikai oszcillátorra, de kvantumoptikai szempontból csak az 1970-es években kezdődött meg ezek tanulmányozása. A fejezetben először megadjuk a préselt állapotok definícióját, majd megvizsgáljuk a tulajdonságaikat, tárgyaljuk az ilyen mezőállapotok keltésnek és detektálásának módját, végül megemlítünk néhány alkalmazást.

7.2. A kvadratúra operátorok

Tekintsünk egyetlen módust, és a nem önadjungált a és $a^\dagger$ operátorok helyett használjuk ismét az

$$X = \frac{a + a^\dagger}{2}, \quad \text{és} \quad Y = \frac{a - a^\dagger}{2i}. \quad (7.1)$$

kvadratúra operátorokat, melyek segítségével egyetlen módus elektromos térerősség-operátort az

$$\mathbf{E} = 2 \mathcal{E}_\omega [X \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - Y \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (7.2)$$

valós alakba lehet írni. Az X és Y kommutátora

$$[X, Y] = \frac{i}{2}. \quad (7.3)$$

és ennek nem eltűnő volta miatt az X és Y operátornak megfelelő két fizikai mennyiség nem mérhető egyidejűleg, és a szórásaik szorzatára fönnáll a

$$\Delta X \Delta Y \geq \frac{1}{4} \quad (7.4)$$

Heisenberg típusú egyenlőtlenség. Mint a 4. fejezetben láttuk, egy $|\alpha\rangle$ koherens állapotban mind az X mind az Y operátor szórása $1/2$. Ebből az is látszik, hogy minden koherens állapot, beleértve az $|\alpha =$

$0\rangle = |0\rangle$ vákuumállapotot is, egy minimális bizonytalanságú, úgynevezett intelligens állapot, amelyre a két szórás szorzata éppen a minimum. Ezért szoktuk az $|\alpha\rangle$ koherens állapotot gyakran úgy ábrázolni, hogy a komplex síkon az α pont körül egy $\Delta X = \Delta Y = 1/2$ sugarú kört rajzolunk, s ez az amit a Wigner függvény segítségével egzakt módon is megfogalmazunk.

Nyilvánvaló módon azonban elgondolhatóak olyan állapotok is, amelyekre valamelyik kvadratúra szórása kisebb mint $1/2$, azaz kisebb mint a vákuumállapotban, de ez a (7.4) egyenlőtlenség miatt természetesen csak a másik kvadratúra szórásának a rovasára történhet, amelynek viszont ez esetben $1/2$ -nél nagyobbak kell lennie. Az ilyen állapotokat *préselt* – az angol terminológiával *squeezed* – állapotoknak nevezzük. Az alábbiakban ezek közül olyan préselt állapotokat fogunk vizsgálni, amelyre a szórások szorzata éppen a minimális $1/4$, (ezért ezek még ún. intelligens állapotok is lesznek), de a két szórás a préselés miatt nem egyezik meg. egymással.

7.3. Préselt vákuum és préselt koherens állapotok

A préselt állapotok bevezetéséhez tekintsük az:

$$S(z) = \exp \left(\frac{1}{2} z (a^\dagger)^2 - \frac{1}{2} z^* a^2 \right) \quad (7.5)$$

“préselő” (squeezing) operátort, ahol

$$z = r e^{2i\theta} \quad (7.6)$$

tetszőleges komplex szám, amelyben $r \geq 0$ valós. Amint az könnyen belátható:

$$S^\dagger(z) = S(-z) = S^{-1}(z), \quad (7.7)$$

tehát a préselő operátor unitér. A 4. fejezetben tárgyalt (4.93) operátorazonosság segítségével megmutathatók a következő összefüggések:

$$S^\dagger(z) a S(z) = a \cosh r + a^\dagger e^{2i\theta} \sinh r =: a_z \quad (7.8)$$

$$S^\dagger(z) a^\dagger S(z) = a^\dagger \cosh r + a e^{-2i\theta} \sinh r =: a_z^\dagger \quad (7.9)$$

Az $S(z)$ operátorral a *préselt vákuum* állapotot a következőképpen definiáljuk:

$$|0, z\rangle := S(z)|0\rangle. \quad (7.10)$$

Ez az állapot, mivel a normált vákuum állapotból egy unitér operátor transzformálja, szintén normált.

Mint látni fogjuk, a préselt vákuum legfontosabb tulajdonsága, hogy az $S(r e^{2i\theta})$ operátorral a $\theta + \pi/2$ irányú kvadratúra szórását lecsökkentjük, “összepréseljük” a θ irányú kvadratúra szórásának a rovasára. A θ illetve a $\theta + \pi/2$ irányú kvadratúrák operátorait az

$$X_\theta = \frac{1}{2}(a e^{-i\theta} + a^\dagger e^{+i\theta}) = X \cos \theta + Y \sin \theta, \quad (7.11)$$

$$Y_\theta = X_{\theta+\pi/2} = \frac{1}{2i}(a e^{-i\theta} - a^\dagger e^{+i\theta}) = -X \sin \theta + Y \cos \theta \quad (7.12)$$

összefüggésekkel definiáljuk.

7.1 Feladat: Igazoljuk, hogy $[X_\theta, Y_\theta] = i/2$ a θ értékétől függetlenül.

Préselt vákuum állapotban ezen operátorok várható értéke eltűnik, hasonlóan a közönséges vákuumhoz, ezért is szerepel a nevében a vákuum.

Valóban, mivel

$$S^\dagger(z) X_\theta S(z) = \frac{1}{2}(ae^{-i\theta} \cosh r + a^\dagger e^{+i\theta} \sinh r) + \frac{1}{2}(a^\dagger e^{+i\theta} \cosh r + ae^{-i\theta} \sinh r) = X_\theta e^r, \quad (7.13)$$

illetve

$$S^\dagger(z) Y_\theta S(z) = Y_\theta e^{-r}. \quad (7.14)$$

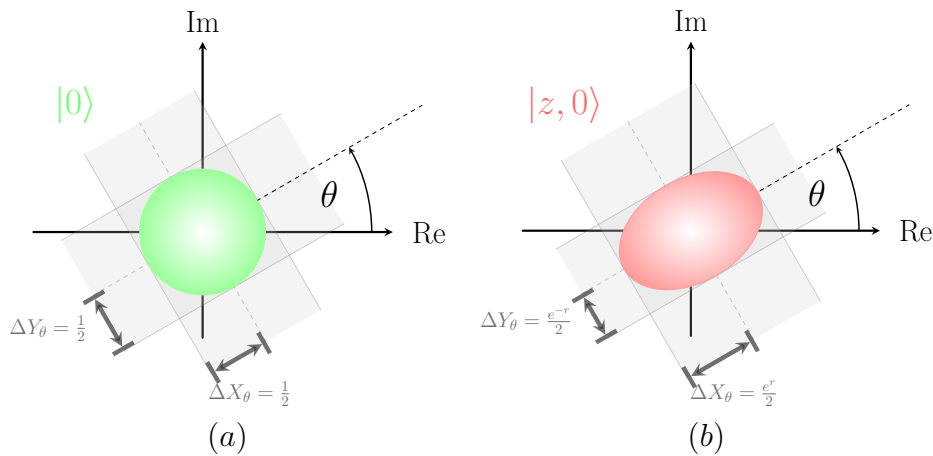
Ezért

$$\langle 0, z | X_\theta | 0, z \rangle = \langle 0 | S^\dagger(z) X_\theta S(z) | 0 \rangle = \langle 0 | X_\theta | 0 \rangle e^r = 0, \quad (7.15)$$

hiszen a és $a^\dagger$ várható értéke a vákuumban eltűnik. Hasonlóan

$$\langle 0, z | Y_\theta | 0, z \rangle = 0, \quad (7.16)$$

és ez tetszőleges θ esetén, azaz speciálisan X -re és Y -ra is, fennáll.



7.1. ábra. (a) Vákuum állapot és (b) Préselt vákuum állapot szemléltetése a komplex számsíkon.

A préselés hatása a szórásokban mutatkozik meg.

$$\begin{aligned} (\Delta X)_{|0,z\rangle}^2 &= \langle 0, z | X_\theta^2 | 0, z \rangle = \langle 0 | S^\dagger(z) X_\theta^2 S(z) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | S^\dagger(z) X_\theta S(z) S^\dagger(z) X_\theta S(z) | 0 \rangle = \langle 0 | X_\theta^2 | 0 \rangle e^{2r}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Az X_θ operátor négyzetét a (7.11) kifejezésből kiszámítva az a -k és $a^\dagger$ -ok szorzatait tartalmazó tagok közül a valódi vákuumban csak az $aa^\dagger/4$ várható értéke nem tűnik el és éppen $1/4$ -et ad. Így

$$\langle 0, z | X_\theta^2 | 0, z \rangle = \frac{e^{2r}}{4}, \quad \langle 0, z | Y_\theta^2 | 0, z \rangle = \frac{e^{-2r}}{4}. \quad (7.18)$$

Tehát az $S(re^{2i\theta})$ operátorral préselt vákuumban a θ irányú kvadratúra szórása e^r szeresére nő, míg a rá merőleges kvadratúra szórása ugyanilyen arányban lecsökken. Az eredeti X és Y kvadratúrák szórásnégyzete ezeknek (7.11) és (7.12) alapján X_θ és Y_θ -val való $X = X_\theta \cos \theta - Y_\theta \sin \theta$, $Y = Y_\theta \cos \theta + X_\theta \sin \theta$, kifejezése alapján:

$$\langle 0, z | X^2 | 0, z \rangle = \langle 0, z | X_\theta^2 | 0, z \rangle \cos^2 \theta + \langle 0, z | Y_\theta^2 | 0, z \rangle \sin^2 \theta - \langle 0, z | X_\theta Y_\theta + Y_\theta X_\theta | 0, z \rangle \cos \theta \sin \theta. \quad (7.19)$$

Az utolsó tagban a két operátor várható értékének összege ellentétes előjelű eredményt ad, ezért

$$(\Delta X)_{|0,z\rangle}^2 = \frac{e^{2r}}{4} \cos^2 \theta + \frac{e^{-2r}}{4} \sin^2 \theta. \quad (7.20)$$

Ennek alapján a $z = re^{2i\theta}$ paraméterrel jellemzett préselt vákuumot úgy szokás ábrázolni, hogy az xy síkon egy origó középpontú ellipszist rajzolunk, amelynek nagytengelye az x iránnyal θ szöget zár be, és a tengelyének hossza e^{2r} , míg a kistengely hossza e^{-2r} . Ellipszisünk egy a θ irányra merőlegesen összenyomott (préselt) körnek tekinthető.

Az előzőek általánosításaként egy ún. *préselt koherens állapotot* a következőképpen definiálunk:

$$|\alpha, z\rangle = D(\alpha)|0, z\rangle = D(\alpha)S(z)|0\rangle. \quad (7.21)$$

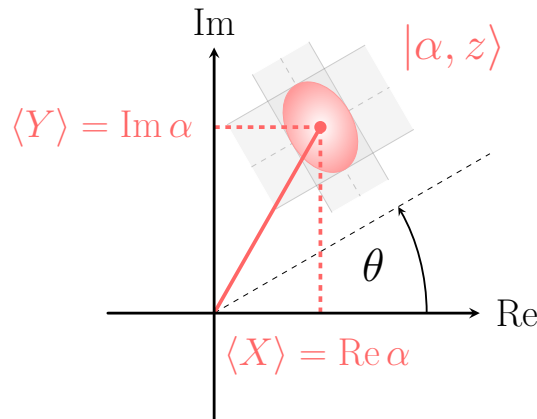
Vagyis először “összenyomjuk” a vákuumállapotot, majd eltoljuk azt az α paraméternek megfelelő módon. Egy préselt koherens állapotban az X kvadratúra várható értéke:

$$\langle \alpha, z | X | \alpha, z \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | S^\dagger(z) D(\alpha)^\dagger (a + a^\dagger) D(\alpha) S(z) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle 0 | (a_z + \alpha + a_z^\dagger + \alpha^*) | 0 \rangle = \text{Re}(\alpha). \quad (7.22)$$

És hasonlóan:

$$\langle \alpha, z | Y | \alpha, z \rangle = \text{Im}(\alpha). \quad (7.23)$$

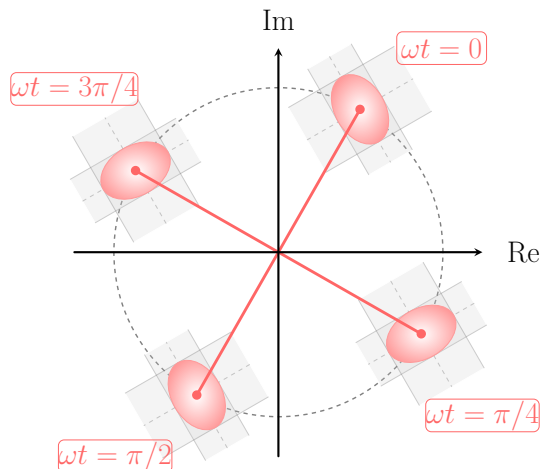
A szórások kiszámítását nem részletezzük, megmutatható, hogy azok ugyanakkorák mint a préselt vákuumban.



7.2. ábra. Préselt koherens állapot szemléltetése a komplex számsíkon.

A préselt koherens állapot időfejlődését is levezetés nélkül közöljük:

$$|\alpha, z\rangle_t = |\alpha(0)e^{-i\omega t}, z(0)e^{-2i\omega t}\rangle. \quad (7.24)$$



7.3. ábra. Préselt koherens állapot időfejlődése négy kiragadott időpillanatban.

A préselt állapotoknak az az igen hasznos tulajdonsága, hogy egy ilyen állapotban a préselt kvadrátúra értékét pontosabban lehet mérni mint pl. egy koherens állapotban. Ez az előny akkor jelentkezik, ha a mérőberendezés zaja olyan kicsi, hogy a mérés pontatlanságát már csak a kvantumos szórás nemeltűnő volta határolja be. Ha ilyen esetben biztosítani lehet, hogy a mérés mindig a préselt és ne a nyújtott kvadrátúrát regisztrálja, pl. egy fázisérzékeny detektálással, akkor a mérés zajosságát csökkenteni tudjuk, és annak a határozatlansági reláció nem szab korlátot.

A $|\alpha_0, z\rangle = D(\alpha_0)S(z)|0\rangle$ kvadrátúra préselt állapot Wigner-függvénye analitikusan meghatározható, az eredmény a $\theta = 0$ esetben, az $\alpha_0 = x_0 + iy_0$, $z = e^r$ paraméterezéssel

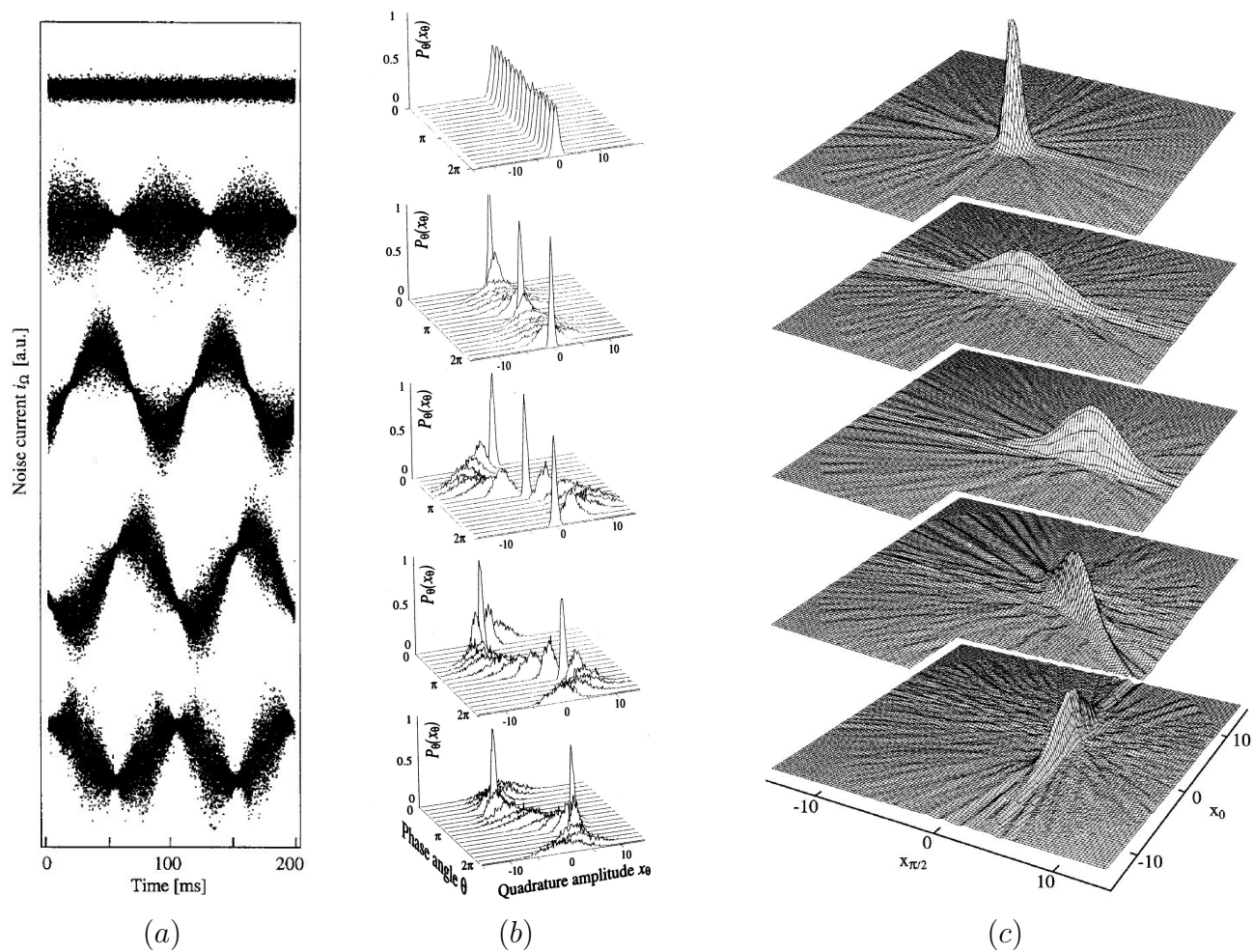
$$W_{|\alpha_0, z\rangle}(\alpha) = W_{|\alpha_0, z\rangle}(x, y) = \frac{2}{\pi} \exp \left\{ -2 \frac{(x - x_0)^2}{e^{2r}} - 2 \frac{(y - y_0)^2}{e^{-2r}} \right\}. \quad (7.25)$$

Ha a préselt koherens állapotban pl. a $\theta = 0$ és az $\text{Im}\alpha = 0$, az azt jelenti, hogy a bizonytalansági ellipszis hossz tengelye sugárirányú, így fázisának bizonytalansága kisebb míg az amplitúdó bizonytalansága nagyobb mint egy koherens állapotban, ez egy préselt fázisú vagy másnéven fázispréselt állapot. Ha a fordított szélső eset áll fenn azaz $\theta = 0$ és $\text{Re}\alpha = 0$, az azt jelenti, hogy a bizonytalansági ellipszis a sugárirányban van összenyomva, ez egy amplitúdó préselt állapot.

Az $|\alpha, z\rangle$ állapot kifejezhető a számállapotok szerint:

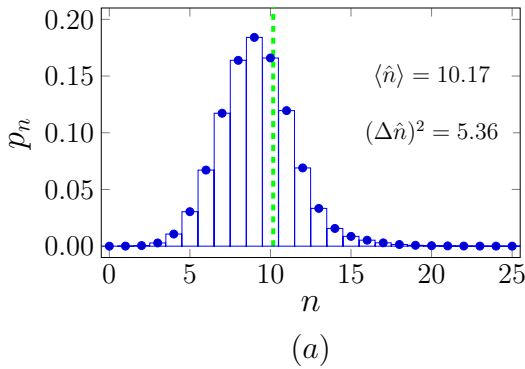
$$|\alpha, z\rangle = \sum_n c_n(\alpha, z) |n\rangle \quad (7.26)$$

azonban bonyolultsága miatt ezt a kifejtést, azaz a $c_n(\alpha, z)$ együtthatók explicit alakját itt nem részletezzük, lásd pl. [4]. Ehelyett a 7.5 ábrán bemutatjuk a kifejtési együtthatók abszolút értékének négyzetét két esetben az n szám függvényében. Ezek tehát azt adják meg, hogy egy préselt koherens állapotban milyen valószínűséggel mérjük a fotonok számát n -nek.

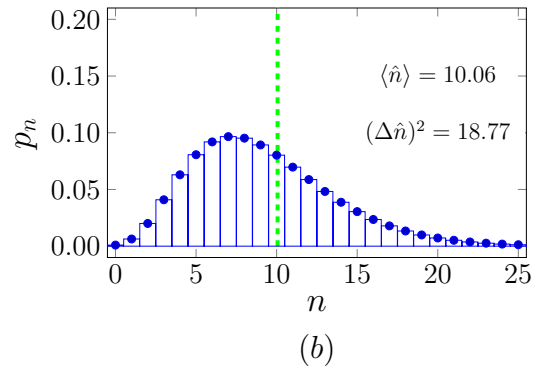


7.4. ábra. (a) Az elektromos mező zaja különböző módon préselt állapotokban. A legfelső állapot a vákuum, a következő a préselt vákuum, a harmadik egy fázispréselt, az ötödik egy amplitúdópréselt állapot. A negyedik állapotban a 48° -os kvadrátúra préselt, azaz $\theta = 138^\circ$. (b) Az öt állapot oszcilláló hullámcsoomagja. (c) Az öt állapot Wigner-függvénye. A ábrán látszó „gyűrődések” a kísérleti pontatlanságok következményei. **Forrás:** https://en.wikipedia.org/wiki/Squeezed_coherent_state

Amplitúdó préselt állapot: $\alpha = \sqrt{8.9}$, $r = 0.5$, $\theta = \pi/6$



Fázis préselt állapot: $\alpha = \sqrt{8.9}$, $r = 0.5$, $\theta = 4\pi/6$



7.5. ábra. Példák (a) szub-Poisson (4.46), illetve (b) szuper-Poisson (4.47) eloszlást mutató préselt állapotokra.

A fotonszám várható értéke egy préselt állapotban:

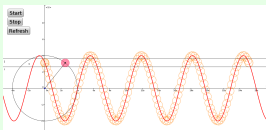
$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r \quad (7.27)$$

azaz préselt vákuumban ($\alpha = 0$) sem tűnik el.

7.2 Feladat: Vezessük le a (7.27) összefüggést.



Animáció:

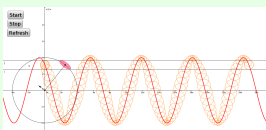


Ezen az animáción az Y kvadratúra várható értékének és szórásának időbeli változását figyelhetjük meg az $|\alpha = 4\rangle$ *koherens állapot* esetén.

<http://ggbtu.be/mtCf6EF63>



Animáció:

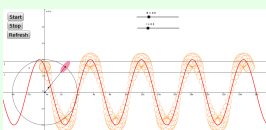


Ezen az animáción az Y kvadratúra várható értékének és szórásának időbeli változását figyelhetjük meg $|\alpha = 4, z = 0.5 e^{2i \cdot 2.5}\rangle$ *amplitúdó préselt állapot* esetén.

<http://ggbtu.be/msQN7IFyI>

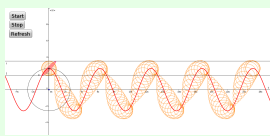


Animáció:



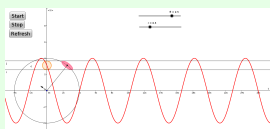
Ezen az animáción az Y kvadratúra várható értékének és szórásának időbeli változását figyelhetjük meg $|\alpha = 4, z = 0.5 e^{2i \cdot 0.9}\rangle$ *fázis préselt állapot* esetén.

<http://ggbtu.be/mXguLeyzY>

**Animáció:**

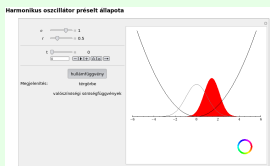
Ezen az animáción az Y kvadrátúra várható értékének és szórásának időbeli változását figyelhetjük meg $|\alpha = 2.6, z = 0.9 e^{2i \cdot 0.8}\rangle$ amplitúdójában és fázisában is préselt állapot esetén.

<http://ggbtu.be/mf0E9x0Q1>

**Animáció:**

Ezen az interaktív Geogebra animáción az Y kvadrátúra várható értékének és szórásának időbeli változását figyelhetjük meg tetszőleges $|\alpha, z = r e^{2i\theta}\rangle$ préselt állapot esetén, ahol r és θ paraméterezi a préselés mértékét.

<http://ggbtu.be/mkYkGtVjn>

**Animáció:**

Az interaktív animáció segítségével egy módus préselt állapotát tanulmányozhatjuk, a megfelelő hullámfüggvény segítségével (lásd 2 fejezet végén).

<http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/interactive/>

HarmonikusOscillatorPreseltAllapot.nbp

7.4. Préselt fény előállítás parametrikus konverzióval

Kérdés az, hogy hogyan lehet a valóságban egy préselt állapotot létrehozni. Mivel az $S(z)$ operátor a fotont keltő és eltüntető operátort a négyzetben tartalmazza, ezért kétfotonos folyamatokban várhatjuk préselt fény megjelenését. Préselt vákuumot először 1985-ben sikerült előállítania Slushernek és munkatársainak úgynevezett négyhullámkeveréssel Na gőzben [7]. Ezt követően Kimble és munkatársai egyszerűbben, optikai parametrikus erősítővel generáltak préselt vákuumot 1987-ben [8].

**Olvasnivaló:**

Cikkek a préselt fény első kísérleti előállításáról: Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.55.2409>
Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.2520>

Alább egy olyan kísérletet mutatunk be, amelyben Mlynek és munkatársai intenzív préselt állapotot is létrehoztak és mértek. Az eljárás azon alapszik, hogy egy megfelelően gerjesztett nemlineáris kristály atomjai a beeső 2ω frekvenciájú intenzív fényből két olyan, ω_1 illetve ω_2 körfrekvenciájú nyalábot generálnak, amelyekre érvényes az $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$ összefüggés. Ezt nevezzük parametrikus lekonvertálásnak,

amely az összegfrekvencia keltés fordítottja. Speciális esetben elérhető az $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ úgynevezett degenerált eset. Mint alább megmutatjuk, ez esetben a lekonvertált módus préselt állapotú lesz.

A *degenerált* parametrikus folyamatot jó közelítéssel a következő modell-Hamilton operátorral lehet leírni:

$$H = \hbar 2\omega a_2^\dagger a_2 + \hbar \omega a_1^\dagger a_1 - i\hbar \chi^{(2)} (a_1^2 a_2^\dagger - a_1^{\dagger 2} a_2) \quad (7.28)$$

Az első tag a gerjesztő 2ω frekvenciájú a_2 módust írja le, ennek keltő és eltüntető operátorát jelöli $a_2^\dagger$ és a_2 . A második tag a lekonverzió következtében megjelenő fele akkora frekvenciájú a_1 módus. A harmadik tag a nemlineáris kristály által létrehozott kölcsönhatás a módusok között. Itt $\chi^{(2)}$ a másodrendű nemlineáris szuszceptibilitás, az $a_1^{\dagger 2} a_2$ tag azt jelzi, hogy a kristályban eltűnik egy foton a 2ω frekvenciájú a_2 módusban és helyette keltődik kettő az a_1 módusban, illetve a fordított folyamat is lehetséges, azaz eltűnik két a_1 foton és keltődik egy a_2 típusú.

Most alkalmazzuk az úgynevezett parametrikus közelítést, amelyben a H operátor várható értékét vesszük az a_2 gerjesztő módus $|\beta_0 e^{-2i\omega t}\rangle$ koherens állapotában (itt β_0 állandó). Ennek jogosságát az a fizikai tény jelzi, hogy ez a módus egy erős klasszikus mező, amelynek kvantumos jellemzőit elegendő átlagosan figyelembe venni. A $\hbar 2\omega a_2^\dagger a_2$ -ből származó $\hbar 2\omega |\beta|^2$ állandó tagot elhagyva, az operátorunk alakja

$$H^{PA} = \hbar \omega a_1^\dagger a_1 - i\hbar (\eta^* a_1^2 e^{2i\omega t} - \eta a_1^{\dagger 2} e^{-2i\omega t}) = H_0 + K, \quad (7.29)$$

ahol $\eta = \beta_0 \chi^{(2)}$. Figyeljük meg, hogy a K kölcsönhatási Hamilton operátor $\exp\{-iK/\hbar\}$ alakú exponencializálása egy olyan evolúciós operátort jelent amely egy $S(2\eta e^{-2i\omega t})$ préselő operátornak felel meg.

Az a_1 időfüggését megadó mozgásegyenlet Heisenberg képben

$$\dot{a}_1 = \frac{i}{\hbar} [H^{PA}, a_1], \quad (7.30)$$

amiből a fönti H^{PA} Hamilton operátorral a következő mozgásegyenletet kapjuk:

$$\dot{a}_1 = -i\omega a_1 + 2\eta a_1^\dagger e^{-2i\omega t}. \quad (7.31)$$

Vezessük be most a

$$b(t) = a_1(t) e^{i\omega t} \quad (7.32)$$

új operátort, amelynek időbeli változását csak a parametrikus kölcsönhatás okozza. Másképpen szólva itt áttérünk egy kölcsönhatási képbe. b mozgásegyenlete ebből a definícióból és az (7.31) egyenletből:

$$\dot{b} = 2\eta b^\dagger. \quad (7.33)$$

Vezessük be az $\eta = g e^{2i\gamma}$ jelölést. Az ennek kapcsán képezhető

$$X_b = \frac{b e^{-i\gamma} + b^\dagger e^{i\gamma}}{2}, \quad Y_b = \frac{b e^{-i\gamma} - b^\dagger e^{i\gamma}}{2i} \quad (7.34)$$

kvadratúra operátorokra vonatkozó mozgásegyenletek alakja:

$$\dot{X}_b = 2g X_b, \quad \dot{Y}_b = -2g Y_b, \quad (7.35)$$

melyek megoldása:

$$X_b = X_b(0) e^{2gt}, \quad Y_b = Y_b(0) e^{-2gt}. \quad (7.36)$$

Ha a módus elektromos térerősség operátorában is áttérünk az X_b és az Y_b változókra, akkor eredményül a

$$\mathbf{E} = 2\mathcal{E}_\omega \epsilon (X_b(t) \sin \omega t - Y_b(t) \cos \omega t) = 2\mathcal{E}_\omega \epsilon (X_b(0)e^{2gt} \sin \omega t - Y_b(0)e^{-2gt} \cos \omega t) \quad (7.37)$$

kifejezést kapjuk, ami mutatja, hogy a térerősség kvadratúra komponenseinek amplitúdója változik a parametrikus kölcsönhatás következtében, éspedig úgy, hogy az egyik kvadratúra amplitúdója nő, a másiké csökken.

Egyszerű számítás adja a két kvadratúra szórását a vákuumállapotban:

$$\Delta X_b = \frac{e^{2gt}}{2}, \quad \Delta Y_b = \frac{e^{-2gt}}{2}, \quad (7.38)$$

ami mutatja, hogy a kölcsönhatás nyomán valóban préselt vákuumot kapunk és a kölcsönhatás erősségétől függően a préselés mértéke időben nő. Az X_b -re és Y_b re vonatkozó mozgásegyenletek megoldása $b(t)$ -re és $b^\dagger(t)$ -re a következő időfüggést adja:

$$b(t) = b(0) \cosh(2gt) + b(0)^\dagger e^{2i\gamma} \sinh(2gt), \quad (7.39)$$

$$b^\dagger(t) = b(0) e^{-2i\gamma} \sinh(2gt) + b(0)^\dagger \cosh(2gt). \quad (7.40)$$

Mivel $b(0) = a_1(0)$, az fotonszám-operátor időfüggése a következő:

$$\begin{aligned} \hat{n}(t) &= a_1^\dagger(t) a_1(t) = b^\dagger(t) b(t) = \\ &= [a_1(0) e^{-2i\gamma} \sinh(2gt) + a_1(0)^\dagger \cosh(2gt)] [a_1(0) \cosh(2gt) + a_1(0)^\dagger e^{2i\gamma} \sinh(2gt)]. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Ennek várható értéke a vákuumban:

$$\langle 0 | \hat{n}(t) | 0 \rangle = \sinh^2(2gt). \quad (7.42)$$

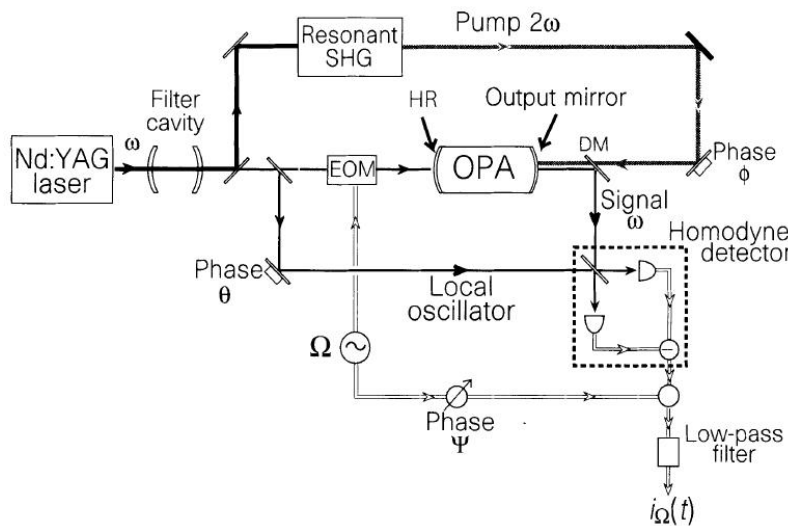
Egy valódi kísérletben a kölcsönhatás természetesen csak véges ideig tart, ezért a préselés mértéke is véges marad.

A fentebb már említett Mlynek-féle kísérletben [9] a gerjesztő nyalábot egy folytonos üzemű 500 mW teljesítményű 1,06 μm hullámhosszon működő Nd:YAG lézer szolgáltatva (lásd 7.7 ábra). A lézerfényt először spektrálisan szűrték egy Fabry–Perot-rezonátorral, majd három részre osztották. Az egyik nyalábot egy kristályban másodharmonikus keltésre (SHG) használták az ennek kimenetén keletkező frekvenciakétszerezett 530 nm-es fény szolgált pumpáló forrásként a berendezés fő részét képező optikai parametrikus erősítő (OPA) számára, amely egy optikai rezonátorba helyezett nemlineáris kristály. A jelzett kísérletben LiNbO_3 -at használtak. A beeső 2ω frekvenciájú intenzív fény a kristály atomjaival kölcsönhatva két olyan ω_1 illetve ω_2 körfrekvenciájú fotont generál, amelyekre érvényes az $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$ összefüggés. Itt történik tehát a parametrikus lekonvertálás. Speciális esetben elérhető az $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ úgynevezett *degenerált* eset, amikor is az OPA kimeneti tükrén – amely itt megegyezett a gerjesztést is becsatoló tükörrel – a préselt módus megjelenése várható. A DM jelű tükör a kimenetből kiszűrte a 2ω körfrekvenciájú pumpa komponenst, az ω körfrekvenciájú lekonvertált nyalábot viszont a szaggatott vonallal jelzett detektorrészbe irányította. A detektálásra egy úgynevezett helyi oszcillátorként az 1.06 μm -es alapharmonikus másik részét használták. Ha ez utóbbit és a detektálandó préselt módust egy nyalábosztón (féligáteresztő tükrön) összekeverik, akkor – mint azt a következő pontban megmutatjuk – az ábrán látható fotodetektorok jeleinek különbsége függeni fog a préselés mértékétől. A nyaláb



7.6. ábra. A préselt fény kísérleti megvalósításának úttörői: Richard E. Slusher, H. Jeff Kimble és Jürgen Mlynek. **Forrás:** <http://www.gtqi.gatech.edu/people/GTRI.shtml>, <http://quantumoptics.caltech.edu/people/hjk.html>, https://www.daad.de/alumni/pics/vip/Juergen_Mlynek.jpg

harmadik, középső része az $\Omega = 2,5\text{MHz}$ -en működő EOM elektrooptikai modulátoron keresztül jut a préselt fény forrásául szolgáló kristályba. Ennek az a szerepe, hogy az ω körfrekvenciájú komponenst modulálva, $\omega \pm \Omega$ frekvenciájú oldalsávokat gerjessen. A módusok irány szerinti analízisével kimutatható, hogy az intenzív préselt komponensek az oldalsávokban jelentkeznek, az EOM kitakarásával az ω körfrekvencián préselt vákuum lép ki és detektálódik a DM tükrön való eltérítés után.



7.7. ábra. A Mlynek féle kísérleti összeállítás vázlatos rajza. **Forrás:** <http://gerdbreitenbach.de/gallery/index.html>

7.5. A préselt fény mérése homodyn detektálással

A fent elemzett kísérletben a mérendő jelet egy nyalábosztón összekeverték a referenciajellel, melynek frekvenciája itt azonos a mérendő jel frekvenciájával. Ez utóbbit a rádiótechnikából kölcsönzött

terminológiával *helyi oszcillátornak* szokás nevezni, a két jel keverését használó eljárást pedig – a frekvenciák azonosságára utalva – *homodyn detektálásnak*. Jelöljük a parametrikus oszcillátor kimenetén megjelenő a módus eltüntető operátorát a -val, a referenciaként használt jel megfelelő operátorát pedig b -vel. Legyen a nyalábosztó olyan, hogy a beeső intenzitásnak éppen a felét engedi át, a másik felét pedig visszaveri. Ennek az úgynevezett 50-50-es nyalábosztónak a tulajdonságait a 8. fejezetben részletesen is vizsgálni fogjuk. Amint az látható, a nyalábosztó után a két jel szuperponálódik, s ennek megfelelően az (1) jelű fotodetektorba jutó módus c_1 eltüntető operátorára a

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{e^{i\psi}}{\sqrt{2}}b. \quad (7.43)$$

összefüggés lesz érvényes. Ugyanilyen okból a (2) jelű detektorba a

$$c_2 = -\frac{e^{-i\psi}}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b \quad (7.44)$$

operátornak megfelelő jel jut. Itt föltettük, hogy transzmissziókor nincs fázisugrás, míg reflexiókor a nyalábosztó egy ψ illetve $-\psi$ fázisugrást okoz. A detektorokba jutó intenzitásokat a fotonszám operátorok határozzák meg. A keverő a két intenzitás *különbségét* állítja elő, így lényegében a

$$c_1^\dagger c_1 - c_2^\dagger c_2 = a^\dagger b e^{i\psi} + b^\dagger a e^{-i\psi} \quad (7.45)$$

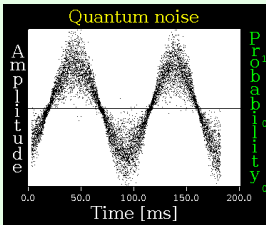
operátornak megfelelő fizikai mennyiséget méri. A helyi oszcillátor referenciajele általában egy erős koherens jel, ezért annak b operátorát helyettesíthetjük egy klasszikus $|\beta|e^{i\chi}$ komplex amplitúdóval. Bevezetve a $\theta = \psi + \chi$ jelölést, látható, hogy a detektor az

$$X_\theta = \frac{1}{2}(ae^{-i\theta} + a^\dagger e^{i\theta}) \quad (7.46)$$

kvadratúra operátornak megfelelő mennyiséget méri. A préselés mértékét X_θ szórása határozza meg, ami a detektor jelének szórásával egyezik meg. A θ fázist, azaz a préselés illetve a nyújtás mértékét a pumpáló fényt a nyalábosztóra irányító tükör kis mozgásával lehetett változtatni (ld. ábrát). A fázist a tükör fordításával $\pi/100$ rad/ms sebességgel mozgatták és a kimenő jelben a megjelenő kvantumbizonytalanság ezzel a sebességgel változott.



Animáció:



A 6. pontban említett java animáció összefoglalja a 5.3 ábrán már vázolt mérési eredményeket a fény különböző állapotaiban (vákuum, koherens, préselt vákuum, amplitúdó préselt fény ...)

<http://gerdbreitenbach.de/gallery/index.html>

7.6. A préselt fény alkalmazása

Fázispréselt fény használata előnyös lehet olyan méréseknél, ahol az optikai fázis pontos meghatározása fontos. Fázismérés tipikusan egy interferométerben történik és annak pontosságát – ha minden

hagyományos zajt sikerül is kiküszöbölni – a kvantummechanikai bizonytalanság behatárolja. $|\alpha\rangle$ állapotú koherens fény használata esetén a fázis bizonytalansága $1/|\alpha|$, mert a fázistéren az $|\alpha|$ sugarú kör szélessége ilyen arányban skálázódik a sugár, azaz a mező amplitúdójának növelésével. Fázispréselt fény alkalmazása esetén ez a bizonytalanság csökkenthető.



7.8. ábra. A Virgo gravitációs-hullám detektor madártávlatból. A Michelson interferométer egymásra merőleges karjai 3 km hosszúak. A lézervény a karok végéről többször oda-vissza verődve összesen mintegy 120 km-nyi optikai utat tesz meg. A Virgo detektor az EGO, azaz European Gravitational Observatory területén található Pisa mellett. **Forrás:** <http://virgopisa.df.unipi.it/>

Ennek lehetősége különösen fontos lehet gravitációs hullámok detektálásánál. Gravitációs hullámokra mint a téridő kontinuum lokális deformációira lehet gondolni, amit nagytömegű csillagászati objektumok gyorsuló mozgása kelt, és amelyek fénysebességgel haladva terjednek. A téridőnek ez a torzulása azonban igen csekély, a gravitációelmélet becslései szerint egy ilyen hullám hatására a bolygónkon egy anyagi objektum két egymásra merőleges irányú méretének relatív megváltozása 10^{-20} nagyságrendű, így ennek kimutatása nagyon nehéznek látszik. Mindazonáltal több nagy Michelson interferométer is működik jelenleg ilyen céllal a Földön, mindegyikük esetén az interferométer karjai több km hosszúak. Egy gravitációs hullám azt idézheti elő hogy az egyik kar megnyúlik míg a rá merőleges kar összehúzódik, és ez esetleg periodikusan történik, ami az interferenciakép megváltozásában jelentkezne. Egy-egy ilyen műszer valójában egymástól akár sokezer kilométerre lévő több interferométerből is áll, mert csak olyan jelek lennének gravitációs hullámnak minősíthetők, amelyek több interferométerben megfelelő korrelált módon jelentkeznek, ellenkező esetben a mérést valamilyen véletlen zajnak is lehetne tulajdonítani. A fázisbizonytalanság és így az interferencia bizonytalansága nagymértékben csökkenthető ha az interferométer közönséges lézervény helyett fázispréselt nyalábbal működik. Az interferométer tükröi több tíz kilogramm tömegűek azért hogy a Brown mozgásból (bár az egész berendezés vákuumban van) illetve a mező sugárnyomásából származó fluktuációkat kiküszöböljék. Emellett a használt lézerek több száz watt teljesítményűek, hogy így a nagy $|\alpha|$ révén is csökkentsék a fáziszajt. Az egyes detektorokkal: LIGO, VIRGO, GEO600, kapcsolatos részletekről azok honlapján lehet tájékozódni. Mindazonáltal a több tíz éve nagy ráfordításokkal működő berendezésekkel mostanáig (2015 június) nem sikerült gravitációs hullámokat detektálni.



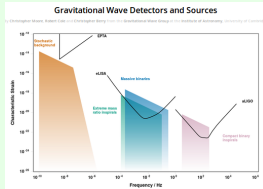
Olvasnivaló:



Az egyes gravitációs hullám detektorok honlapja: LIGO: <http://www.ligo.caltech.edu/> VIRGO: <http://wwwcascina.virgo.infn.it/> GEO600: <http://www.geo600.org/>



Animáció:



Az alábbi linken interaktívan állítható ábrát találunk az egyes gravitációs hullám detektorok érzékenységről. Az érdeklődők további részletes leírást találnak az <http://arxiv.org/abs/1408.0740> linken.

<http://rhcole.com/apps/GWplotter/>

A préselt állapotok egy másik fontos alkalmazási területe az úgynevezett folytonos változós kvantum-informatikai eljárásokhoz kapcsolódik, ezek tárgyalása azonban túlmutat ennek a jegyzetnek a keretein.

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk intelligens állapotnak?
2. Hogyan definiáljuk a préselő operátort?
3. Mit értünk préselt vákuum állapot alatt?
4. Milyen értelemben használjuk a "préselt" szót az állapot jellemzésére?
5. Hogyan definiáljuk a préselt koherens állapotot?
6. Intelligens állapot-e a préselt koherens állapot?
7. Mi a jellegzetessége a préselt koherens állapot Wigner-függvényének?
8. Mit nevezünk parametrikus konverciónak, és miért vezet préselt állapothoz?
9. Hogyan detektálják a préselt állapotot?
10. Milyen mérés esetén lehet hasznos a préselt fény alkalmazása?

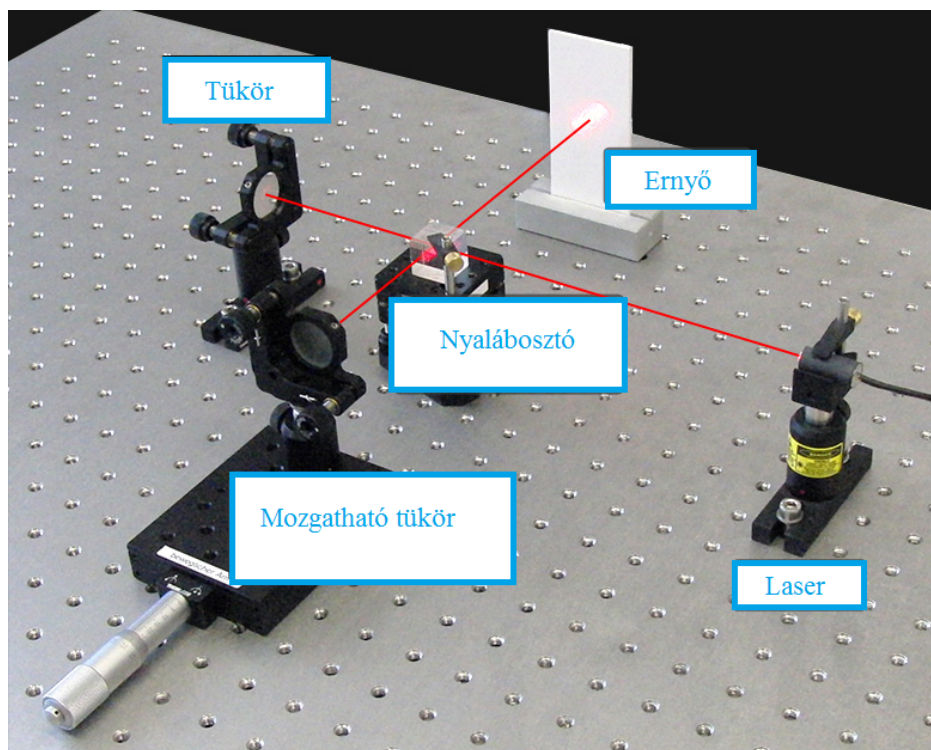
8. fejezet

A veszteségmentes nyalábosztó

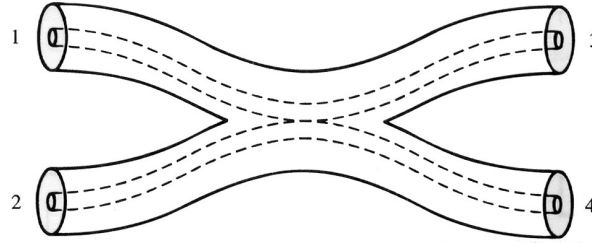
8.1. Bevezetés

Az optikai kísérletek számos válfajában nélkülözhetetlen eszköz a nyalábosztó, amely nem csak az egyes nyalábok szétosztásában, hanem az összeecsatolásában is fontos szerepet játszik. A legegyszerűbb ilyen eszköz egy homogén dielektrikum, amelyről a jelen fejezetben föltesszük, hogy veszteségmentes, azaz nem nyeli el az elektromágneses mezőt, legalábbis a használt frekvenciaintervallumban. Ugyanilyen szerepet játszhat két egymódusú üvegszál, amelyeket alkalmas eszközzel összeecsatolnak.

Látni fogjuk, hogy a kvantumoptika szempontjából a nyalábosztó szintén kulcsszerepet játszik, ezért foglalkozunk vele külön fejezetben.



8.1. ábra. Nyalábosztó egy Michelson-interferométerben.

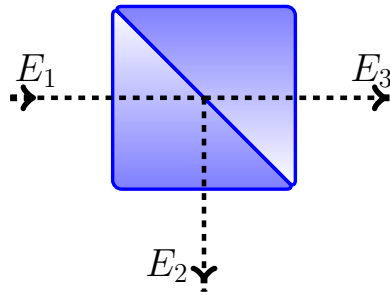


8.2. ábra. Nyalábosztó lehet például az alkalmasan összezsátolt egymódusú üvegszál. **Forrás:** <http://www.ece.umd.edu/~davis/optfib.html>

Vizsgáljuk először a fényhullámot mint klasszikus mezőt. Legyen a nyalábosztóra eső mezőben a térerősség E_1 , a reflektált térerősség E_2 , a transzmittált pedig E_3 . Itt fölteszük egyelőre, hogy lineárisan poláros térről van szó és azt is, hogy a nyalábosztó nem változtat a polarizációs irányon. Ekkor a klasszikus optika szerint a megfelelő térerősségek közötti kapcsolat a

$$E_2 = rE_1, \quad E_3 = tE_1 \quad (8.1)$$

képletekkel adható meg, ahol t és r , az *amplitúdókra* vonatkozó átengedési és visszaverődési együttható, amint az az ábrán látható.



8.3. ábra. A klasszikus nyalábosztó szemléltetése.

A kvantummechanikai leírásnál a beeső, a visszavert és a transzmittált mezőket külön módusoknak tekintjük és a mező térerősségeit helyettesítjük a megfelelő módus *operátorokkal*:

$$E_1 \rightarrow a_1, \quad E_2 \rightarrow a_2, \quad E_3 \rightarrow a_3, \quad (8.2)$$

ahol mindhárom módusra megköveteljük az

$$[a_i, a_i^\dagger] = 1 \quad (8.3)$$

fölcserélési relációt, míg a különböző indexű operátorokat mind fölcserélhetőnek írjuk elő. Itt megjegyezzük, hogy a nyalábosztó módusaira szokásos a *kapu* vagy *port* elnevezés is. Ha azonban a reflektált és transzmittált amplitúdókra vonatkozó (8.1) összefüggésekben végrehajtjuk fönti helyettesítést, akkor $[a_1, a_1^\dagger] = 1$ esetén az $a_3 = t a_1$, $a_2 = r a_1$ formulákból kiszámíthatóan a reflektált és transzmittált módusok a_2 és a_3 operátorai már nem teljesítik a $[a_2, a_2^\dagger] = 1$, $[a_3, a_3^\dagger] = 1$ standard fölcserélési relációkat, amit pedig szintén megköveteltünk. Ez azt jelzi, hogy a kvantumos leírásnál valamilyen módosításra van szükség.

8.2. A kvantumos nyalábosztó

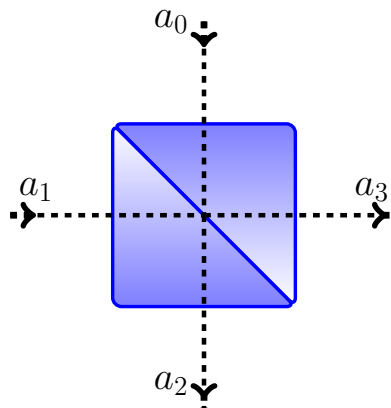
A fizikailag kézenfekvő magyarázat a fõnt jelzett problémára a következõ. A kvantumelméletben mindig jelen van a vákuum állapot is, tehát hiába nincs klasszikusan belépõ mezõ a nyalábosztó másik belépõ oldalán, lásd 8.4 ábra, valójában egy negyedik módus, azaz egy negyedik port is mindig jelen van. Ezt a belépõ módust 0 indexszel látjuk el, s ezzel a helyes transzformáció most már a

$$\begin{aligned} a_2 &= t' a_0 + r a_1 \\ a_3 &= r' a_0 + t a_1 \end{aligned} \quad (8.4)$$

vagy mátrix alakban az

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' & r \\ r' & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

módon adható meg. Természetesen általában a 0 módus állapota is különbözhet a vákuumtól, de erre is teljesülnie kell az $[a_0, a_0^\dagger] = 1$ stb. fölcserélési relációknak.



8.4. ábra. A kvantumos nyalábosztó szemléltetése.

A megkövetelt

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0, \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad (8.6)$$

kommutátorok érvényesnek bizonyulnak, ha teljesülnek az alábbi úgynevezett *reciprocitási relációk*:

$$|r| = |r'|, \quad |t| = |t'|, \quad |t|^2 + |r|^2 = 1; \quad (8.7)$$

$$r^* t' + r' t^* = 0, \quad r^* t + r' t'^* = 0. \quad (8.8)$$

8.1 Feladat: Mutassuk meg, hogy a reciprocitási relációkból következnek a 2-es és 3-as módusra vonatkozó fölcserélési relációk.

8.2 Feladat: Mutassuk meg, hogy ugyanez az eredmény adódik az energia megmaradásából is, ha az intenzitásokat a megfelelő klasszikus $E_0, \dots, E_3$ amplitúdók abszolút érték négyzetével adjuk meg.

8.3 Feladat: Mutassuk meg, hogy az

$$U = \begin{pmatrix} t' & r \\ r' & t \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

transzformációs mátrix unitér, azaz $U^{-1} = U^\dagger$.

Most megmutatjuk, hogy a fordított állítás is érvényes, azaz a reciprocitási relációk következnek az unitaritásból.

$$U \cdot U^\dagger = \mathbb{1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t' & r \\ r' & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t'^* & r'^* \\ r^* & t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} |t'|^2 + |r|^2 = 1 & t'r'^* + rt^* = 0 \\ r't'^* + r^*t = 0 & |r'|^2 + |t|^2 = 1 \end{cases} \quad (8.10)$$

Ehhez válasszuk szét minden együtthatónál az amplitúdót és a fázist a $t' = |t'|e^{i\phi'_t}$ stb. alaknak megfelelően, akkor a (8.8) összefüggések közül a második egyenletből

Ekkor (8.10) alapján látjuk, hogy a (8.8) összefüggések közül a második egyenlet teljesül, azaz az előbb bevezetett fázisokkal

$$|t'| |r'| \exp[i(\phi'_t - \phi'_r)] = -|t| |r| \exp[i(-\phi_t + \phi_r)]. \quad (8.11)$$

Ebből következik, hogy $\exp[i(\phi'_t - \phi'_r + \phi_t - \phi_r)] = -1$, azaz

$$\phi'_t - \phi'_r + \phi_t - \phi_r = \pm\pi \quad (8.12)$$

továbbá, hogy

$$\frac{|t'|}{|r'|} = \frac{|t|}{|r|} = \mu. \quad (8.13)$$

Innen a (8.10) első és utolsó összefüggése szerint $|r|^2(1 + \mu^2) = 1$ és $|r'|^2(1 + \mu^2) = 1$, miatt $|r| = |r'|$ és $|t| = |t'|$.

A fázisokra vonatkozó (8.12) megkötést többféleképpen is teljesíthetjük. Az egyik gyakran használt alak szerint előírjuk, hogy minden együttható legyen valós, úgy hogy $\phi_t = \phi_r = \phi'_t = 0$, és $\phi'_r = \pi$. Bevezetve még a $|t| = \cos \vartheta$, $|r| = \sin \vartheta$ parametrizálást az U mátrix alakja:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (8.14)$$

Egy másik gyakran használt változatnál $\phi_t = \phi'_t = 0$, $\phi_r + \phi'_r = \pi$: következő:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & e^{i\phi_r} \sin \vartheta \\ -e^{-i\phi_r} \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Az úgynevezett szimmetrikus nyalábosztó esetén $\phi_r = \pi/2$, ekkor a két nemdiagonális elem is egyenlő:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & i \sin \vartheta \\ i \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

A $|t|^2 = \cos^2 \vartheta$ és az $|r|^2 = \sin^2 \vartheta$ értékek megadják az intenzitásra vonatkozó megfelelő transzmissziós és reflexiós együtthatókat.

A (8.16) szimmetrikus nyalábosztó egy további speciális esete a 50-50 nyalábosztó, ahol az átengedett és visszavert intenzitások megegyeznek tehát $\cos \vartheta = \sin \vartheta = 1/\sqrt{2}$. A módus operátorok transzformációs képleteire ennek alapján az

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 + ia_1), \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ia_0 + a_1) \quad (8.17)$$

eredményeket kapjuk. Érdemes expliciten is kiírunk ezen transzformációk inverzeit:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-ia_2 + a_3), \quad a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_2 - ia_3) \quad (8.18)$$

8.3. Az állapotok transzformációja

Miután a nyalábosztó működésével kapcsolatban a módusok operátorainak egymáshoz való kapcsolatát megfogalmaztuk, fölvetődik a kérdés, hogy hogyan viszonylanak egymáshoz az egyes módusok kvantumállapotai.

Ennek megállapításához két feltételt írunk elő. Először is természetes módon kikötjük, hogy ha a két bemenő módus mindegyike vákuum állapotban van, akkor a kimenő portokon ugyancsak a vákuumállapot jelenjen meg. Eszerint a vákuum transzformációjára a

$$|0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{BS} |0\rangle_2 |0\rangle_3 \quad (8.19)$$

összefüggésnek kell fennállnia. (Itt a BS jelölés az angol beam-splitter rövidítésére utal.) Másodszor pedig azt használjuk ki, hogy tetszőleges bemenő és kimenő állapot fölírható a megfelelő módusok számállapotainak lineáris kombinációjaként, ezért elegendő a számállapotokra vonatkozó transzformációt megtalálni. A számállapot viszont az adott módus $a_i^\dagger$ keltő operátorának megfelelő hatványával generálható a vákuumból az $|n\rangle_i = a_i^{\dagger n} |0\rangle / \sqrt{n!}$ formulának megfelelően. Ezután a bemenő móduson ható keltő operátorokat a korábbi (8.18) inverz képletek adjungáltjai segítségével kifejezzük a kimenő módusok operátoraival, majd előírjuk, hogy a kimenő módus állapotát ezek hatásával kell kiszámítani a kimenő módus vákuum állapotán. Az alábbi példák mutatják ennek a csak bonyolult megfogalmazható, de valójában egyszerű szabálynak a használatát.

8.3.1. Egyfotonos bemenet

Ahhoz hogy pontosabban lássuk ezt a transzformációt, tekintsünk először egy igen egyszerű, de annál fontosabb elvi jelentőségű példát: adjuk meg a $|0\rangle_0 |1\rangle_1 = a_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1$ egyfotonos bemenő állapot transzformációját. Minthogy (8.18) adjungáltja szerint $a_1^\dagger = (ia_2^\dagger + a_3^\dagger)/\sqrt{2}$

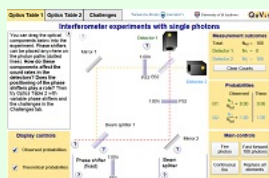
$$|0\rangle_0 |1\rangle_1 = a_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{BS} \frac{1}{\sqrt{2}}(ia_2^\dagger + a_3^\dagger) |0\rangle_2 |0\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |1\rangle_3). \quad (8.20)$$

Eszerint, ha az 1-es bemenő porton egy foton lép be, akkor az az 50-50-es nyalábosztón egyforma abszolút értékű amplitúdóval és ennek megfelelően azonos valószínűséggel vagy transmittálódik vagy

reflektálódik, azaz kerül a 2-es vagy a 3-as módusba, de soha sem egyszerre mindkettőbe, azaz a foton oszthatatlannak bizonyul. Megjegyezzük, hogy a fönti kimenő állapot a két lehetőség kvantummechanikai szuperpozíciója, amit néha félrevezetően úgy is szoktak mondani, hogy a 2-es és a 3-as port (a reflektált és a transzmittált) módusállapotai összefonódtak. Ez azonban nem összefonódás abban a szigorúbb értelemben, hogy arról csak több részecske állapotaival kapcsolatban szokás beszélni, itt viszont egyetlen fotonról van szó.



Animáció:



Ezen Flash animáció segítségével egy-egy virtuális optikai asztalon kísérletezhetünk egyfotonos forrást használva. Nyalábosztót és különböző szögű fázistolásokat tehetünk be a fény útjába és szimulálhatjuk a lehetséges mérési eredményeket. A "Challenges" fül alatt található feladatok megoldásával ellenőrizhetjük tudásunkat.

http://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/simulations_html5/sims/SinglePhotonLab/

SinglePhotonLab.html

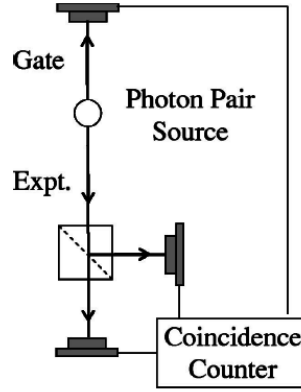
8.4. A foton oszthatatlanságára vonatkozó kísérletek

Noha a foton mint fénykvantum létezését a fotoeffektus révén sokan igazoltak tekintették, az idők során többen – köztük Schrödinger is – föl hívták a figyelmet arra, hogy az energia adagokban történő elnyelése valójában azon is múlhat, hogy az elnyelő objektum (pl. egy atom) nívói diszkrét. Az tehát egy akár folytonos energiájú mezőből is csak olyan energiaadagokat vehet föl, amelyek megfelelnek két stacionárius nívó közti különbségnek. Ez a természetes elképzelés elméletileg is belátható, mert egy félklasszikus, tehát a mezőt nem kvantáló – pl. perturbációszámításon alapuló – megközelítésből következő megfontolás is ilyen eredményre vezet. Ott a $\hbar\omega = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ képlet baloldala nem a mező kvantálásából, hanem az elektronállapotokat meghatározó Schrödinger egyenletből származik.

A foton oszthatatlanságára vonatkozó kísérletet először Jánossy Lajos és Náray Zsolt végeztek Budapesten 1957-ben. Egy gyöngé fénynyalábot egy nyalábosztóval kettéosztottak, az egyes nyalábokat egy-egy detektorba, fotoelektronsokszorozóba vezették, és azt vizsgálták, hogy jelentkeznek-e szisztematikus koincidenenciák (rendszeres egybeesések) a detektorok áramában. Mivel ilyeneket nem tapasztaltak, azaz egyszerre mindig csak az egyik vagy csak a másik detektor jelzett, azt a következtetést vonták le, hogy a gyöngé nyalábban jelenlévő egyetlen foton oszthatatlan, hiszen vagy az egyik vagy a másik detektorba jut, mindkettőbe egyszerre soha sem. A kísérletet később mások jóval érzékenyebb detektorokkal is megismételték, többek között J.F. Clauser 1974-ben, és ugyanerre a következtetésre jutottak.

A ma konkluzívnak tekintett kísérlet P. Grangier, G. Roger és A. Aspect nevéhez fűződik (1986), akik nagy megbízhatósággal és egy érdekes trükköt alkalmazva végezték el újra a Jánossy-féle kísérletet. A berendezés vázlatát a 8.5 ábra mutatja. Ennek során egy alkalmasan gerjesztett Ca atom kétfotonos átmenetét használták. Az első átmenet során keletkező foton, amelyet hírnök fotonnak szokás nevezni, és amely az ábrán látható kísérleti vázlaton fölfelé halad, elindítja az alul látható két detektor elektronikáját. Így azok megfelelő állapotban várják a nyalábosztón áthaladó második foton érkezését. Ez a trükk lényegében azt biztosítja, hogy a bejövő nyaláb ténylegesen mint különálló fotonok egymásutáni

sorozatként legyen interpretálható. A hírnök foton bevetésével a detektorokon jelentkező véletlen jeleket nagyrészt ki lehetett szűrni, így az egymást kizáróan jelentkező „vagy egyik vagy másik” detektorkatantást nagy biztonsággal lehetett ellenőrizni. A koincidencia számláló sohasem jelez egyszerre, ami a foton oszthatatlanságának, azaz a mező kvantumosságának erős kísérleti bizonyítéka.



8.5. ábra. A P. Grangier, G. Roger és A. Aspect által elvégzett Jánossy-féle kísérlet vázlatos rajza.

8.4.1. Koherens bemenet

Tekintsük most azt az esetet amikor az 1-es porton egy $|\alpha\rangle$ koherens állapotú foton lép be, míg a 0-s portra pedig továbbra is csak a vákuum állapot érkezik, azaz a belépő állapot

$$|0\rangle_0 |\alpha\rangle_1 = D_1(\alpha) |0\rangle_0 |0\rangle_1, \quad (8.21)$$

ahol $D_1(\alpha) = \exp(\alpha a_1^\dagger - \alpha^* a_1)$ az 1 módus eltolási operátora. A kilépő állapot ekkor az előzőek szerint a $D(\alpha)$ -ban szereplő a_1 és $a_1^\dagger$ (8.18)-nek megfelelő transzformáltjaival kifejezhetően

$$\begin{aligned} |0\rangle_0 |\alpha\rangle_1 &= D_1(\alpha) |0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{BS} \exp \left[\alpha (i a_2^\dagger + a_3^\dagger) \sqrt{2} - \alpha^* (-i a_2 + a_3) / \sqrt{2} \right] |0\rangle_2 |0\rangle_3 = \\ &= \exp \left[\left(i \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) a_2^\dagger - \left(-i \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}} \right) a_2 \right] \exp \left[\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) a_3^\dagger - \left(\frac{\alpha^*}{\sqrt{2}} \right) a_3 \right] |0\rangle_2 |0\rangle_3 = \left| i \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_3 \end{aligned} \quad (8.22)$$

Azaz mindkét módus egyforma amplitúdójú koherens állapot, köztük $\pi/2$ fáziskülönbséggel az i faktornak megfelelően, ami a reflektált és a transzmittált hullám között lép föl. Az egyes intenzitások illetve fotonszámátlagok ugyanakkor a beérkező intenzitások felével egyeznek meg az itt tekintett 50-50-es tulajdonságnak megfelelően. Ez az amit a klasszikus kép alapján várunk is, hiszen az $|\alpha\rangle_1$ állapot éppen egy kváziklasszikus belépő mezőt jelent. A két kilépő módus az előző esettel szemben most nem összefonódott. Az is látható hogy koherens esetből az $|\alpha|$ kis értékét tekintve sem kapható meg a kvantumosság eredmény az előző egyfotonos állapotról.

8.5. Egy-egy foton a két bemeneten

Tekintsük most azt a szigorúan kvantumos esetet amikor mindkét belépő módus egyfotonos állapotban van, azaz a belépő állapot

$$|1\rangle_0 |1\rangle_1 = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1. \quad (8.23)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} |1\rangle_0 |1\rangle_1 &= a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{BS} (a_2^\dagger + ia_3^\dagger)/\sqrt{2} (ia_2^\dagger + a_3^\dagger)/\sqrt{2} |0\rangle_2 |0\rangle_3 = \\ &= \left[\frac{i}{2}(a_2^\dagger a_2^\dagger + a_3^\dagger a_3^\dagger) + \frac{1}{2}(a_2^\dagger a_3^\dagger - a_2^\dagger a_3^\dagger) \right] |0\rangle_2 |0\rangle_3 = \frac{i}{\sqrt{2}} (|2\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |2\rangle_3). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Ez azt jelenti, hogy valamelyik kimenő módusba két foton kerül míg a másikba egy sem.

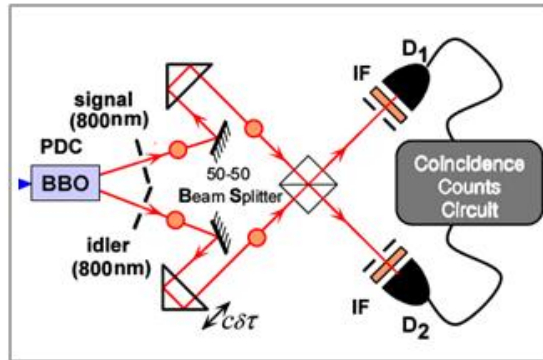
A fenti eredményt a következőképpen is magyarázhatjuk. Az a kimenő állapot, ahol mindkét módusba egy-egy foton érkezne kétféle úton is megvalósulhat. Az egyik szerint a 0-ból a 2-be áthalad és az 1-ből a 3-ba is transzmittálódik a foton. A másik út, hogy a 0-ból a 3-ba és az 1-ből a 2-be is reflektálódik a foton. Az áthaladás amplitúdója az 50-50-es nyalábosztó esetén $t = 1/\sqrt{2}$ a visszaverődésé $r = i/\sqrt{2}$. Annak az amplitúdója hogy mindkét foton áthalad $tt = 1/2$, azé viszont hogy mindkettő reflektálódik $rr = -1/2$. Az eredmény valószínűségét úgy kapjuk, hogy a megfelelő amplitúdókat összeadjuk majd az abszolút érték négyzetét vesszük. Így annak a valószínűsége, hogy 2-ben és 3-ban is egy-egy fotont detektálunk

$$P_{11} = |tt + rr| = 0. \quad (8.25)$$

8.5.1. Hong–Ou–Mandel-féle kísérlet

A fenti eredmény egy nevezetes kísérlethez kapcsolódik, amelyet C. K. Hong, Z. Y. Ou és L. Mandel végeztek 1987-ben. Először azt tárgyaljuk röviden, hogy hogyan állították elő a két bemenetre érkező egy-egy fotont. A kísérletben egy nemlineáris BBO (β -bárium borát: $\beta - \text{BaB}_2\text{O}_4$) kristályt egy ultraibolya forrásból származó ω_P körfrekvenciájú fényforrással gerjesztettek, majd az I típusú parametrikus lekonverzióval ebből két azonosan polrizált fotont generált, amelyekre fönnáll az energia és impulzusmegmaradás:

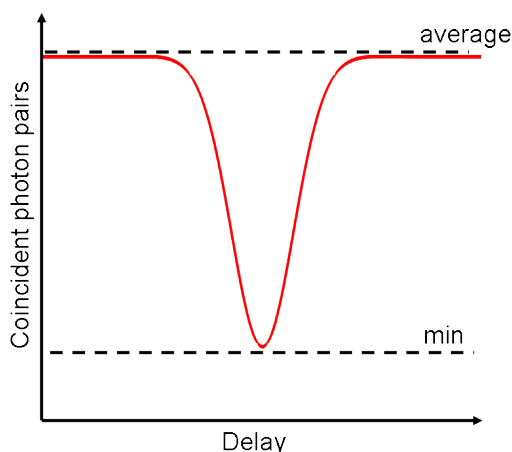
$$\omega_P = \omega_s + \omega_i \quad \text{és} \quad \mathbf{k}_P = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \quad (8.26)$$



8.6. ábra. A Hong–Ou–Mandel-féle kísérlet vázlatos rajza. **Forrás:** http://smos.sogang.ac.kr/wiki/index.php/Quantum_optics

A másodlagos nyalábokat illetve fotonokat hagyományosan „signal” (jel) és „idler” (tétlen) fotonnak szokás nevezni, az elnevezésnek a továbbiakban nem lesz jelentősége. Az impulzusmegmaradásból látható, hogy a két nyaláb általában különböző irányokba haladhat. A kristály fajtájától és beállításától függően kétfajta konverziós folyamat lehetséges. Az egyiknél a két másodlagos foton azonos polarizációjú, de merőleges a lineárisan poláros gerjesztő foton polarizációjára. Ez az úgynevezett I típusú lekonverzió. A másik lehetséges beállításnál a signal és az idler egymásra merőleges polarizációjú, ez a II típusú lekonverzió.

A Hong–Ou–Mandel-féle kísérletben I típusú lekonverziót eredményező beállítást használtak, a kristályból kilépő két nyaláb egy-egy tükrön visszaverődve újra találkozik egy nyalábosztó két bemenetén. Ezután a két kimenő nyaláb egy-egy fotodetektorba érkezik, amelyek egy korrelátorba vannak kötve. A korrelátor akkor jelez, ha a két detektorba valamilyen adott föloldási időn belül egyszerre érkezik egy egy-foton. A nyalábosztó helyének kismértékű mozgatásával azt találták, hogy a két detektor általában együttesen is jelez, de bizonyos helyzetben a koinkidencia megszűnik.

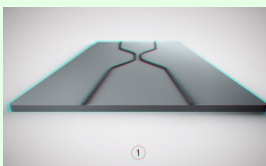


8.7. ábra. A Hong–Ou–Mandel-féle kísérlet során kapott láthatósági görbe. **Forrás:** http://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/6/67/HOM_visibility.png

Az együttes jelzés annak felel meg, hogy egy-egy foton egymástól különböző időben éri el a nyalábosztót és egyik a D_1 , a másik a D_2 detektorba jut. A koinkidencia jel megszűnése viszont annak a speciális helyzetnek felel meg, amikor a két foton között nincs útkülönbség, azaz valóban egyszerre érkezik egy-egy foton a bemenő portra. Ekkor a (8.24) folyamatnak megfelelően

$$|1\rangle_0 |1\rangle_1 = a_0^\dagger a_1^\dagger |0\rangle_0 |0\rangle_1 \xrightarrow{BS} \frac{i}{\sqrt{2}} (|2\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |2\rangle_3), \quad (8.27)$$

azaz a 2-es és 3-as kimenő portokon nem jelenik meg egyszerre foton és így a korrelátor nem jelez, mivel mindkét foton ugyanabba (vagy a 2-es vagy a 3-as) detektorba jut. Ez az effektus módot ad arra, hogy két optikai úthossz egyenlőségét abszolút módon is ellenőrizzük, s ezt különböző optikai kísérletekben sokrétűen használják is.

**Animáció:**

A Hong-Ou-Mandel effektust ismeretterjesztő szinten bemutató angol nyelvű animáció. **Forrás:** <http://www.youtube.com/watch?v=ld2r2IMt4vg>

<http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/demos/Hong-Ou-Mandeleffect-ld2r2IMt4vg.mp4>



8.8. ábra. Egyetlen foton detektálására alkalmas műszer fényképe. Az eszközben egy un. félvezető lavina dióda van, amelyben már egyetlen foton hatására elektromos áram indul. A dióda a foton beérkezésének idejét néhány száz 10 ps pontossággal tudja detektálni. **Forrás:** <https://www.flickr.com/photos/sciencemuseum/9660571969/>

8.6. Kvantumradír

A Hong-Ou-Mandel kísérletben lényeges szerepet játszik az, hogy a fotonok megkülönböztethetetlenek. Ezt a következőkben vázolt újabb kísérlet mutatja. Az I típusú lekonverziónál a nemlineáris kristályban keltett két nyaláb polarizációja azonos. Tegyük föl, hogy ez vízszintes, így a nyalábosztóra érkező ennek megfelelő állapotot most $|H\rangle_0 |H\rangle_1$ -el jelöljük, ahol a H a "Horizontális" polarizációra utal. A nyalábosztó hatása, amelyről föltesszük, hogy a polarizációt nem változtatja, a (8.27)-nek megfelelően így most a következő alakú:

$$|H\rangle_0 |H\rangle_1 \xrightarrow{BS} \frac{i}{\sqrt{2}} (|2H\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |2H\rangle_3). \quad (8.28)$$

Itt és a továbbiakban egy egyszerűsített jelölést fogunk használni. A $|0\rangle_k$ azt jelenti, hogy a k -adik térbeli módban sem H vízszintes sem V függőleges azaz "Vertikális" polarizációjú foton sincs. A $|H\rangle_k$ illetve $|2H\rangle_k$ azt jelenti, hogy a k -adik térbeli módban 1 illetve 2 foton van vízszintes polarizációval, míg függőleges polarizációjú nincs ezekben. Ha viszont egy térbeli módban mindkét polarizációjú almódban van egy-egy foton, azt a $|H, V\rangle_k$ szimbólummal jelöljük.

Tegyük be most egy polarizációs forgatót az egyik lekonvertált nyalábba, legyen ez a 0 indexű módus, amelyik annak polarizációját az x iránnyal θ szöget bezáró lineárisan poláros irányúba forgatja. Ekkor ennek állapota

$$|\theta\rangle_0 = |H\rangle_0 \cos \theta + |V\rangle_0 \sin \theta. \quad (8.29)$$

A későbbiek kedvéért fölírjuk a $|\theta\rangle_0$ -ra merőleges polarizációjú állapotot is, ez

$$|\theta^\perp\rangle_0 = -|H\rangle_0 \sin \theta + |V\rangle_0 \cos \theta. \quad (8.30)$$

A másik lekonvertált nyalábbal viszont nem történik semmi, így a nyalábosztóra érkező állapot:

$$|\theta\rangle_0 |H\rangle_1 = |H\rangle_0 |H\rangle_1 \cos \theta + |V\rangle_0 |H\rangle_1 \sin \theta. \quad (8.31)$$

A kimenő állapot a lineáris transzformációnak megfelelően, a (8.24) képletben figyelembe véve a keltett fotonok különböző polarizációját

$$\begin{aligned} |\psi(\theta)\rangle = & \frac{i}{\sqrt{2}} \cos \theta (|2H\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |2H\rangle_3) + \frac{1}{2} \sin \theta (|V\rangle_2 |H\rangle_3 - |H\rangle_2 |V\rangle_3) + \\ & + \frac{i}{2} \sin \theta (|H, V\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |H, V\rangle_3). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Itt a $|H, V\rangle_2$ stb. jelölés arra utal, hogy a 2 jelű térbeli módus mindkét polarizációs almódusában van egy-egy foton. Ha nincs polarizációs forgatás, $\theta = 0$ akkor a második tag eltűnik, csak az első tag van jelen és visszakapjuk az előző esetet, azaz megfelelően beállított útkülönbség esetén nincs koincidencia a két detektor jelében. Ha viszont a 0 módus forgatása éppen a $\theta = \pi/2$ irányba történik, akkor a kimenő állapot a következő:

$$|\psi(\pi/2)\rangle = \frac{1}{2} (|V\rangle_2 |H\rangle_3 - |H\rangle_2 |V\rangle_3) + \frac{i}{2} (|H, V\rangle_2 |0\rangle_3 + |0\rangle_2 |H, V\rangle_3) \quad (8.33)$$

Ez viszont azt mutatja, hogy az első tag miatt megjelennek koincidenziák a detektorok jeleiben. A polarizáció megjelöli azt az utat amelyen a 0-s módusból érkezik a nyalábosztóra a foton.

Tegyük most egy polarizátort a nyalábosztó után a 2-es módusba a detektor elé, úgy hogy az θ_2 szöget zárjon be a vízszintessel. Ez azt jelenti, hogy a módus fotonjának állapotát a

$$|\theta_2\rangle_2 = |H\rangle_2 \cos \theta_2 + |V\rangle_2 \sin \theta_2 \quad (8.34)$$

állapotra vetítjük, aminek eredményeképpen a teljes állapot a normálástól eltekintve a

$$|\theta_2\rangle_2 |\psi(\pi/2)\rangle = \frac{1}{2} |\theta_2\rangle_2 (|H\rangle_3 \sin \theta_2 - |V\rangle_3 \cos \theta_2) \quad (8.35)$$

állapotba vetül, azaz a 3-as módus fotonja az (8.29) formulából láthatóan a 2-ben haladó fotonra merőleges polarizációjú lesz. Tegyük most hasonlóan egy másik polarizátort a 3-as módusba amely azt a

$$|\theta_3\rangle_3 = |H\rangle_3 \cos \theta_3 + |V\rangle_3 \sin \theta_3 \quad (8.36)$$

állapotba vetíti. Annak az amplitúdója, hogy a két kimenő foton állapota együttesen $|\theta_2\rangle_2 |\theta_3\rangle_3$ lesz a fentiek szerint

$$\langle \theta_2 | \langle \theta_3 | \psi(\pi/2) \rangle = \frac{1}{2} (\sin \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_2 \sin \theta_3) = \frac{1}{2} \sin(\theta_2 - \theta_3), \quad (8.37)$$

illetve a megfelelő valószínűség:

$$P = \frac{1}{4} \sin^2(\theta_2 - \theta_3) \quad (8.38)$$

vagyis ha a két utóbb betett polarizátor párhuzamos, akkor az együttes megszólalási valószínűség 0-vá válik: azt a "melyik út" információt, amit a 0 módusba tett polarizátor részben jelentett a két polarizátor eltüntette (kiradírozta). A $\theta_2 - \theta_3 = \pi/2$ esetben viszont ez a valószínűség 0-tól különböző, azaz lesznek koincidenciák.

Ezt a jelenséget 1992-ben Kwiat, Sternberg és Chiao kísérletekben ténylegesen is megfigyelték [10].

Ellenőrző kérdések

1. Miért kell módosítani a klasszikus nyalábosztóra vonatkozó összefüggéseket a kvantumos esetben?
2. Mit nevezünk szimmetrikus illetve 50-50-es nyalábosztónak?
3. Hogyan transzformálja a nyalábosztó a vákuumállapotokat?
4. Mi történik egy egyfotonos bemenettel a nyalábosztón?
5. Mi a hírnökfoton technika a foton oszthatatlanságára vonatkozó kísérletekben?
6. Hogyan transzformálja a nyalábosztó a koherens állapotot?
7. Mi a Hong-Ou-Mandel féle kísérlet?
8. Milyen optikai kísérletet nevezünk kvantumradírnak?

9. fejezet

Kvantumos koherencia függvények

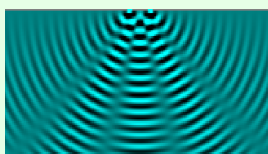
A fejezetben a klasszikus és a kvantumos koherencia elméletét tárgyaljuk. A koherencia más szóval interferenciaképességet jelent, s az interferencia – mint minden hullámjelenségnél – a fény esetében is akkor akkor lép föl, ha két hullám találkozik, és a klasszikus kép szerint a hullámok közötti fáziskülönbség állandó vagy csak lassan változik időben a hullám periódusidejéhez képest. Az interferencia kérdése azért is alapvető a kvantumoptikában, mert ez a jelenség elsősorban a fény hullámtermészetéhez kapcsolódik, tehát külön kérdés, hogy hogyan nyilvánul meg a fény kettős természete az interferencia során.

9.1. A klasszikus interferencia és koherencia

Tekintsük a kvantumfizika alapjainak szempontjából is alapvető Young-féle kétréses kísérletet. Lásd az 9.1 ábrát. A második ernyőn interferenciaképet észlelünk, aminek a magyarázata a klasszikus hullám-kép alapján jól ismert.



Animáció:

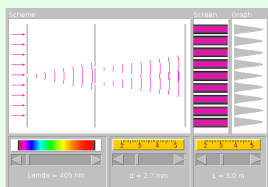


Ezzel a java animációval egy virtuális hullámkádban játszhatunk. A beépített beállítások közt megtaláljuk a Young féle kétréses kísérletet is.

<http://www.falstad.com/ripple/>

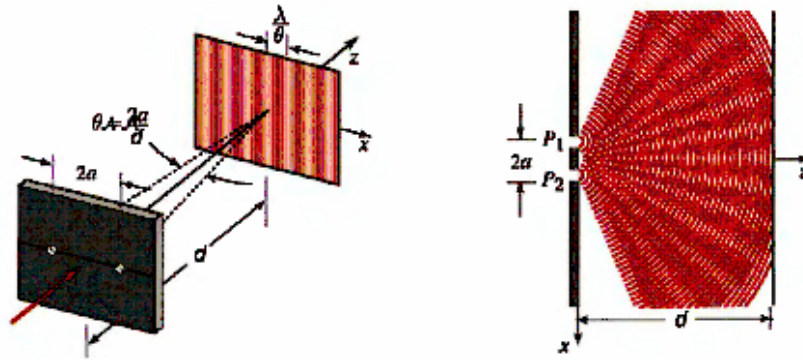


Animáció:

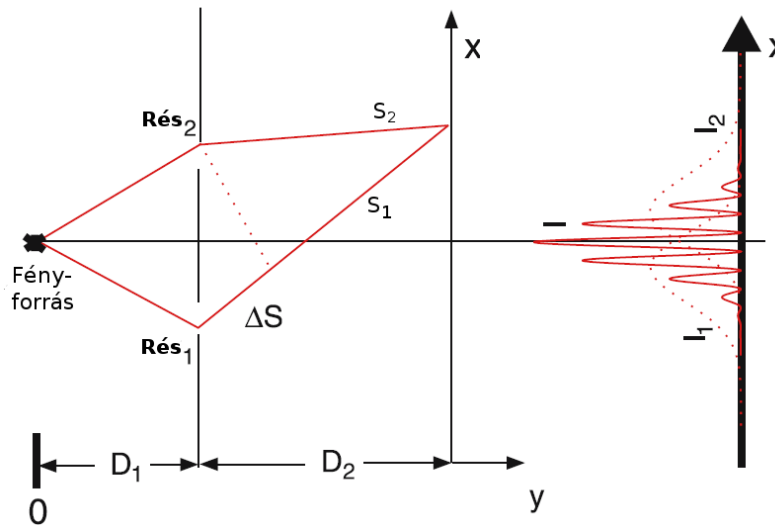


A Young féle kétréses kísérlet java szimulációja. Ennek segítségével tanulmányozhatjuk a létrejövő interferencia képet különböző beállítások (hullámhossz, rés méret, ...) esetén.

<http://vsg.quasihome.com/interfer.htm>



9.1. ábra. A Young-féle kétréses kísérlet



9.2. ábra. A Young-féle kétréses kísérlet elrendezésének vázlatos rajza.

Azonban a gyakorlatban a csíkok csak akkor látszanak jól, ha a két sugár közti $\Delta s = |s_1 - s_2|$ útkülönbség kisebb mint egy ℓ_c – a forrás tulajdonságaitól függő – hosszúság, amelyet koherenciahossznak szokás nevezni. Azaz a csíkok addig látszanak jól, (ezt a láthatóságot alább mennyiségileg is definiálni fogjuk), amíg

$$\Delta s < \ell_c. \quad (9.1)$$

Ha a forrás elvben szigorúan monokromatikus lenne, akkor ahhoz végtelen koherenciahossz tartozna. Valójában azonban a kísérletben használt fény sáv szélessége, azaz a jelentős súllyal szereplő spektrális komponenseket tartalmazó $\Delta\omega$ frekvenciaintervallum véges, vagyis nem csak egyetlen frekvenciát tartalmaz. Ekkor viszont a különböző frekvenciájú komponensekre nézve az erősítés (és a kioltás is) kissé más útkülönbségekre teljesül, ezért a koherenciahossz véges marad, és nagysága – amint az kimutatható – legfőleg $\ell_c = c/\Delta\omega$. Az ennek megfelelő

$$t_c = \ell_c/c \quad (9.2)$$

időt koherenciaidőnek nevezzük.

A mező térerőssége az ernyő egy $\mathbf{r}$ pontjában és a t időpillanatban olyan térerősség értékek szuperpozíciója, amelyet a mező az első rés $\mathbf{r}_1$ helyén a t -nél korábbi $t_1 = t - s_1/c$ illetve a második rés $\mathbf{r}_2$ helyén a $t_2 = t - s_2/c$ késleltetett (retardált) időpontokban vett föl:

$$E(\mathbf{r}, t) = K_1 E(\mathbf{r}_1, t_1) + K_2 E(\mathbf{r}_2, t_2). \quad (9.3)$$

A K_1 és K_2 terjedési konstansok a geometriától függenek és általában fordítva arányosak az s_1 illetve s_2 távolságokkal. Az egyszerűség kedvéért skaláris tereket tekintünk, ami alkalmazható, ha a két mező azonos polarizációjú.

A detektorok válaszideje hosszú, ezért azok általában a fényintenzitásnak a periódusidőnél jóval hosszabb időre vonatkoztatott

$$I(\mathbf{r}) = \overline{|E(\mathbf{r}, t)|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |E(\mathbf{r}, t)|^2 dt \quad (9.4)$$

förlúhúzással jelzett átlagát mérik. Az intenzitás a térerősség abszolút értékének négyzetével arányos, az arányossági tényezőt itt egységnyinek választottuk. Itt föltesszük, hogy az átlag stacionárius, azaz nem függ az időmérés kezdeti időpontjától, továbbá azt is, hogy a kiszámított időátlag úgy is megadható, hogy az $E(\mathbf{r}, t)$ mező értékét egy valószínűségi eloszlás által meghatározott időbeli folyamatnak tekintjük, és az intenzitást az

$$I = \langle |E(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle \quad (9.5)$$

sokaságra vett átlag segítségével definiáljuk.

Ennek megfelelően a Young-féle kísérletnél a detektornál mért intenzitás:

$$I(\mathbf{r}) = |K_1|^2 \langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re} [K_1^* K_2 \langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1) E(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle]. \quad (9.6)$$

Az első két tag itt külön-külön az egyes résektől származó intenzitás, míg a harmadik tag írja le az interferenciát. Legyen

$$I_1 = |K_1|^2 \langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle, \quad I_2 = |K_2|^2 \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle \quad (9.7)$$

és vezessük be a klasszikus elsőrendű normált koherencia fokot a következő definícióval:

$$\gamma^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{\langle E^*(x_1) E(x_2) \rangle}{\sqrt{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle}}. \quad (9.8)$$

Itt az $x_i = (\mathbf{r}_i, t_i)$ jelölést alkalmaztuk. Az ernyőn mért intenzitás eszerint

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \left[\frac{K_1^*}{\sqrt{|K_1|^2}} \frac{K_2}{\sqrt{|K_2|^2}} \gamma^{(1)}(x_1, x_2) \right]. \quad (9.9)$$

Megjegyezzük még a következőket. Egy fényhullám tiszta időbeli koherenciája mérhető egy Mach-Zender-féle interferométerrel, ahol a két karhoz tartozó idő $t_1 = t - z_1/c$ és $t_2 = t - z_2/c$. Ha a forrás statisztikus tulajdonságai stacionáriusak, azaz a fluktuációkat befolyásoló zavarok nem függenek

az időtől, akkor az interferenciát az útkülönbség szabja meg, és a $\gamma^{(1)}$ paraméter csak a $\tau = (z_2 - z_1)/c$ paramétertől fog függeni a

$$\gamma^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E(t+\tau) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle} \quad (9.10)$$

képletnek megfelelően. Meg lehet mutatni, hogy egy olyan, egyébként ω_0 frekvenciájú monokromatikus forrásból származó fény esetén, amikor a kibocsátó objektumok, atomok időnként, pl. ütközések következtében véletlen fázisugrást szenvednek, az elsőrendű koherencia foka az alábbi alakú:

$$\gamma^{(1)}(\tau) = \exp\{-i\omega_0\tau - |\tau|/\tau_C\} \quad (9.11)$$

ahol a τ_C , a koherenciaidő éppen a jelzett véletlen fázisugrások között eltelt átlagos idő. Érdekes, hogy már Fresnel is egy ilyen folyamatnak tulajdonította az interferencia eltűnését elegendően nagy időkülönbség esetén.

Egy másik gyakori eset amikor a fénykibocsátó atomok különböző sebességgel mozogva a Doppler effektus miatt különböző frekvencián sugároznak. Ez esetben a koherenciafok:

$$\gamma^{(1)}(\tau) = \exp\{-i\omega_0\tau - \Delta_0^2\tau^2/2\} \quad (9.12)$$

ahol Δ_0 a spektrumvonal ilyen esetben inhomogénnek nevezett kiszélesedése, azaz a spektrumot megadó Gauss görbe két inflexiós pontja közti távolság fele.

9.2. Kvantumos koherencia függvények

Az előző pont klasszikus megfontolásai kiterjeszthetők a kvantumos leírásra, ami elsősorban R. Glauber érdeme (Nobel díj 2005). A mező intenzitásának mérésére fotodetektorokat használunk. Ezek szokásosan úgy működnek, hogy a bennük lévő atomok a beérkező mezőből fotont nyelnek el, majd ennek nyomán gerjesztett vagy ionizált állapotba kerülnek. Mivel a mező hullámhossza az optikai tartományokban jóval nagyobb mint az atom mérete, a hullám térbeli változását leíró $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ faktor helyettesíthető az $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}$ értékkel, ahol $\mathbf{r}_0$ az atom tömegközéppontját jelenti. Más szóval az atomon belül a mező értéke egy adott időpontban mindenütt azonosnak tekinthető. Ilyenkor – mint megmutatható – a mezőt és az atomi töltéseket az atomi dipólmomentum csatolja össze, azaz a kölcsönhatás Hamilton-operátora

$$H_I = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (9.13)$$

alakú. Ezért a mező helyfüggésének elhanyagolását dipólus közelítésnek nevezzük.

Legyen az atom az $\mathbf{r}_0 = 0$ helyen, s így a mező értéke ezen a helyen:

$$\mathbf{E} = i \sum_{k,s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \boldsymbol{\epsilon}_{ks} [a_{ks}(t) - a_{ks}^+(t)]. \quad (9.14)$$

Mivel a detektor egy foton abszorpciójával működik, a kölcsönhatás szempontjából elegendő a mezőnek az a *eltüntető* operátort tartalmazó

$$\mathbf{E}^+ = i \sum_{k,s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 V}} \boldsymbol{\epsilon}_{ks} a_{ks}(t) \quad (9.15)$$

úgynevezett *pozitív frekvenciás* részét figyelembe venni. Elképzelhető ugyan olyan detektor is, amelynél foton keletkezik miközben az atom legerjesztődik, de a gyakorlatban nem szokás ilyet használni. Legyen a detektorként szolgáló atom kezdeti állapota a $|g\rangle$ alapállapot, a mezőé pedig valamilyen később specifikálendő $|i\rangle$ állapot. A detektálás végén kerüljön az atom az $|e\rangle$ -vel jelölt gerjesztett (excited) atomi állapotba, míg a mező végállapota legyen $|f\rangle$. A csatolt rendszer állapota így kezdetben $|I\rangle := |g\rangle |i\rangle$ végül pedig $|F\rangle = |e\rangle |f\rangle$. A kölcsönhatási operátor mátrixeleme a kezdeti és a végállapot között

$$\langle F | H_I | I \rangle = - \langle e | \mathbf{D} | g \rangle \langle f | \mathbf{E}^+ | i \rangle, \quad (9.16)$$

és az átmeneti valószínűség ennek az abszolútérték négyzetével azaz a

$$| \langle F | H_I | I \rangle |^2 \quad (9.17)$$

mennyiséggel arányos. Ez – mint látjuk – tartalmazza a $\langle e | \mathbf{D} | g \rangle$ átmeneti dipólmomentum mátrixelem négyzetét és a mezőállapot átmenetének

$$| \langle f | \mathbf{E}^+ | i \rangle |^2 \quad (9.18)$$

valószínűségét. A föltételezett foton abszorpciós detektálási mechanizmus miatt az $|f\rangle$ állapotban eggyel kevesebb fotonnak kell lennie mint $|i\rangle$ -ben. Ezért a (9.18) mátrixelem nem tűnik el, mert az a_{ks} eltüntető operátorral hatva az $|i\rangle$ állapotra az $a_{ks} |i\rangle$ és $|f\rangle$ azonos számú fotonot tartalmazó állapotok. A másik, a negatív frekvenciás tagban szereplő $a_{ks}^\dagger |i\rangle$ állapotot tartalmazó tag viszont ugyanilyen ok miatt nullát ad ugyanezen állapotok között, mert $a_{ks}^\dagger |i\rangle$ kettővel több fotonot tartalmaz mint $|f\rangle$, így ezek ortogonális állapotok.

A detektálás szempontjából azonban csak az atom végső állapota az érdekes, ezért a (9.18) mennyiségeket össze kell adni a mező összes *lehetséges végállapotát* tartalmazó $|f\rangle$ állapotaira vett összegzéssel. Ez utóbbiakat egy teljes ortonormált rendszernek tekinthetjük, amelyek tartalmazhatják a nem megengedett (nulla mátrixelemű) tagokat is, s így az átmenet valószínűsége a

$$\sum_f | \langle f | \mathbf{E}^+ | i \rangle |^2 = \sum_f \langle i | \mathbf{E}^- | f \rangle \langle f | \mathbf{E}^+ | i \rangle = \langle i | \mathbf{E}^- \mathbf{E}^+ | i \rangle \quad (9.19)$$

mennyiséggel arányos, ahol az $\mathbf{E}^- = (\mathbf{E}^+)^\dagger$ adjungálási egyenlőséget használtuk. Eszerint az átmenet valószínűsége az $\mathbf{E}^- \mathbf{E}^+$ várható értéke a mező kezdeti állapotában. Az eredmény láthatólag arra az esetre vonatkozik, amikor a kezdeti állapot *tiszta* a kvantummechanikai értelemben. A valóságban ez igen ritka eset, mert a mező kezdeti állapota általában egy

$$\varrho_M = \sum_i p_i |i\rangle \langle i| \quad (9.20)$$

sűrűségoperátorral megadott keverék, ahol p_i az $|i\rangle$ tiszta állapot valószínűsége a keverékben, amelyekre $\sum_i p_i = 1$. Ez esetben az (9.19) várható érték helyére az azt keverék esetén is megadó általánosabb

$$\text{Tr}[\varrho_M \mathbf{E}^- \mathbf{E}^+] = \sum_i p_i \langle i | \mathbf{E}^- \mathbf{E}^+ | i \rangle \quad (9.21)$$

képlet lép. Figyeljük meg, hogy a Tr mögött az operátorok *normálrendezett* módon jelennek meg, ami azt jelenti, hogy az $a_{ks}^\dagger$ keltő operátorokat tartalmazó tagok megelőzik az a_{ks} eltüntető operátort tartalmazókat, ami az általunk előírt fotonabszorpciós detektálás következménye.

Vezessük be most a

$$G^{(1)}(x, x) = \text{Tr}[\varrho_M E^-(x) E^+(x)] \quad (9.22)$$

jelölést. A ϱ_M mögött itt a mezőnek ismét csak egy polarizációs komponensét tekintjük, ezért a vektorjelölést elhagyjuk, és az $x = (\mathbf{r}, t)$ jelölést használjuk a térbeli és időbeli koordináták összefoglalására. Minthogy ez a $G^{(1)}$ a detektor megszólalásának valószínűségével arányos, ezt a mennyiséget fogjuk a kvantumos mező intenzitásának tekinteni az x téridő pontban.

$$I(\mathbf{r}, t) := G^{(1)}(x, x). \quad (9.23)$$

A függvény argumentumának megkettőzésének oka és az (1) felső index jelentése az alábbiakból derül ki.

9.2.1. A Young-féle kísérlet értelmezése a kvantumos mező esetén

A Young-féle kísérlet során az interferáló mezők eredőjének pozitív frekvenciás részét az összetevők megfelelő részének összege adja, így:

$$\mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) = K_1 \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_1, t_1) + K_2 \mathbf{E}^+(\mathbf{r}_2, t_2). \quad (9.24)$$

Mostantól föltesszük, hogy rögzített és azonos polarizációjú mezők interferenciáját tekintjük, így az $\mathbf{E}$ -t skalárisnak vesszük. A mező intenzitása a (9.23) definíciónak és (9.22)-nek megfelelően

$$I(\mathbf{r}, t) = \text{Tr}[\varrho_M E^-(r, t) E^+(r, t)] = |K_1|^2 G^{(1)}(x_1, x_1) + |K_2|^2 G^{(1)}(x_2, x_2) + 2\text{Re}[K_1^* K_2 G^{(1)}(x_1, x_2)], \quad (9.25)$$

ahol

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \text{Tr}[\varrho_M E^-(x_1) E^+(x_2)]. \quad (9.26)$$

Ez utóbbi mennyiség az általános elsőrendű korrelációs függvény, amelynek a (9.22) speciális esete. Ezek után definiálhatjuk a *normált elsőrendű korrelációs függvényt*:

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{G^{(1)}(x_1, x_2)}{[G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)]^{1/2}}, \quad (9.27)$$

amelyre bizonyíthatóan érvényes a $0 \leq |g^{(1)}(x_1, x_2)| \leq 1$ egyenlőtlenség. A koherencia mértékét a $g^{(1)}(x_1, x_2)$ függvény abszolút értéke adja meg az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} |g^{(1)}(x_1, x_2)| &= 1 && \text{teljes koherencia} \\ |g^{(1)}(x_1, x_2)| &< 1 && \text{parciális koherencia} \\ |g^{(1)}(x_1, x_2)| &= 0 && \text{inkoherencia} \end{aligned}$$

Az a eltüntető operátorral megadott egymódusú haladó hullámú mező esetén, a mező pozitív frekvenciás része, (9.15) alapján

$$E^+(x) = i K a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (9.28)$$

ahol $K = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 V}}$. Ha a mező egy $|n\rangle$ számállapotban van, akkor

$$G^{(1)}(x, x) = \langle n | E^-(x) E^+(x) | n \rangle = |K|^2 n, \quad (9.29)$$

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \langle n | E^-(x_1) E^+(x_2) | n \rangle = |K|^2 n \exp[i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega(t_1 - t_2)] \quad (9.30)$$

és így

$$|g_{|n\rangle}^{(1)}(x_1, x_2)| = 1. \quad (9.31)$$

Egy $|\alpha\rangle$ koherens állapotra hasonlóan

$$G^{(1)}(x, x) = \langle \alpha | E^-(x) E^+(x) | \alpha \rangle = |K|^2 |\alpha|^2 \quad (9.32)$$

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \langle \alpha | E^-(x_1) E^+(x_2) | \alpha \rangle = |K|^2 |\alpha|^2 \exp[i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega(t_1 - t_2)] \quad (9.33)$$

így most is:

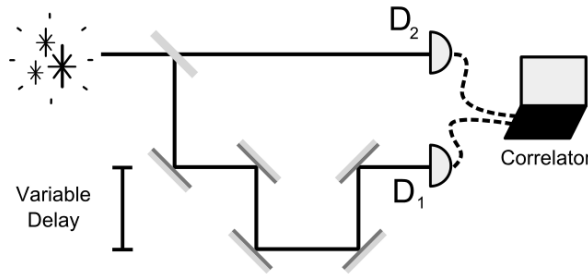
$$|g_{|\alpha\rangle}^{(1)}(x_1, x_2)| = 1 \quad (9.34)$$

Vegyük észre, hogy a teljes koherencia azon múlik, hogy a $g^{(1)}(x_1, x_2)$ számlálójában álló korrelációs függvény faktorizálható, azaz a kérdéses állapotokban, tehát egy számállapotban vagy egy koherens állapotban:

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \langle E^-(x_1) E^+(x_2) \rangle = \langle E^-(x_1) \rangle \langle E^+(x_2) \rangle \quad (9.35)$$

9.3. Magasabb rendű koherenciafüggvények

Az 1950-es években Jánossy Lajos és munkatársai, Ádám András és Varga Péter Budapesten, majd kicsit később tőlük függetlenül R. Hanbury Brown és R. Twiss Manchesterben újfajta korrelációs kísérleteket végeztek, amelyekben az amplitúdók korrelációi helyett a fényintenzitások korrelációit keresték. Egy ilyen kísérlet vázlatát mutatja a 9.3 ábra



9.3. ábra. A Hanbury Brown - Twiss korrelációs kísérletek vázlatos rajza.

A korrelátor a két detektor áramának szorzatát méri, ahol az egyik karban a fényút tükrök segítségével vaáltoztatható, s ez τ idővel késleltetheti a mező értékét a másik karbeli értékhez képest. A koincidenciákat számláló korrelátor a *klasszikus* értelmezés szerint a

$$C(\tau) = \langle I(t) I(t + \tau) \rangle \quad (9.36)$$

átlagot méri, ahol $I(t)$ és $I(t + \tau)$ a detektoroknál vett pillanatnyi klasszikus intenzitásokat jelenti. Tegyük föl, hogy a mező stacionárius, azaz, hogy a $C(\tau)$ függvény csak a τ késleltetési időtől függ, t -től nem. Ha a τ késleltetési idő rövidebb mint a koherenciaidő, akkor a $C(\tau)$ függvény információt szolgáltat a mező

statisztikus tulajdonságairól. Tegyük föl, hogy a nyalábosztó 50-50-es tehát magának az intenzitásnak az átlaga azonos a két detektornál. Vezessük be ennek megfelelően a *klasszikus* normált másodrendű korrelációs függvényt a

$$\gamma^{(2)}(\tau) = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} = \frac{\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle}{\langle E^*(t)E(t) \rangle^2} \quad (9.37)$$

definícióval, ahol a második egyenlőséget az amplitúdó és az intenzitás közti kapcsolatnak megfelelően írtuk föl. Ha a detektorok különböző távolságra vannak a nyalábosztótól, akkor ezt koordinátafüggő amplitúdókkal kell venni és a

$$\gamma^{(2)}(x_1, x_2) = \frac{\langle E^*(x_1)E^*(x_2)E(x_2)E(x_1) \rangle}{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle} \quad (9.38)$$

definícióval lehet figyelembe venni.

Azt mondjuk, hogy a mező másodrendben koherens, ha

$$|\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| = 1 \quad \text{és} \quad \gamma^{(2)}(x_1, x_2) = 1. \quad (9.39)$$

A második föltételhez az szükséges, hogy teljesüljön a

$$\langle E^*(x_1)E^*(x_2)E(x_2)E(x_1) \rangle = \langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle \quad (9.40)$$

faktorizációs föltétel. Egyszerű belátni, hogy egy monokromatikus síkhullám esetén, amikor a komplex írásmód szerint $E(x) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ valós amplitúdóval, akkor

$$\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle = E_0^4, \quad (9.41)$$

és így $\gamma^{(2)}(\tau) = 1$. Tetszőleges állandó, nem fluktuáló nyalábra ugyanez az eredmény.

A másodrendű koherencia függvény azonban szemben az elsőrendűvel nincs korlátozva az 1-nél kisebb értékekre. Ezt belátandó tekintsük a nulla késleltetésű koherencia függvényt:

$$\gamma^{(2)}(0) = \frac{\langle I^2(t) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}. \quad (9.42)$$

A $t_1, t_2, \dots, t_N$ időpontokban végzett N számú sorozat mérése esetén a jelzett átlagok:

$$\langle I(t) \rangle = \frac{I(t_1) + I(t_2) + \dots + I(t_N)}{N} \quad \text{és} \quad \langle I^2(t) \rangle = \frac{I^2(t_1) + I^2(t_2) + \dots + I^2(t_N)}{N}. \quad (9.43)$$

Minthogy bármely méréspárra érvényes a $2I(t_1)I(t_2) \leq I^2(t_1) + I^2(t_2)$ egyenlőtlenség így

$$\langle I(t) \rangle^2 \geq \langle I^2(t) \rangle, \quad (9.44)$$

amiből:

$$1 \leq \gamma^{(2)}(0) < \infty. \quad (9.45)$$

Azaz egyrészt nincs felső határ, másrészt viszont a 0 késleltetésnél a másodrendű koherencia függvény mindig legalább 1. Mivel az intenzitás értéke mindig nemnegatív a (9.37) összefüggés számlálójában és természetesen a nevezőjében is nemnegatív mennyiségek átlaga szerepel, így nyilvánvalóan $0 \leq \gamma^{(2)}(\tau) < \infty$, ha $\tau \neq 0$.

$2I(t_1)I(t_1 + \tau) \leq I^2(t_1) + I^2(t_1 + \tau)$ miatt érvényes az

$$[I(t_1)I(t_1 + \tau) + \dots I(t_N)I(t_N + \tau)]^2 \leq [I^2(t_1) + \dots + I^2(t_N)] [I^2(t_1 + \tau) + \dots + I^2(t_N + \tau)] \quad (9.46)$$

egyenlőtlenség is, és ha elég sok mérést végzünk, akkor a két tényező a jobboldalon megegyezik, így azt kapjuk, hogy

$$\gamma^{(2)}(\tau) \leq \gamma^{(2)}(0). \quad (9.47)$$

A (9.45) és (9.47) egyenlőtlenségek tipikusan klasszikus mezőkre érvényesek, amint az a levezésből is kiderül. Ennek azért van nagy jelentősége, mert bizonyos kvantumozott mezők esetén ezek az egyenlőtlenségek sérülnek.

Nagyszámú független forrásból származó fény esetén meg lehet mutatni, hogy az első és másodrendű koherencia függvények a

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + |\gamma^{(1)}(\tau)|^2 \quad (9.48)$$

kapcsolatban vannak egymással, így ekkor a $|\gamma^{(1)}(\tau)| \leq 1$ korlát miatt klasszikus mezőre $1 \leq \gamma^{(2)}(\tau) \leq 2$. Pl. Lorentz-spektrumú forrás esetén:

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + \exp\{-2|\tau|/\tau_C\}. \quad (9.49)$$

Ez azt jelenti, hogy $\tau \rightarrow \infty$ esetén $\gamma^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$, ez felel meg a független fényintenzitásoknak, míg $\gamma^{(2)}(0) = 2$. Valóban Hanbury Brown és Twiss mérései mutatták ezt az effektust. Egyenlő úthosszak, azaz $\tau = 0$ esetén a detektorok áramának szorzatának átlaga (normálva az egyes áramok átlagával) kétszerese volt a nagy késleltetéssel mért megfelelő átlaghoz képest. (Jánossy csoportjának az effektus kimutatása nem sikerült, az 1950-es években a Magyarországon elérhető – detektorként szolgáló – fotoelektronsokszorozók érzékenysége nem volt elegendő ehhez.) Látható, hogy a mérés a késleltetés változtatásának révén alkalmas a koherenciaidő meghatározására.

9.4. A másodrendű koherencia kvantumozott tárgyalása

A (9.18) formulához hasonlóan megadhatjuk annak a kétfotonos folyamatnak a kvantummechanikai valószínűségét, hogy a mezőből az $\mathbf{r}_1$ pontban a t_1 időpontban, illetve az $\mathbf{r}_2$ pontban a t_2 időpillanatban egy-egy foton elnyelődik:

$$|\langle f | E^+(\mathbf{r}_2, t_2) E^+(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle|^2, \quad (9.50)$$

ahol ismét csak a térerősség operátorok pozitív frekvenciás része szerepel a mátrixelemben, mert az tartalmazza az eltüntető operátort, ami fotonabszorpcióval működő detektorokat föltételez. Végrehajtva a végállapotok teljes rendszerére az összegzést a (9.19) összefüggéshez vezető átalakításhoz hasonlóan kapjuk a valószínűségekre az

$$\langle i | E^-(\mathbf{r}_1, t_1) E^-(\mathbf{r}_2, t_2) E^+(\mathbf{r}_2, t_2) E^+(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle \quad (9.51)$$

eredményt. A mező ϱ_M sűrűségoperátorral megadható keverék állapotait is megengedve kapjuk a *másodrendű kvantumozott korrelációs függvény* általános definícióját:

$$G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) := \text{Tr}[\varrho_M E^-(x_1) E^-(x_2) E^+(x_2) E^+(x_1)]. \quad (9.52)$$

A normálrendezett argumentum itt is lényeges. A *másodrendű kvantumos koherencia függvényt* ebből a következő normálással kapjuk:

$$g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) := \frac{G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1)}{G^{(1)}(x_1, x_1)G^{(1)}(x_2, x_2)}. \quad (9.53)$$

Ez a mennyiség az x_1 és x_2 téridőpontokban észlelt egy-egy foton detektálásának együttes valószínűségével arányos mennyiségként értelmezhető. Egyszerűen látható, hogy $g^{(2)}$ mindig nemnegatív.

A kvantumos mezőt másodrendig koherensnek nevezzük, ha mind a (9.27)-ben definiált elsőrendű koherencia függvény abszolút értéke, mind az itt definiált másodrendű koherencia függvény értéke egységi:

$$|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1, \quad g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = 1. \quad (9.54)$$

Ez láthatólag megköveteli, hogy a $G^{(2)}$ függvény faktorizálható legyen:

$$G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = G^{(1)}(x_1, x_1)G^{(1)}(x_2, x_2). \quad (9.55)$$

Egy azonos rögzített helyen, ami a 9.3 ábrán a nyalábosztó egy pontja $g^{(2)}$ csak a két karhossz különbségével meghatározott τ időkülönbségtől függ:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle E^-(t)E^-(t+\tau)E^+(t+\tau)E^+(t) \rangle}{\langle E^-(t)E^+(t) \rangle \langle E^-(t+\tau)E^+(t+\tau) \rangle}, \quad (9.56)$$

ami annak a föltételes valószínűségével arányos, hogy ha egy foton detektálódik a t időpontban, akkor egy másik detektálódik a $t + \tau$ időpillanatban is.

Tekintsünk most egy egyetlen haladóhullámú módust tartalmazó monokromatikus mezőt, amelynek pozitív frekvenciás operátora $E^+ = a e^{i(kz - \omega t)}$, s így $E^- = a^\dagger e^{-i(kz - \omega t)}$. Betéve ezeket a fönti formulába, a

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle \langle a^\dagger a \rangle} = \frac{\langle \hat{n}(\hat{n} - 1) \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} = 1 + \frac{(\Delta \hat{n})^2 - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} \quad (9.57)$$

eredmény adódik. Itt $\hat{n} = a^\dagger a$ a módus számoperátora $\langle \hat{n} \rangle$ a fotonszám várható értéke, $(\Delta \hat{n})^2$ a fotonszám szórásnégyzete. Látható, hogy az eredmény független a τ késleltetéstől. Látható, hogy az eredmény ez esetben a 4 fejezetben bevezetett Q_M Mandel paraméterrel a $g^{(2)}(\tau) = 1 + Q_M$ kapcsolatban van.

Az eredmény azt mutatja, hogy egy $|\alpha\rangle$ koherens állapotban, ahol mint tudjuk $\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2$ és $(\Delta \hat{n})^2 = |\alpha|^2$,

$$g^{(2)}(\tau)|_{|\alpha\rangle} = 1. \quad (9.58)$$

Ez az állapot a fönti (9.54) definíció szerint másodrendben koherens.

Ezzel szemben egy termikus állapot egyetlen ω körfrekvenciájú kiszűrt módusában mint tudjuk $\langle \hat{n} \rangle_T = 1 / [\exp(-\hbar\omega/k_B T) - 1]$ illetve $(\Delta \hat{n})_T^2 = \langle \hat{n} \rangle_T + \langle \hat{n} \rangle_T^2$, s így

$$g^{(2)}(\tau)|_T = 2. \quad (9.59)$$

Meg lehet mutatni, hogy egy sokmódusú, nem szűrt termikus állapotban a klasszikus esethez hasonlóan

$$g^{(2)}(\tau)|_T = 1 + |g^{(1)}(\tau)|_T|^2, \quad (9.60)$$

ami szintén a 1 és 2 közé esik.

Meg lehet mutatni, hogy egy Lorentz-spektrummal rendelkező forrás esetén a $g^{(2)}(\tau)$ hasonlóan a klasszikus eredményhez

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \exp\{-2|\tau|/\tau_C\}, \quad (9.61)$$

azaz $g^{(2)}(0) = 2$, és $g^{(2)}(\infty) = 1$. Ez azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy rövid időn belül két fotont detektálunk, nagyobb mint az egyetlen foton detektálásának valószínűsége. Ezt a jelenséget szokás foton sűrűsödésnek (photon bunching) nevezni, és ezt az effektust figyelte meg Hanbury Brown és Twiss, amikor a korrelátorok áramának szorzata maximálisnak bizonyult a nulla időkésltetés esetén.

Tekintsünk most egy számállapotot. Ebben $(\Delta\hat{n})^2 = 0$ minden $|n\rangle$ -re és $\langle\hat{n}\rangle = n$. Ennek megfelelően

$$g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 0, 1; \\ 1 - \frac{1}{n}, & \text{ha } n \geq 2. \end{cases} \quad (9.62)$$

Láthatólag $g^{(2)}(0) < 1$, azaz a klasszikus esetre vonatkozó $g^{(2)}(0) \geq 1$ egyenlőtlenség a kvantumos koherencia függvényre már ebben az állapotban nem érvényes. A $g^{(2)}(0) < 1$ teljesül, ha $(\Delta\hat{n})^2 < \langle\hat{n}\rangle$, ezeket az állapotokat sub-Poisson állapotoknak neveztük korábban.

Egyetlen kétnívós atom erős rezonáns gerjesztése esetén az atom által szórt fényt rezonancia fluoreszcenciának nevezzük. A gerjesztéskor az atom Ω_r körfrekvenciával Rabi oszcillációkat végez, de közben a spontán emisszió, melynek időállandóját itt γ -val jelöljük, minduntalan csökkenti a felső nívó populációját. A folyamat leírása kívül esik a jegyzet keretén, de a keletkező mező másodrendű koherenciafüggvénye a következő:

$$g^{(2)}(\tau) = [1 - \exp(-\gamma\tau/2)]^2, \quad \text{ha } \Omega_r \ll \gamma, \quad (9.63)$$

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - \exp(-3\gamma\tau/4) \cos \Omega_r t, \quad \text{ha } \Omega_r \gg \gamma. \quad (9.64)$$

Mindkét esetben $g^{(2)}(0) = 0$, és nyilván

$$g^{(2)}(0) \leq g^{(2)}(\tau). \quad (9.65)$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy *fotonritkulás* (photon antibunching) lépett föl, azaz annak a valószínűsége, hogy röviddel egy foton beérkezése után még egy fotont detektálunk kicsi, két foton egyidejű detektálásának valószínűsége pedig 0. Ez azzal kapcsolatos hogy a forrás egyetlen atomból áll, és miután a felső nívóról az alsóra kerülve egy fotont emittált idő kell ahhoz, hogy még egy fotont emittáljon. Ez a jelenség ismét a foton mint energiakvantum oszthatatlanságának kísérleti bizonyítéka.

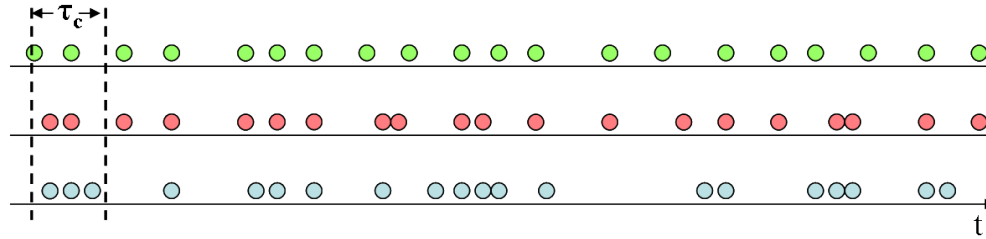
Megemlíjtük még, hogy az első és másodrendű korrelációs függvényhez hasonlóan be lehet vezetni az n -edrendű függvényt is a

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n \dots x_1) := \text{Tr}[\rho_M E^-(x_1) \dots E^-(x_n) E^+(x_n) \dots E^+(x_1)], \quad (9.66)$$

illetve a megfelelő koherenciafüggvényt a

$$g^{(n)}(x_1, x_2 \dots x_n; x_n \dots x_2, x_1) := \frac{G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n \dots x_1)}{G^{(1)}(x_1, x_1) \dots G^{(1)}(x_n, x_n)} \quad (9.67)$$

definíciókkal. A mező n -ed rendben koherens, ha $|g^{(k)}| = 1$ minden $k \leq n$ esetén. Ennek szükséges és elégséges feltétele a másodrendűhöz hasonló faktorizáció érvényessége. Egyszerűen belátható, hogy egy $|\alpha\rangle$ koherens állapot tetszőleges n esetén n -ed rendben koherens.



9.4. ábra. A foton detektálás időbeli lefolyása a) antibunching (azaz egyetlen atomból kibocsátott fény) esetén, b) random (azaz koherens állapot, vagy lézernyaláb) esetén, és c) bunching (kaotikus fény) esetén. τ_c a koherencia időt jelöli. **Forrás:** http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Photon_bunching.png

Ellenőrző kérdések

1. Vázolja a Young-féle kétréses kísérletet.
2. Hogyan definiáljuk az elsőrendű normált koherenciafokot?
3. Fotonabszorpcióval működő detektor esetén mi határozza meg a mező intenzitását?
4. Mit nevezünk normált elsőrendű kvantumkorrelációs függvénynek?
5. Mennyi a normált kvantumkorrelációs függvény értéke koherens illetve számállapotok esetén?
6. Hogyan vezetjük be a magasabb rendű klasszikus koherenciafüggvényeket?
7. Mi a jelentése a másodrendű kvantumos normált koherenciafüggvénynek?
8. Milyen különbség van a másodrendű koherenciafüggvényben a termikus, a koherens és a számállapot között?
9. Mit nevezünk fotonritkulásnak?

10. fejezet

A Jaynes–Cummings–Paul-modell

10.1. Bevezetés

Az atomok és a mező kölcsönhatásának elvileg legegyszerűbb modellje a következő. Csak egyetlen atomot tekintünk egy állóhullámú üregben, és fölteszük, hogy az atomnak csak két kiválasztott stacionárius állapota közötti egyetlen átmenet játszik szerepet, az, amelyik az üregben kialakuló diszkrét állóhullámok közül az egyikkel rezonáns módon kölcsönhatásba tud lépni. Ezt a modellt Jaynes–Cummings-modellnek (JC-modell) vagy helyesebben Jaynes–Cummings–Paul-modellnek (JCP-modell) ([11],[12]) nevezzük amelynek nemtriviális kvantumos mozgásegyenlete egzaktul megoldható.

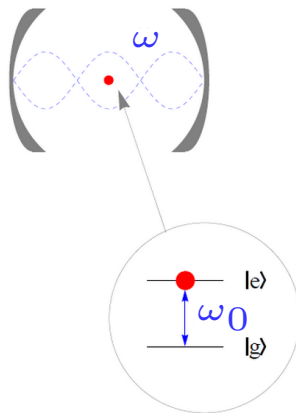


10.1. ábra. Edwin Thompson Jaynes (1922 - 1998) amerikai fizikus. **Forrás:** http://en.wikipedia.org/wiki/Edwin_Thompson_Jaynes

Az 1980-as évek második felétől kezdve sikerült olyan kísérleteket végezni [27], ahol ezt az első látásra igen leegyszerűsítettnek tűnő modellrendszert ténylegesen is megvalósították. Egy szupravezető üregben kialakuló és kevésbé csillapított mező egyetlen állóhullámú módusa kölcsönhat az üregen áthaladó rezonáns atommal, és az ezután az üregből kilépő atom állapotából következtetni lehet a mezővel való kölcsönhatás dinamikájára. A mérések igazolták a mező kvantumelektrodinamikai modelljének helyességét, nyilvánvalóvá tették pl. az üregbeli mező energiájának diszkrét szerkezetét, ami a fotonok létezésének egykor sokat vitatott tényét újra közvetlenül bizonyították. Ebben a fejezetben a modell

elméleti vonatkozásait tárgyaljuk, a kísérletek elemzésére a következő fejezetben kerül sor.

Mielőtt a teljes kvantumelektrodinamikai tárgyaláshoz kezdenénk, előbb megoldjuk a feladat félklasszikus változatát, az úgynevezett *optikai Rabi problémát*, amelynek ma már fontos metrológiai és technológiai alkalmazásai is vannak.



10.2. ábra. A Jaynes-Cummings modell vázlatos rajza: Egy szupravezető üregben kialakuló és kevésbé csillapított mező egyetlen állóhullámú módusa kölcsönhat az üregen áthaladó rezonáns atommal, és az üregből kilépő atom állapotából következtetni lehet a mezővel való kölcsönhatás dinamikájára

Forrás: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jaynes-Cummings_model.png

10.2. Kétnívós atom klasszikus mezőben

Tekintsük a mezőt és az azzal kölcsönhatásban lévő atomot, amelynek csak két stacionárius állapota közötti átmenetet vizsgálunk. Az atomok többi nívójával és az atom mint egész tömegközépponti mozgásával itt nem foglalkozunk, ezek figyelembevételéről a kísérletek elemzésénél lesz szó. Ebben a szakaszban a probléma félklasszikus változatát tekintjük át röviden, ahol az atomot kvantummechanikailag, a mezőt viszont klasszikusan kezeljük. Ezt a feladatot optikai Rabi-problémának szokás nevezni. I. Rabi vizsgálta ugyanis azt a teljesen analóg modellt, ahol egy atommag két ellentétes spinű – és emiatt egy állandó külső mágneses mezőben különböző energiájú – állapota között egy további oszcilláló mágneses mező rezonáns átmenetet indukál. A Rabi-probléma, azaz a *klasszikus* mező hatására végbemenő atomi kvantum dinamika vizsgálata módot ad majd arra, hogy ezt követően rá tudjunk világítani a mező *kvantum* tulajdonságaiból származó lényeges különbségekre a klasszikus változattal szemben.

Egyetlen atom esetén legyen a két stacionárius állapot egyike $|e\rangle$ a felső, gerjesztett, a másik pedig $|g\rangle$ az alsó, az alapállapot, a köztük lévő energiakülönbség pedig $\hbar\omega_0$. Ezek tehát az atomi Hamilton operátor sajátállapotai a

$$H_0 |e\rangle = \varepsilon_e |e\rangle = \frac{\hbar\omega_0}{2} |e\rangle, \quad H_0 |g\rangle = \varepsilon_g |g\rangle = -\frac{\hbar\omega_0}{2} |g\rangle \quad (10.1)$$

sajátértékegyenletnek megfelelően, ahol az energia nulla szintjét az atomban a két figyelembe vett atomi energianívó ε_e és ε_g számtani közepénél vesszük föl. $|e\rangle$ és $|g\rangle$ egymásra ortogonális és normálnak tekintjük őket.

Föltesszük, hogy az atom kölcsönhat az ebben a szakaszban klasszikusnak tekintett

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \quad (10.2)$$

lineárisan poláros monokromatikus mezővel, amely az atom méretein belül nem függ a helytől. Ez nagyon jó közelítéssel érvényes, mert az a atomi méret, amely nagyságrendileg a Bohr-sugárnak felel meg, optikai frekvenciák esetén általában három nagyságrenddel kisebb mint a mező $\lambda = 2\pi c/\omega$ hullámhossza. Az $a \ll \lambda$ reláció érvényes marad abban az alább tárgyalandó esetben is (Rydberg-atomok mikrohullámú mezőben), ahol a figyelembe veendő a atomi méret ugyan három nagyságrenddel nagyobb lesz mint a Bohr-sugár, ám a λ itt már a cm-es tartományba esik. Ilyenkor az atom mező kölcsönhatást megadó operátor alakja

$$K = -DE_0 \cos \omega t, \quad (10.3)$$

ahol D az atomi dipólusmomentum operátora. Föl fogjuk tenni, hogy a mező körfrekvenciája közel esik az atomi átmenet frekvenciájához, amit az

$$\omega_0 - \omega =: \Delta \ll \omega_0 \quad (10.4)$$

föltétel fejez ki. Δ -t *elhangolásnak* nevezzük.

Most fölírjuk az atomra vonatkozó időfüggő Schrödinger egyenletet, amelynek alakja

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = (H_0 + K(t)) |\Psi(t)\rangle = (H_0 - DE_0 \cos \omega t) |\Psi(t)\rangle. \quad (10.5)$$

A megoldást keressük a két stacionárius állapot időfüggő szuperpozíciójaként a

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= b_g(t) e^{-i\Delta t/2} e^{-i\varepsilon_g t/\hbar} |g\rangle + b_e(t) e^{i\Delta t/2} e^{-i\varepsilon_e t/\hbar} |e\rangle \\ &= b_g(t) e^{-i\Delta t/2} e^{i\frac{\omega_0 t}{2}} |g\rangle + b_e(t) e^{i\Delta t/2} e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}} |e\rangle \end{aligned} \quad (10.6)$$

alakban, ahol a H_0 -nak megfelelő $e^{-i\varepsilon_{g(e)}t/\hbar}$ stacionárius fázisfaktorokat és az elhangolás felét tartalmazó további $e^{\pm i\Delta t/2}$ fázisszorzókat célszerűen leválasztottuk az időfüggő együtthatókból. A kölcsönhatásból származó időfüggő amplitúdókat itt $b_{e(g)}$ -vel jelöltük.

Írjuk be a $|\Psi(t)\rangle$ eme alakját a (10.5) egyenletbe, majd képezzük annak skaláris szorzatát balról $\langle g|$ -vel, illetve $\langle e|$ -vel. Vegyük figyelembe H_0 sajátértékegyenletét, az $\langle e|g\rangle = 0$ ortogonalitási relációt, továbbá azt, hogy a D operátor páratlan (tértükrozkéskor előjelet vált), s így az atomi nívók közötti diagonális mátrixelemei eltűnnek (Laporte-szabály). Így a D operátor mátrixelemei:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e| D |e\rangle = \langle g| D |g\rangle, \\ d &:= \langle e| D |g\rangle, \quad d^* = \langle g| D |e\rangle, \end{aligned} \quad (10.7)$$

mert mind $|g\rangle$, mind $|e\rangle$ határozott paritású, lévén atomi állapotok. Hagyjuk el továbbá a $\cos \omega t = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ beírása után föllépő az $\omega + \omega_0$ körfrekvenciával változó két úgynevezett antirezonáns tagot, amelyek egy idő szerinti integrálás során nagy nevezővel jelentkeznek, és így elhanyagolhatók az $\omega_0 - \omega = \Delta$ frekvenciával történő változáshoz képest. Ezt az elhanyagolást nevezzük forgóhullámú közelítésnek, vagy az angol elnevezés: rotating wave approximation rövidítésével RWA-nak. Így az időfüggő amplitúdókra kapjuk, hogy

$$\dot{b}_g = i\frac{\Delta}{2} b_g + i\frac{\Omega_r^*}{2} b_e, \quad (10.8)$$

$$\dot{b}_e = -i\frac{\Delta}{2} b_e + i\frac{\Omega_r}{2} b_g, \quad (10.9)$$

ahol

$$\Omega_r = \frac{d}{\hbar} E_0 \quad (10.10)$$

az úgynevezett *klasszikus rezonáns Rabi-frekvencia*.



10.3. ábra. Isidor Isaac Rabi (1898- 1988) amerikai fizikus . **Forrás:** http://commons.wikimedia.org/wiki/File:II_Rabi.jpg

10.1 Feladat: Mutassuk meg, hogy a (10.8, 10.9) rendszerből következik, hogy $|b_g|^2 + |b_e|^2 =$ állandó. Az állandót a $|\Psi(t)\rangle$ normálása miatt 1-nek választjuk.

10.2 Feladat: Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E} = E_0(\hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t)$ cirkulárisan polarizált külső mező esetén a fenti egyenletek RWA nélkül is egzaktak.

A (10.8 10.9) egyenletrendszernek a

$$b_g(0) = 1, \quad b_e(0) = 0, \quad (10.11)$$

kezdeti föltételhez tartozó megoldása

$$b_e = i \frac{\Omega_r}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2}, \quad (10.12)$$

$$b_g = \left(\cos \frac{\Omega t}{2} + i \frac{\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \right), \quad (10.13)$$

ahol

$$\Omega = \sqrt{|\Omega_r|^2 + \Delta^2} \quad (10.14)$$

neve a (nemrezonáns) Rabi-frekvencia.

10.3 Feladat: Ellenőrizzük, hogy a megoldás megfelel a $|b_g|^2 + |b_e|^2 = 1$ előírásnak.

A megoldásból látható, hogy a felső nívó betöltöttségének valószínűsége

$$|b_e|^2 = \frac{|\Omega_r|^2}{|\Omega_r|^2 + \Delta^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2} = \frac{|\Omega_r|^2}{|\Omega_r|^2 + \Delta^2} \frac{1}{2} (1 - \cos \Omega t), \quad (10.15)$$

ami 0 és $\frac{|\Omega_r|^2}{|\Omega_r|^2 + \Delta^2}$ között oszcillál Ω körfrekvenciával. Pontos rezonancia esetén $\omega = \omega_0$, $\Delta = 0$, a felső nívó populációja eléri az 1 értéket, az atom periodikusan Ω_r körfrekvenciával teljesen invertálódik illetve újra az alsó állapotba kerül.

10.4 Feladat: Mutassuk meg, hogy tetszőleges kezdőfeltételek esetén a félklasszikus Rabi-probléma megoldása:

$$\begin{pmatrix} b_e(t) \\ b_g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} - i \frac{\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} & i \frac{\Omega_r}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \\ i \frac{\Omega_r^*}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} & \cos \frac{\Omega t}{2} + i \frac{\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_e(0) \\ b_g(0) \end{pmatrix}. \quad (10.16)$$

Egy állandó amplitúdójú külső mezőben, pontos rezonancia esetén az $\Omega_r t_\pi = \pi$ feltételt teljesítő t_π időtartamig tartó impulzus éppen invertálja az atomot, ezért ezt π impulzusnak nevezzük. Az $\Omega_r t_{2\pi} = 2\pi$ egyenlőség teljesülése esetén viszont az alapállapotból induló atom $t_{2\pi}$ idő múlva visszakerül az alapállapotba. A $t_{\pi/2} = \pi/(2\Omega_r)$ úgynevezett $\pi/2$ impulzus az eredetileg akár az alsó akár a felső stacionárius állapotban lévő atomot a két energiasajátállapot egyenlő súlyú szuperpozíciójába viszi. Hasonló a folyamat akkor is, ha a kezdőállapot a felső $|e\rangle$ nívó, ez esetben egy π impulzus éppen az alsó állapotba viszi az atomi rendszert stb.

A fent tárgyalt Rabi-megoldás atomok optikai gerjesztéseinél csak akkor érvényes, ha az atom és a mező kölcsönhatása *koherens*, ami két feltétel teljesítését kívánja. Egyrészt az atomi állapotok a populációit a folyamatra jellemző Ω_r^{-1} nagyságrendű időtartamon belül egyéb relaxációs folyamatok (pl. spontán emisszió, ütközések) nem változtathatják meg, másrészt – s ez még szigorúbb feltételt jelent – ez alatt az időtartam alatt a (10.6) kifejtésben az $|e\rangle$ és $|g\rangle$ együtthatóinak egymáshoz viszonyított *fázisa* sem változhat meg más ok miatt (pl. ütközések) mint amit a (10.8, 10.9) egyenletek előírnak. Ez az utóbbi előírás az, ami könnyebben sérül, és így nehezebb teljesíteni. Az optikai Rabi oszcilláció jelenségét először az 1970-es évek elején sikerült előbb molekulák infravörös átmenetein, majd a látható tartományhoz közel Rb atomok gőzében egy 794 nm-es átmeneten is demonstrálni.

10.3. Kétnívós atom kvantumos mezőben, a Jaynes–Cummings–Paul-modell Hamilton-operátora

Térjünk rá most arra az esetre, amikor mind az atomot mind a mezőt kvantummechanikailag írjuk le. A rendszer Hamilton-operátora most is

$$H = H_0 + K, \quad (10.17)$$

ahol $H_0 = H_a + H_f$ az egymástól független atom illetve mező Hamilton-operátorának összege, míg K a kölcsönhatási operátor a két részrendszer között.

Foglalkozzunk először a H_a atomi Hamilton-operátor alakjának fölírásával. Vezessük be a $\sigma_+ = |e\rangle\langle g|$, $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ definícióval az atomi léptető operátorokat, amiből

$$\begin{aligned}\sigma_+|g\rangle &= |e\rangle, & \sigma_+|e\rangle &= 0, \\ \sigma_-|g\rangle &= 0, & \sigma_-|e\rangle &= |g\rangle,\end{aligned}$$

és legyen

$$\sigma_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \quad (10.18)$$

a felső illetve az alsó állapotra való projekciók különbsége. A jelölés oka, hogy a fenti σ_k operátorok a spin elméletéből ismert Pauli operátorok (mátrixok) fölcserélési relációinak tesznek eleget.

10.5 Feladat: Bizonyítsuk a $[\sigma_3, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm$ és a $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_3$ kommutátorok fönnállását.

Azonnal látható, hogy ha az energia nulla szintjét az atomban a két figyelembe vett atomi energianívó számtani közepénél vesszük föl, akkor az atomi Hamilton-operátor alakja $H_a = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3$, amelynek sajátállapotai $|e\rangle$ és $|g\rangle$, $\pm \frac{\hbar\omega_0}{2}$ sajátértékekkel. A mező Hamilton-operátorát, minthogy az most a föltételezés szerint egyetlen móduából áll $H_f = \hbar\omega a^\dagger a$ alakba írjuk, ahol a $\hbar\omega/2$ alapállapot energiát – minthogy az konstans – elhagyjuk. Ezek szerint

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3 + \hbar\omega a^\dagger a \quad (10.19)$$

H_0 sajátvektorait az atom és a mező energia-sajátállapotainak (tenzor)szorzataiból kapjuk.

$$H_0 |e, n\rangle = \left(\frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar n\omega \right) |e, n\rangle, \quad (10.20)$$

$$H_0 |g, n\rangle = \left(-\frac{\hbar\omega_0}{2} + \hbar n\omega \right) |g, n\rangle. \quad (10.21)$$

Vizsgáljuk most a K kölcsönhatási operátort. Ezt az előzőekhez hasonlóan lineárisan poláros mezőt föltételezve $K = -DE$ alakúnak vehetjük, ahol a D az atomi dipólus-operátor. Ennek alakja az $|e\rangle, |g\rangle$ bázisvektorokkal a (10.7) mátrixelemeknek megfelelően

$$D = d |e\rangle\langle g| + d^* |g\rangle\langle e| = d\sigma_+ + d^*\sigma_-. \quad (10.22)$$

A továbbiakban itt is föltesszük, hogy $d = d^*$.

Az egyetlen $-\hat{x}$ irányban polarizáltnak föltételezett – módus elektromos térerősség operátorát vegyük

$$E = (a + a^\dagger) \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \sin kz = \mathcal{E}_0 \sin kz (a + a^\dagger) \quad (10.23)$$

alakúnak, és föltételezzük, hogy a mező hullámhosszánál jóval kisebb méretű atom a mező duzzadó helyénél hat kölcsön a térrel, azaz ahol $|\sin kz| = 1$. A számolás egyszerűbben kezelhető a $\sin kz = -1$ választással, tehát ha a kölcsönhatási operátor alakja

$$K = \mathcal{E}_0 (d\sigma_+ + d^*\sigma_-)(a + a^\dagger). \quad (10.24)$$

Mint korábban láttuk, a mező operátorainak időfüggését szabad térben (atom nélkül) az

$$a(t) = a(0)e^{-i\omega t}, \quad a^\dagger(t) = a^\dagger(0)e^{i\omega t} \quad (10.25)$$

harmonikus időfejlődés adja.

Hasonlóan egyszerűen megmutatható, hogy a $H_a = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3$ atomi Hamilton operátor hatására a $\sigma_\pm$ léptető operátorok időfüggése Heisenberg képben a

$$\sigma_\pm(t) = \sigma_\pm(0)e^{\pm i\omega_0 t} \quad (10.26)$$

időfejlődésre vezet.

10.6 Feladat: Igazoljuk az atomi $\sigma_\pm$ operátorok időfüggésére vonatkozó fönti formulát.

A K -beli szorzat kifejtésénél ennek megfelelően az operátorszorzatok közelítőleg a

$$\sigma_+ a \sim e^{+i(\omega_0 - \omega)t}, \quad \sigma_- a^\dagger \sim e^{-i(\omega_0 - \omega)t}, \quad (10.27)$$

$$\sigma_- a \sim e^{-i(\omega_0 + \omega)t}, \quad \sigma_+ a^\dagger \sim e^{i(\omega_0 + \omega)t} \quad (10.28)$$

képleteknek megfelelően változnak időben. Rezonáns vagy közel rezonáns esetben a fönti második sorban szereplő tagok sokkal gyorsabban változnak mint az első kettő, és egy formális integrálásnál a nevezőben megjelenő $\pm(\omega_0 + \omega)$ tényezők a második sor szorzatait elhanyagolhatóvá teszik az első sor tagjaihoz képest. Ezért a második sor antirezonáns tagjait elhanyagolhatjuk az első sor rezonáns tagjaihoz képest. Ez a lépés analóg az előző pontban tárgyalt félklasszikus elmélet forgóhullámú közelítésével (RWA). Megjegyezzük továbbá, hogy az így elhanyagolt tagok közül $\sigma_- a$ -nak olyan jelentés tulajdonítható, hogy az atom a felső nívóról az alsóra kerül miközben foton nyel el, míg $\sigma_+ a^\dagger$ az atom gerjesztését és azzal egyidejűleg egy foton kibocsátást írja le. Ezek a folyamatok az elemi értelmezésben nem őrzik az energiát, ezért valószínűségük jóval kisebb mint az első két tag által leírt gerjesztés fotonabszorpcióval illetve legerjesztés fotonemisszióval, ami a szokásos kép.

Vezessük be továbbá a

$$\frac{2d\mathcal{E}_0}{\hbar} =: \Omega_0 \quad (10.29)$$

definícióval az úgynevezett vákuum Rabi frekvenciát. Mint láttuk a mező vákuum állapotában az elektromos térerősségnek nincs határozott értéke, csupán a várható értéke tűnik el. A szórás nagysága ugyanakkor a 2. fejezetben tanultak szerint éppen $\mathcal{E}_0 \sin kz$. A továbbiakban azt is fölteszük, hogy a d átmeneti dipólusmomentum valós, így a Hamilton operátor alakja:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3 + \hbar\omega a^\dagger a + \frac{\hbar\Omega_0}{2}(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \quad (10.30)$$

Ez a Jaynes–Cummings–Paul modell Hamilton operátora. (Megjegyezzük, hogy egy más konvencióval a kölcsönhatási tagot az $i\frac{\hbar\Omega_0}{2}(\sigma_- a^\dagger - \sigma_+ a)$ alakba is szokták írni.)

10.4. Rezonáns eset, kollapszus és föléledés

Tegyük föl először, hogy egzakt rezonancia van: $\omega_0 = \omega$. Ekkor – amint arról egyszerűen meggyőződhetünk – az $|e, n\rangle$ és $|g, n+1\rangle$ állapotok a H_0 operátor $\varepsilon_n = \hbar\omega_0(\frac{1}{2} + n)$ kétszer degenerált sajátértékéhez tartozó sajátvektorai. Egy további sajátállapot a $|g, 0\rangle$ alapállapot, amelynek energiája $-\hbar\frac{\omega_0}{2}$, és ez nem degenerált. Ebből az alapállapotból a kölcsönhatási operátor nem visz ki, mivel

$$K|g, 0\rangle = 0. \quad (10.31)$$

Ezen túlmenően a K kölcsönhatási operátor a fönt említett degenerált állapotokat egymásba transzformálja,

$$K|e, n\rangle = \frac{\hbar\Omega_0}{2}(\sigma_+a + \sigma_-a^\dagger)|e, n\rangle = \frac{\hbar\Omega_0}{2}\sqrt{n+1}|g, n+1\rangle, \quad (10.32)$$

$$K|g, n+1\rangle = \frac{\hbar\Omega_0}{2}(\sigma_+a + \sigma_-a^\dagger)|g, n+1\rangle = \frac{\hbar\Omega_0}{2}\sqrt{n+1}|e, n\rangle, \quad (10.33)$$

tehát ha a rendszer kezdetben a H_0 valamelyik ilyen $\varepsilon_n = \hbar\omega_0(n+1/2)$ sajátértékéhez tartozó – az $|e, n\rangle$ és $|g, n+1\rangle$ által kifeszített – sajátalterében volt, akkor ebben a kétdimenziós altérben is marad.

10.4.1. Megoldás az ε_n -hez tartozó sajátalterben

Az előzők szerint a Schrödinger egyenlet megoldása a fönti kétdimenziós térben kereshető a

$$|\Psi(t)\rangle_I = C_e(t)|e, n\rangle + C_g(t)|g, n+1\rangle \quad (10.34)$$

alakban, ahol a kölcsönhatási képet azaz a $|\Psi(t)\rangle_I = e^{iH_0t/\hbar}|\Psi(t)\rangle_S$ állapotvektort használjuk. Beírva ezt a

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi(t)\rangle_I}{\partial t} = K|\Psi(t)\rangle_I \quad (10.35)$$

Schrödinger-egyenletbe (kölcsönhatási kép) kapjuk, hogy:

$$i\hbar\left(\dot{C}_e|e, n\rangle + \dot{C}_g(t)|g, n+1\rangle\right) = \frac{\hbar\Omega_0}{2}\left(C_e(t)\sqrt{n+1}|g, n+1\rangle + C_g(t)\sqrt{n+1}|e, n\rangle\right) \quad (10.36)$$

Szorozzunk balról $\langle e, n|$ -nel, illetve $\langle g, n+1|$ -el, így a két együtthatóra a

$$\dot{C}_e = -i\frac{\Omega_0}{2}\sqrt{n+1}C_g = -i\frac{\Omega_n}{2}C_g, \quad \dot{C}_g = -i\frac{\Omega_0}{2}\sqrt{n+1}C_e = -i\frac{\Omega_n}{2}C_e \quad (10.37)$$

differentiálegyenlet-rendszert nyerjük, ahol bevezettük az

$$\Omega_n = \Omega_0\sqrt{n+1} \quad (10.38)$$

jelölést. A megoldás

$$\begin{aligned} C_{e,n}(t) &= C_{e,n}(0)\cos\frac{\Omega_n}{2}t - iC_{g,n+1}(0)\sin\frac{\Omega_n}{2}t \\ C_{g,n+1}(t) &= C_{g,n+1}(0)\cos\frac{\Omega_n}{2}t - iC_{e,n}(0)\sin\frac{\Omega_n}{2}t \end{aligned} \quad (10.39)$$

analóg a klasszikus Rabi-problémával, az ottani $\Omega_r = \frac{d}{\hbar} E_0$ helyett itt $\Omega_n = \Omega_0 \sqrt{n+1}$ szerepel.

Mint említettük, az alapállapotból nem történik átmenet. Viszont az $|e, n=0\rangle$ állapotból indulva, azaz amikor kezdetben a mező vákuumállapotban az atom pedig a gerjesztett állapotában van, tehát $C_{e,0}(0) = 1$ és $C_{g,1}(0) = 0$, akkor a csatolt rendszer a

$$C_{e,0}(t) = \cos \frac{\Omega_0}{2} t, \quad C_{g,1}(t) = -i \sin \frac{\Omega_0}{2} t \quad (10.40)$$

képleteknek megfelelően Ω_0 körfrekvenciával oszcillál a gerjesztett és az alapállapot között, miközben a mező fotonszáma 0 és 1 között változik. A megfelelő valószínűségek

$$P_e(t) = \cos^2 \frac{\Omega_0}{2} t = \frac{1}{2} (1 + \cos \Omega_0 t), \quad P_g(t) = \sin^2 \frac{\Omega_0}{2} t = \frac{1}{2} (1 - \cos \Omega_0 t). \quad (10.41)$$

Más szóval a fönti kezdeti állapot esetén az atom először, $t = \pi/\Omega_0$ időtartam alatt a vákuumba emittálja a fotont, amit néha ebben az esetben is szokás spontán emisszióknak nevezni. Ezután egy újabb π/Ω_0 időtartam múlva azt újra abszorbeálja, ezért Ω_0 neve a vákuum Rabi frekvenciája. Ez a folyamat tehát egy "reverzibilis spontán emisszió", a szokásos irreverzibilis spontán emisszióval szemben. A két folyamat közötti különbség az atomot körülvevő mező módusstruktúrájában van. Szemben az üregbe zárt atommal, a szabadon álló atom nagyon sok – az ω_0 átmeneti frekvenciájával megegyező frekvenciájú – módusnak adhatja át az energiát, emiatt az nem tud visszakerülni az egyetlen kitüntetett szabadsági fokra: az atom gerjesztett állapotába. Erről alább még lesz szó.

Figyeljük meg még a következőt. Ha a rendszer az $|e, 0\rangle$ kezdőállapotból indul, akkor a képleteknek megfelelően $t_{\pi/2} = \pi/(2\Omega_0)$ idő múlva az állapota a

$$|\Psi\rangle_I = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, 0\rangle - i |g, 1\rangle) \quad (10.42)$$

szuperpozíció lesz. Kísérletileg is megvalósítható, hogy az atom éppen a jelzett $\pi/2\Omega_0$ időtartamig tartózkodjék az üregben, azaz éppen egy kvantumos $\pi/2$ impulzussal hasson rá a vákuum mező. Ekkor az atom és a mező láthatóan egy összefonódott állapotba kerül, hiszen a fönti $|\Psi\rangle$ nem írható az atom illetve a mező állapotának szorzataként. A mezőn való áthaladás után az üreget elhagyó atom állapotát mérni lehet. Ha az $|e\rangle$, akkor a mérési posztulátum szerint a mező éppen az $|n=0\rangle$ állapotba kerül, míg ha az atomot a $|g\rangle$ állapotban mérjük, akkor ez a mezőt az $|n=1\rangle$ egyfotonos állapotba viszi, s ez akkor történik, amikor az atom már nincs is közvetlen kölcsönhatásban a mezővel. Ez a kísérlet tehát az EPR paradoxon egy ténylegesen megvalósított változata. A jelenség egy további kiterjesztéséről a következő fejezetben lesz szó.

Ha a kvantumos módussal szemben a mezőt klasszikusan írjuk le, akkor külső mező hiányában, azaz klasszikus vákuumban, nincs Rabi oszcilláció, amint az az előző szakasz eredményeiből az $\Omega_r = 0$ esetben azonnal látszik. Itt természetesen föltettük, hogy a rendszer zárt, nincs veszteség, azaz a mező egyetlen figyelembe vett módusa "megtartja" a fotont, és az atom is csak ezzel a módussal hat kölcsön, más szabadsági fokoknak nem ad át energiát.

Általánosabb esetben, ha kezdetben $n \neq 0$ és mondjuk $C_{e,n}(0) = 1$ és $C_{g,n+1}(0) = 0$, akkor a gerjesztett és az alapállapot populáció különbsége, amit W -vel jelölünk, a:

$$W(t) = |C_{e,n}(t)|^2 - |C_{g,n+1}(t)|^2 = \cos^2 \frac{\Omega_n}{2} t - \sin^2 \frac{\Omega_n}{2} t = \cos \Omega_n t \quad (10.43)$$

összefüggésnek megfelelően oszcillál.

10.7 Feladat: Írjuk föl $W(t)$ -t tetszőleges adott n -hez tartozó kezdeti amplitúdók esetére.

10.4.2. Megoldás tetszőleges tiszta kezdőállapotra

Látjuk tehát, hogy a kezdetben számállapotban lévő mező esetén a megoldás ugyanúgy periodikus mint a klasszikus esetben. Ez annak ellenére van így, hogy a mező számállapotai igencsak távol állnak attól amit egy klasszikus mező jelent. Noha ez utóbbihoz legközelebb az $|\alpha\rangle$ koherens állapotok állnak, mégis – amint látjuk majd – ha a mező kezdetben koherens állapotban van, akkor a JCP-modell több tekintetben másfajta eredményt ad, mint amit a klasszikus megoldás alapján várnánk. Mindez azért is lényeges, mert egy adott n -hez tartozó számállapotot mint kezdőállapotot nem egyszerű előállítani, egy kísérletben a mező induló állapota rendszerint termikus állapot vagy valamilyen viszonylag kis α -hoz tartozó koherens állapot.

Mivel az atomot és a mezőt kezdetben függetlennek tételezzük föl, a rendszer teljes induló állapota egy atomi állapot

$$|\psi(0)\rangle_{at} = C_g(0) |g\rangle + C_e(0) |e\rangle \quad (10.44)$$

és a mező módus valamilyen

$$|\psi(0)\rangle_f = \sum_n C_n(0) |n\rangle \quad (10.45)$$

állapotának szorzatállapota:

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle_a \otimes |\psi(0)\rangle_f = \sum_n C_n(0) \{C_g(0) |g, n\rangle + C_e(0) |e, n\rangle\}. \quad (10.46)$$

Ez az, amit alkalmas $C_n(0)$ együtthatókkal kísérletileg is meg lehet így valósítani. A $\{C_g(0) |g, n\rangle + C_e(0) |e, n\rangle\}$ állapot időfejlődését fentebb (10.39) megadtuk, (a $|g, n\rangle$ esetén a korábbi $|g, n+1\rangle$ -nél n helyett $n-1$ írandó). Ilyen módon a megfelelő megoldás:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle = \sum_n \left\{ \left[C_e(0)C_n(0) \cos \frac{\Omega_n t}{2} - iC_g(0)C_{n+1}(0) \sin \frac{\Omega_n t}{2} \right] |e\rangle + \right. \\ \left. + \left[-iC_e(0)C_{n-1}(0) \sin \frac{\Omega_{n-1} t}{2} + C_g(0)C_n(0) \cos \frac{\Omega_{n-1} t}{2} \right] |g\rangle \right\} |n\rangle, \end{aligned} \quad (10.47)$$

ahol $\Omega_{-1} = 0$.

Legyen speciálisan ismét $C_e(0) = 1$, $C_g(0) = 0$. Ilyenkor akár a fenti formulából, akár a (10.39) képletekből láthatóan

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n(0) \cos \frac{\Omega_n t}{2} |e, n\rangle - iC_{n+1}(0) \sin \frac{\Omega_n t}{2} |g, n+1\rangle. \quad (10.48)$$

Annak a P_e valószínűségét, hogy az atom az $|e\rangle$ állapotban van a *mező állapotára való tekintet nélkül* az $|e\rangle\langle e| \otimes \mathbb{1}$ operátor várható értéke adja, ahol $\mathbb{1}$ a mező állapotterének egységoperátora. Az eredmény

$$P_e = \sum_n |C_n(0)|^2 \cos^2 \frac{\sqrt{n+1}\Omega_0 t}{2} = \sum_n |C_n(0)|^2 \frac{1 + \cos \sqrt{n+1}\Omega_0 t}{2}. \quad (10.49)$$

Tegyük föl, hogy a mező klasszikus abban az értelemben, hogy azt kezdetben egy $|\alpha\rangle$ koherens állapot írja le, és az ennek megfelelő $|C_n(0)|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}$ Poisson-eloszlás várható értéke, vagyis az $\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2$ átlagos fotonszám, jóval nagyobb mint 1. Ekkor az eloszlás szórása a várható értékhez képest kicsi lesz: $\langle n \rangle^{1/2} \ll \langle n \rangle$, s így az összegben a sokféle Ω_n közül egyetlen, az $n = \langle n \rangle$ -hez tartozó lesz a domináns. Ilyenkor $\Omega_{\langle n \rangle} = \sqrt{\langle n \rangle + 1} \Omega_0$ azonosítható Ω_r -el a klasszikus rezonáns Rabi-frekvenciával, s így a kvantum Rabi-oszcillációk átmennek a klasszikusba.

10.4.3. Kollapszus

A gerjesztett állapot (10.49) kifejezésében különböző, irracionális arányú diszkrét frekvenciákkal változó harmonikus jelek $|C_n(0)|^2$ -tel súlyozott összege szerepel. Ez az összeg a destruktív interferencia miatt hamar 0-vá válik és P_e a $\sum_n |C_n(0)|^2/2 = 1/2$ értéket adja. Ezt szokás Cummings-féle kollapszusnak nevezni. A kollapszus idejét a következőképpen lehet megbecsülni. Az összegben azokhoz a diszkrét Rabi-frekvenciákhoz tartozó tagok járulékaik lesznek jelentősek amelyekre az n egész számok a szórési tartományon azaz az $\langle n \rangle + \Delta n$ és $\langle n \rangle - \Delta n$ intervallumon belülre esnek. Amint azt a Fourier-transzformáció tulajdonságaiból (frekvencia-idő határozatlansági reláció) ismerjük, az a t_C időtartam amíg az egyes frekvenciákhoz tartozó rezgések nem oltják ki egymást nagyjából a

$$t_C(\Omega_{\langle n \rangle + \Delta n} - \Omega_{\langle n \rangle - \Delta n}) \simeq \pi \quad (10.50)$$

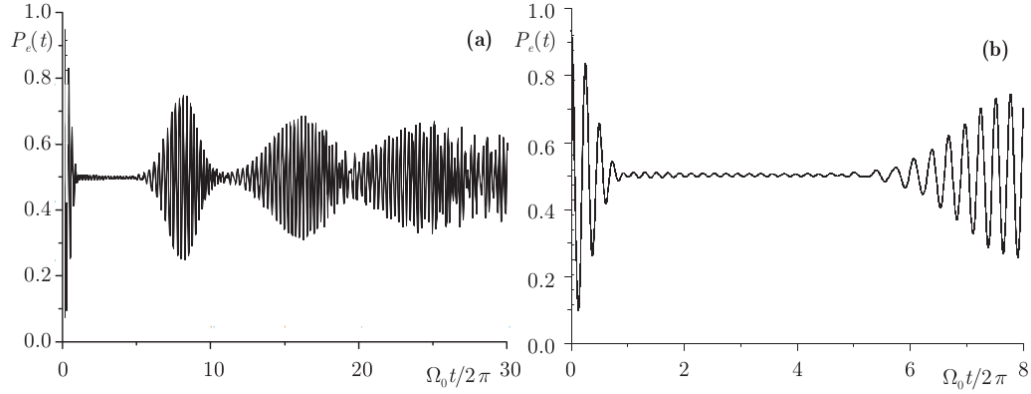
egyenletből kapható meg. Koherens kezdőállapotnál azaz Poisson-eloszlásnál a fotonszám szórása $\Delta n = \langle n \rangle^{1/2}$.

Vizsgáljuk az $\langle n \rangle \gg 1$ esetet, amikor $\Omega_{\langle n \rangle} = \Omega_0 \sqrt{\langle n \rangle + 1} \approx \Omega_0 \sqrt{\langle n \rangle}$. Sorfejtést használva

$$\begin{aligned} \Omega_{\langle n \rangle \pm \Delta n} &= \Omega_0 \sqrt{\langle n \rangle \pm \langle n \rangle^{1/2}} = \Omega_0 \langle n \rangle^{1/2} \left(1 \pm 1/\langle n \rangle^{1/2} \right)^{1/2} \\ &\approx \Omega_0 \langle n \rangle^{1/2} \left(1 \pm \frac{1}{2\langle n \rangle^{1/2}} \right) = \Omega_0 \langle n \rangle^{1/2} \pm \frac{\Omega_0}{2}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Így (10.50)-ből $t_C \simeq \pi \Omega_0^{-1}$ és ez független $\langle n \rangle$ -től. Egy pontosabb, de jóval bonyolultabb számolás szerint a kollapszus során a gerjesztett állapot valószínűségének burkolóját egy Gauss-függvény adja meg:

$$P_e = \frac{1}{2} + \frac{e^{-|\Omega_0 t|^2}}{2} \cos(2|\alpha|\Omega_0 t). \quad (10.52)$$



10.4. ábra. Kollapszus és föléledés. A gerjesztett állapot valószínűsége P_e mint az idő függvénye. Kezdetben az atom az $|e\rangle$ gerjesztett állapotban van, a mező kezdeti állapota pedig az $|\alpha\rangle$ koherens állapot, ahol a fotonszám várható értéke $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = 15$. Az (b) ábrán a folyamat kezdete nagyobb fölbontásban.

10.4.4. Föléledés

Jóval később, 1980 körül fedezték föl numerikus szimulációkkal, hogy a kollapszus után egy idő múlva P_e újra lényegesen különbözhet $1/2$ -től, azaz úgynevezett föléledést is mutat. A föléledés annak a következménye, hogy egy idő múlva a *szomszédos* frekvenciájú rezgések fázisa közelítőleg éppen 2π valamilyen egész számú többszörösével különbözik egymástól. A kollapszusnál használt egyszerű közelítés szerint erre olyan t_R időpontokban kerülhet sor, amelyekre

$$t_R(\Omega_{\langle n \rangle + 1} - \Omega_{\langle n \rangle}) \simeq 2\pi k, \quad (10.53)$$

ahol

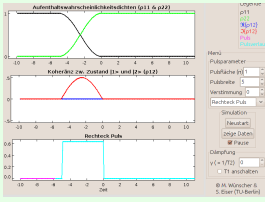
$$\Omega_{\langle n \rangle + 1} - \Omega_{\langle n \rangle} = \Omega_0(\sqrt{\langle n \rangle + 2} - \sqrt{\langle n \rangle + 1}) = \Omega_0 \frac{\langle n \rangle + 2 - (\langle n \rangle + 1)}{\sqrt{\langle n \rangle + 2} + \sqrt{\langle n \rangle + 1}} = \quad (10.54)$$

$$= \frac{\Omega_0}{\sqrt{\langle n \rangle + 2} + \sqrt{\langle n \rangle + 1}} \approx \frac{\Omega_0}{2\sqrt{\langle n \rangle}} \quad (10.55)$$

s ez nagyjából a

$$t_R(k) = (4\pi/\Omega_0)\sqrt{\langle n \rangle}k, \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (10.56)$$

időpontokra vezet. A föléledés, amelyet kísérletileg is megfigyeltek egy jóval erősebb bizonyíték a diszkrét Rabi-frekvenciák létezése – azaz a mező diszkrét szerkezete – mellett mint a kollapszus. Ugyanis a mező amplitúdójának bármilyen folytonos eloszlása is mindenképpen irreverzibilis kollapszust eredményezne. A föléledés viszont nyilvánvalóan csak diszkrét fázisok azaz diszkrét Rabi-frekvenciák esetén léphet föl.

**Animáció:**

Ez az interaktív animáció lézerrel gerjesztett kétállapotú rendszert mutat be. Különböző impulzus alak és hossz esetén tanulmányozhatjuk az alap és a gerjesztett állapot betöltöttségének alakulását. Többek között kipróbálhatjuk egy π vagy $\pi/2$ impulzus hatását. (Lásd ellenőrző kérdések.)

<http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/owl/quantenmechanik/zweiniveau/parameter/en/>

10.5. Nemrezonáns eset, föl ruházott állapotok

A Jaynes–Cummings–Paul-modell egy másik módszerrel történő megoldása az, hogy megkeressük a teljes H sajátértékeit és sajátállapotait, amelyek időfejlődése H szempontjából stacionárius. Ezután tetszőleges kezdőállapot esetén, annak a H stacionárius állapotai szerinti kifejtésében a szuperpozíció minden tagját az $e^{-i\epsilon t/\hbar}$ fázistényezővel szorozva megkapjuk a megoldást. Most ezt a másikat módszert alkalmazzuk a nemrezonáns esetre.

Keressük meg tehát a Jaynes–Cummings–Paul-féle Hamilton operátor stacionárius állapotait megengedve, hogy az atomi átmenet és a módus körfrekvenciája közötti elhangolás nem tűnik el, azaz $\Delta = \omega_0 - \omega \neq 0$.

A $H_0 + K$ operátor mátrixa a H_0 operátor $|e, n\rangle$, $|g, n+1\rangle$ ortogonális sajátállapotaiban az előző pontban tárgyalt esethez hasonlóan (az alapállapot kivételével) most is 2×2 -es blokkokra esik szét:

$$H_n = \hbar \begin{bmatrix} \omega_0/2 + n\omega & 0 \\ 0 & -\omega_0/2 + (n+1)\omega \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Omega_0 \sqrt{n+1} \\ \Omega_0 \sqrt{n+1} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.57)$$

ahol az első mátrix a H_0 a második a K operátor mátrixa, az n -nel indexelt egyes blokkokban. Figyelembe véve a $\Delta = \omega_0 - \omega$ elhangolást, kiküszöbölve ω_0 -t, majd leválasztva egy az egységmátrixszal arányos tagot kapjuk, hogy

$$H_n = \hbar \begin{bmatrix} (n+1/2)\omega & 0 \\ 0 & (n+1/2)\omega \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} +\Delta & \Omega_0 \sqrt{n+1} \\ \Omega_0 \sqrt{n+1} & -\Delta \end{bmatrix} \quad (10.58)$$

A H_n sajátérték problémájának megoldásához nyilván elegendő a fenti második mátrix diagonalizálása. Ennek eredményeképpen a sajátértékek a $\hbar/2$ tényezőtől eltekintve a $-(\Delta^2 - \lambda^2) - \Omega_0^2(n+1) = 0$ egyenlet gyökei azaz a H_n sajátértékei:

$$\varepsilon_{\pm}(n) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \hbar \Omega_n(\Delta), \quad (10.59)$$

ahol

$$\Omega_n(\Delta) := (\Delta^2 + \Omega_0^2(n+1))^{1/2}, \quad (10.60)$$

és korábbi jelölésünk szerint $\Omega_n(\Delta = 0) = \Omega_n$. A sajátvektorok az $|e, n\rangle$, $|g, n+1\rangle$ alábbi lineáris kombinációi:

$$\begin{aligned} |+, n\rangle &= \cos \frac{\theta_n}{2} |e, n\rangle + \sin \frac{\theta_n}{2} |g, n+1\rangle \\ |-, n\rangle &= -\sin \frac{\theta_n}{2} |e, n\rangle + \cos \frac{\theta_n}{2} |g, n+1\rangle \end{aligned} \quad (10.61)$$

ahol a θ_n , amelyet néha Stückelberg-szögnek is szoktak nevezni a

$$\tan \theta_n = \frac{\Omega_n}{\Delta} \quad (10.62)$$

összefüggéssel definiált. A $\Delta = 0$ esetben ez a szög éppen $\theta_n = \pi/2$, és az (10.61) kifejezésben szereplő minden együttható $1/\sqrt{2}$.

A $|+, n\rangle$ és $|-, n\rangle$ állapotokat úgynevezett "fölrüházott" (*dressed*) állapotoknak szokás nevezni, szemben a H_0 sajátállapotaival amelyek a "csupasz" (*bare*) állapotok.

A fentiek alapján a megoldás a fölrüházott állapotok segítségével egyszerűen adható meg. Legyen először a kezdő állapot speciálisan éppen $|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle$, Fejezzük ezt ki a teljes H sajátállapotaival, azaz a fölrüházott állapotokkal. (10.61)-ből azonnal láthatóan:

$$|\Psi(0)\rangle = |e, n\rangle = \cos \frac{\theta_n}{2} |+, n\rangle - \sin \frac{\theta_n}{2} |-, n\rangle \quad (10.63)$$

Ennek időfejlődése

$$|e, n\rangle \rightarrow \cos \frac{\theta_n}{2} |+, n\rangle e^{-i\varepsilon_+(n)t/\hbar} - \sin \frac{\theta_n}{2} |-, n\rangle e^{-i\varepsilon_-(n)t/\hbar} \quad (10.64)$$

Ha a mező kezdőállapota nem egy fotonszám sajátállapot, hanem egy tetszőleges $\sum_n C_n |n\rangle$ szuperpozíció, de kikötjük, hogy az atom a gerjesztett állapotából indul, akkor $|\Psi(0)\rangle = |e\rangle \otimes \sum_n C_n |n\rangle = \sum_n C_n |e, n\rangle$. Ennek minden tagja megint csak kifejezhető a fölrüházott állapotokkal az előző képletnek megfelelően, és mint tudjuk az egyes stacionárius állapotok egymástól függetlenül a megfelelő $e^{-i\varepsilon t/\hbar}$ fázisfaktorkkal szorozva fejlődnek időben. Így

$$\sum_n C_n |e, n\rangle \rightarrow \sum_n C_n \left(\cos \frac{\theta_n}{2} |+, n\rangle e^{-i\varepsilon_+(n)t/\hbar} - \sin \frac{\theta_n}{2} |-, n\rangle e^{-i\varepsilon_-(n)t/\hbar} \right). \quad (10.65)$$

Hasonlóan tetszőleges kezdőállapot esetén is végtelen összegként egzaktul fölírható az időfejlesztett állapot.

Az előző pont eredményeit vagyis az egzakt rezonancia esetét úgy kaphatjuk vissza, ha $\Delta = 0$, azaz a $\theta_n = \Omega_n$ esetet tekintjük. Ez esetben a fenti képletből a következő adódik:

$$\begin{aligned} \sum_n C_n |e, n\rangle &\rightarrow \sum_n \frac{1}{\sqrt{2}} C_n (|+, n\rangle e^{-i\Omega_n t/2} - |-, n\rangle e^{+i\Omega_n t/2}) = \\ &= \sum_n C_n \left\{ \left(\frac{|+, n\rangle - |-, n\rangle}{\sqrt{2}} \right) \cos \frac{\Omega_n t}{2} - i \left(\frac{|+, n\rangle + |-, n\rangle}{\sqrt{2}} \right) \sin \frac{\Omega_n t}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (10.66)$$

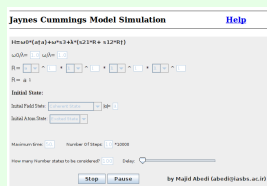
A két eredmény azonossága abból látható, hogy a fölrüházott állapotokat kifejezzük a csupasz állapotokkal, s ez egzakt rezonancia esetén $(|+, n\rangle - |-, n\rangle)/\sqrt{2} = |e, n\rangle$, és $(|+, n\rangle + |-, n\rangle)/\sqrt{2} = |g, n+1\rangle$. Így az eredmény

$$\begin{aligned} \sum_n C_n |e, n\rangle &\rightarrow \sum_n C_n \left\{ |e, n\rangle \cos \frac{\Omega_n t}{2} - i |g, n+1\rangle \sin \frac{\Omega_n t}{2} \right\} = \\ &= \sum_n C_n \left\{ |e, n\rangle \cos \frac{\Omega_n t}{2} - i |g, n\rangle \sin \frac{\Omega_{n-1} t}{2} \right\} \end{aligned} \quad (10.67)$$

megegyezésben az előző pontban kapott megoldással.



Animáció:



Ezen az interaktív animáción a Jaynes-Cummings modellt tanulmányozhatjuk. A mező és az atom esetén is különböző kezdőállapotokat választhatunk. Állíthatjuk a kölcsönhatás és az elhanyagolás mértékét. Illetve játszhatunk az operátor struktúrájával is. Részletes leírást a Help link alatt találunk.

<http://wwwpub.zih.tu-dresden.de/~adebi/programming/jc/>

Ellenőrző kérdések

1. Milyen rendszert ír le a JCP modell és milyen egyszerűsítéseket tételez föl?
2. Milyen feltételek indokolják a két nívójú rezonáns közelítést?
3. Mit jelent az RWA rövidítés?
4. Milyen mennyiségek határozzák meg a klasszikus rezonáns Rabi frekvenciát és mi a Rabi oszcilláció jelensége?
5. Egy kezdetben alapállapotban lévő atom milyen állapotba jut egy π impulzus hatására, és mi történik egy $\pi/2$ impulzus esetén?
6. Milyen tagokból áll a JCP Hamilton operátor?
7. Miben hasonlít és miben különbözik a klasszikus és a kvantum Rabi probléma megoldása?
8. Mit nevezünk kollapszusnak és föléledésnek, és mi ezen jelenségek szemléletes oka?
9. Mit nevezünk csupasz illetve fölrüházott állapotoknak?

11. fejezet

Kísérletek Rydberg-atomokkal és csapdázott ionokkal

Ebben a fejezetben a Jaynes–Cummings–Paul-modell két különböző kísérleti megvalósítását tárgyaljuk. Az egyik maga az eredeti rendszer, azaz egyetlen atom és egy rezonáns üreg kölcsönhatásának megfigyelése. A másik rendszer, amellyel foglalkozunk és amelyet matematikailag ugyanaz a formalizmus ír le mint a JCP-modellt, egy ioncsapdában befogott ion két belső energiaállapotának és kvantummechanikai rezgőmozgásának az összecsatolása megfelelő lézerimpulzusok segítségével. A két kísérletet megvalósító csoport vezetőjét S. Haroche francia és D. Wineland amerikai fizikust 2012-ben Nobel-díjjal jutalmazták: „azoknak az áttörő kísérleti módszereknek a megvalósításáért, amelyek egyedi kvantumrendszereken végzett méréseket és azok manipulációját tették lehetővé.”

11.1. Rydberg atomok üregben

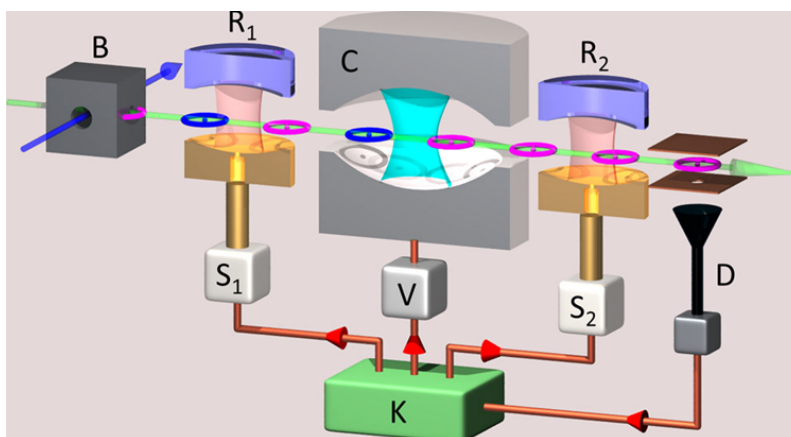
Az előző fejezetben vizsgált problémáról sokáig úgy gondolták, hogy annak elméleti érdekességén túl egy kísérletben megvalósítható fizikai jelenséghez nem sok köze van, mert az egyetlen atom és egyetlen módus kölcsönhatását ténylegesen megvalósítani nem lehetséges. A kísérleti technika korábban hihetetlennek gondolt fejlődése nyomán azonban kiderült, hogy ez a jelenség mégis vizsgálható a laboratóriumban is. A Jaynes–Cummings–Paul-modell által leírt szituációt, azaz egy üregrezonátor módusa által befolyásolt két atomi nível között létrejövő atom-mező dinamikát kísérletileg először 1985-ben valósított meg Garchingban az MPQ-ban D. Meschede és H. Walther. Ezt követően S. Haroche, J.M. Raimond és munkatársai a 1990-es évek közepétől kezdve Párizsban az ENS–Kastler–Brossel laboratóriumában még pontosabb technikát dolgoztak ki ennek az alapvető jelenségnek a kísérleti megfigyelésére. Most ezeket a kísérleteket ismertetjük, hivatkozva az előző fejezet eredményeire. A technikai megvalósítás és az elméleti háttér ennél jóval részletesebb leírása is megtalálható a [24] könyvben.

A kísérletek során a megfelelően preparált Rb atomokat küldték át egyenként egy olyan méretű szupravezető üregben, amelynek egyik sajátmódusát a rubidium egy alkalmas, alább tárgyalandó átmenetének frekvenciájával össze tudták hangolni. A gömbi tükrök által formált Fabry–Perot-jellegű üreg tükreinek távolsága néhány cm, és ennek egy 9 félhullámhosszból álló 51 GHz-es – keresztirányban Gauss-eloszlású – állóhulláma, módusa volt rezonáns az atomi átmenettel, azaz ennek frekvenciája megegyezett az atomok egyetlen kiválasztott nívópárja közti Bohr frekvenciával. A módus nyakszélessége, azaz a kölcsönhatási tartomány mérete 6 mm-es nagyságrendű volt, míg az üregbe belépő atomok sebességét

lézeres technikával a 100-600 m/s tartományban kb. 2 m/s pontossággal be tudták állítani. Az atomok sebessége határozza meg az üregeken való áthaladásuk és ezáltal az mezővel való kölcsönhatásuk időtartamát, amit ezek szerint néhányszor $10 \mu\text{s}$ körüli értékre lehetett beállítani. Az atomi kvantumállapotok megváltozásának valószínűségét az üregből való kilépés után detektálták, amivel közvetve az üregbeli mező állapotváltozása is nyomon követhető.



11.1. ábra. Serge Haroche (1944 -) francia fizikus. 2012-es fizikai Nobel díj David J. Winelanddel közösen. **Forrás:** <http://www.ens.fr/actualites/a-la-une/archives-90/2012/article/serge-haroche-prix-nobel-de?lang=fr>



11.2. ábra. A párizsi kísérlet elrendezésének sémája. A cirkuláris állapotú Rb atomok előállítás és sebességének beállítása a B jelű tartományban történik. Az R_1 és R_2 ún. Ramsey zónákban klasszikusnak tekinthető $\pi/2$ impulzusokkal változtatják az atom belső állapotát. A C jelű üregben történik a kölcsönhatás a kvantumos módussal. A D jelű detektor regisztrálja az atom végső állapotát. **Forrás:**

<http://www.cqed.org/spip.php?article238&lang=fr>

A párizsi kísérletekben üregként előbb egy niobiumból (Nb) készült konfokális Fabry-Perot-rezonátort használtak a 2000-es években pedig egy még jobb minőségű olyan változatot, ahol a tükrök teste rézből készült és arra niobiumot párologtattak. A Nb szupravezető, így a tükröket 1 K-re hűtve óriási $Q := \omega T_c = 4,2 \times 10^{10}$ jósaági tényezőjű üreget sikerült készíteni.

Emlékeztetünk rá, hogy egy oszcillátor esetén a jósági tényező a rezonáns frekvencia és a csillapítási tényező hányadosa. Ez utóbbi lényegében annak a T_c időállandónak a reciproka, amelyik megadja, hogy kikapcsolt gerjesztés után milyen gyorsan csillapodik a rezgés amplitúdója az e -ed részére. Azt a terminológiát is használhatjuk, hogy a T_c időállandó megadja, hogy egy foton mennyi ideig marad az üreg módusában. A kísérletben a foton akár 130 ms-os időtartamig sem nyelődött el az üreg falán, illetve nem hagyta el az üreget, amelynek méreteit úgy választották meg, hogy az legyen rezonáns egy Rb Rydberg-atom speciális átmenetével. Rydberg-atomról akkor beszélünk, ha az atom egyetlen elektronja egy igen magasan gerjesztett állapotban van, ahol a magtól mért átlagos távolsága jóval nagyobb mint a többi elektroné. Az alkáli oszlopban található 37-es rendszámú Rb-nak egy valenciaelektronja van, amely már az atom alapállapotában is jóval távolabb van a magtól mint a többi elektron, ám egy megfelelő gerjesztéssel azonban ez a távolság még három nagyságrenddel megnövelhető, s így az elektron gyakorlatilag ugyanúgy viselkedik mint a H atom egyetlen elektronja, ez a Rydberg-elektron. A Rb kérdéses átmenete a kísérletben a hidrogénszerű atom két igen magasan gerjesztett $n = 50$ és $n = 49$ főkvantumszámú állapotai között történt. A Rydberg-atom energiaszintjei jó közelítéssel leírhatók az $E_{n,\ell} = -\frac{R_E}{(n-\delta_\ell)^2} - \frac{R_E}{(n^*)^2}$ formulával, ahol a δ_ℓ az úgynevezett kvantumdefektus függ a mellékkvantumszámtól, és szemléletesen amiatt lép föl, hogy az elektron a mozgása során behatol az atomtörzsbe. R_E közel azonos a H atom esetén érvényes 13,6 eV értékkel, itt a kéttestproblémában (atommag és egyetlen elektron) föllépő redukált tömeg még közelebb van a szabad elektron tömegéhez mint H atomnál, mert a leggyakoribb Rb izotóp magja 85 nukleont tartalmaz. Nagy ℓ -ekre a δ_ℓ kicsi mert az elektron “pályája” kör, vagyis az a tartomány ahol az elektron nagy valószínűséggel tartózkodik egy tórusz, azaz nem közelíti meg a többi elektront a mag közelében. Azokat az állapotokat, amelyekre $\ell = n - 1$, és $m = \ell = n - 1$, azaz a legnagyobb lehetséges értékek, cirkuláris Rydberg-állapotoknak nevezzük.

Egy ilyen állapot – a dipólmomentumra vonatkozó $|\Delta\ell| = 1$ és a $|\Delta m| = 0, 1$ kiválasztási szabályok miatt – csak ahhoz az *egyetlen kisebb energiájú* másik nívóhoz van csatolva, amelynek n, ℓ, m kvantumszámjai pontosan eggyel kisebbek mint az induló eredetié, és így az is egy cirkuláris állapot. Az átmeneti dipólmomentum azaz dipólmátrixelem ilyen átmenetek esetén

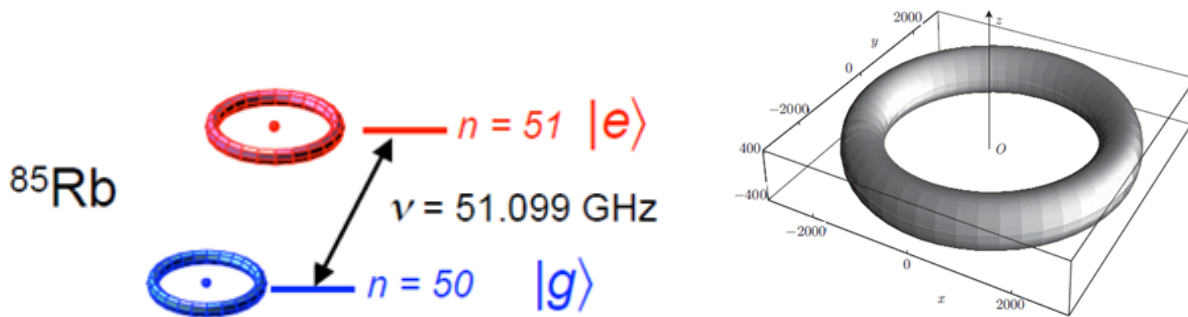
$$d = \langle n, \ell = n - 1, m = \ell | D | n - 1, \ell = n - 2, m = \ell - 1 \rangle \sim q_0 n^2 a_0. \quad (11.1)$$

Eszerint, mivel a Bohr sugarak az n^2 -el skálázódnak, a Rb esetén a Haroche-féle kísérletben használt $n = 51$ esetén az átmeneti dipólmomentum kb. 2500-szor nagyobb mint egy szokásos optikai átmenet esetén. Ez biztosítja az elegendően erős csatolást az üreg módusával, azaz az elegendően nagy Ω_0 Rabi-frekvenciát.

A Rydberg-állapotok további előnye, hogy spontán élettartamuk jóval nagyobb, mint egy közönséges optikai átmeneté. A spontán bomlási állandóra vonatkozó $\gamma_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3} \frac{d^2 \omega_0^3}{\hbar c^3}$ képletben a fentiek szerint $d^2 \sim n^4$; míg az $E_n = -\frac{R_E}{n^2}$ Rydberg formula formális n szerinti deriválásából, $|\Delta E| \approx \frac{2R_E}{n^3}$ miatt $\omega_0 = \frac{|\Delta E|}{\hbar} \approx \frac{2R_E}{\hbar n^3}$ ($= 36$ GHz). Eszerint $\omega_0^3 \sim n^{-9}$ és $\gamma \sim \gamma_0 n^{-5}$, ami a szám adatok behelyettesítése után kb. 10^{-1} s -nak adódik üres térben, szemben az atomok optikai átmenetei esetén érvényes $\gamma_0 = 10^9$ 1/s illetve $\tau_0 = 10^{-9}$ s értékekkel.

Tárgyaljuk röviden még az atomok detektálását. A Rydberg-atomok magasan gerjesztett állapotai energiában nagyon közel vannak az ionizált, azaz az energiakontinuumba eső állapotoktól, így viszonylag könnyen ionizálhatók. A mag és a az iontörzs által keltett és a Rydberg-elektron által “érezett” elektromos térerősség nagysága a magtól átlagosan $n^2 a_0$ távolságban:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0^2}{(n^2 a_0)^2}. \quad (11.2)$$



11.3. ábra. A Rb atom valencia elektronja Rydberg állapotban nem közelíti meg a többi elektront a mag közelében. A valenciaelektron az ábrán látható tórusz mentén helyezkedik el nagy valószínűséggel. **Forrás:**

<http://www.cqed.org/spip.php?article119&lang=fr>

Egy ezzel összemérhető sztatikus elektromos térerősséget alkalmazva az leszakíthatja az elektront az atomból. A térerősségek aránya az $n - 1$ és az n főkvantumszámú állapot esetén $n^4/(n - 1)^4 = 1/(1 - 1/n)^4 \approx 1 + 4/n$. Noha a Rydberg-állapotok közötti energiakülönbség jóval kisebb mint a kis főkvantumszámú állapotok között, az mégis elegendő egy állapotszelektív ionizációhoz. Az eljárás során az üregből kilépő atom két ionizációs detektoron halad át, amelyeket finoman kell beszabályozni úgy, hogy az elsőben a gyöngébb térerősség az csak az $|e\rangle$ gerjesztett állapotban lévő atomokat ionizálja, míg a másodikban a nagyobb térerősség már a $|g\rangle$ állapotú atomot is ionizálja. A kettő közül valamelyik detektorban érzékelt leszakított elektron jelent egy állapotszelektív mérést.

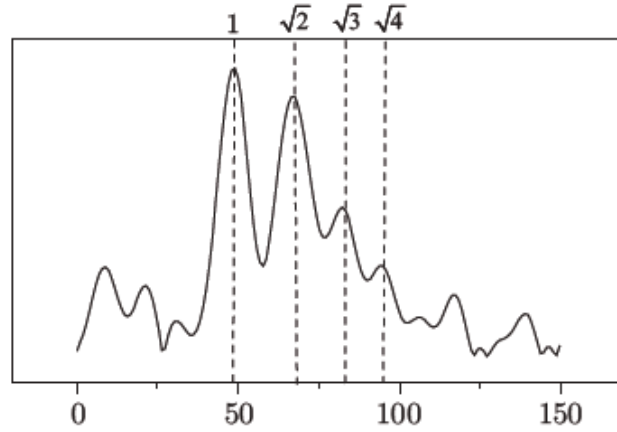
Összefoglalva tehát, a kísérletek szempontjából a Rydberg-atomoknak a következő előnyös tulajdonságai vannak:

- (a) átmenetek csak a szomszédos cirkuláris állapotok között vannak, tehát az atomok lényegében valóban kétnívósak,
- (b) a megengedett átmenetek dipólusmomentumai nagyok,
- (c) a nívók hosszú élettartamúak, a spontán emisszió elhanyagolható,
- (d) az állapotaik szerint szelektíve ionizálhatók, azaz az atomi állapotok mérésével egyszerűen megkülönböztethetők,

11.1.1. A legfontosabb kísérleti eredmények

Diszkrét Rabi frekvenciák

Haroche csoportja 1996-ban kimutatta [25], hogy az üregbe csatolt $|\alpha\rangle$ koherens állapotú klasszikus mező amplitúdójának növelése során a Rabi frekvencia csak diszkrét értékeket vesz föl, speciálisan a fotonszám négyzetgyökével arányosan változik a 10. fejezetben megismert $\Omega_n = \Omega_0 \sqrt{n + 1}$ képletnek megfelelően.



11.4. ábra. A mérés során az üregbe a felső állapotban érkező atomoknak az ugyancsak a felső állapotban való tartózkodási valószínűségét mérik az üregből való kilépés után. Ennek Fourier transzformáltját mutatja az ábra a kHz-ben mért frekvencia függvényében egy $\langle n \rangle = |\alpha|^2 = 0,85$ átlagos fotonszámú a C üregbe csatolt koherens állapotú mező esetén. Az egyezés kiváló a $P_{\uparrow} = \sum_n e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos^2\left(\frac{\Omega_0 t}{2} \sqrt{n+1}\right)$ elméleti valószínűség spektrumával.

A mérés során az üregen áthaladó és kezdetben $|e\rangle$ állapotú atomok az üregen áthaladva a 10 fejezet (10.49) képlete szerint

$$P_e(t) = \sum_n |C_n(0)|^2 \frac{(1 + \cos \sqrt{n+1} \Omega_0 t)}{2} = \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \left(1 + \cos \sqrt{n+1} \Omega_0 t\right) \quad (11.3)$$

valószínűséggel lesznek a gerjesztett állapotban. A különböző kölcsönhatási időkhöz, azaz atomi sebességeket tartozó P_e -k Fourier transzformáltjában a csúcsok az $\sqrt{n+1} \Omega_0$ diszkrét értékeknél jelennek meg. Ez a fotonok létezésének kísérleti bizonyítéka, egy olyan – a látható fényénél 6 nagyságrenddel kisebb – frekvencián, ahol fotoeffektusról szó sem lehet. Ebben az igen gyöngye mezőben, ahol $\langle n \rangle = |\alpha|^2 \lesssim 1$, az egyes fotonszámállapotoknak megfelelő kvantumos Rabi-frekvenciák még külön észlelhetők, lásd 11.4 ábra.

Két atom összefonása az üreg segítségével

Az előző fejezetben tárgyaltak szerint ha a $|0\rangle$ azaz vákuumállapotú üregbe egy 1 indexszel jelzett gerjesztett atom lép be, akkor az atom-mező rendszer az $|e\rangle_1 |0\rangle$ kezdőállapotból indulva $t_{\pi/2} = \pi/(2\Omega_0)$ idő múlva

$$|\Psi\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_1 |0\rangle + i |g\rangle_1 |1\rangle) \quad (11.4)$$

állapotú lesz. Vagyis megfelelő sebességszelekcióval elérhető, hogy miután az atom elhagyta az üreget az atom és a mező a fönti összefonódott állapotba kerüljön. Ha ezután egy másik egy 2 jelű atom a $|g\rangle_2$ alapállapotban lép be az üregbe úgy, hogy a sebessége éppen fele az előző atoménak, akkor az üregen áthaladva a $t_{\pi} = \pi/\Omega_0$ időnek megfelelő változás megy végbe a rendszeren. A $|g\rangle_2 |0\rangle$ állapot – mint

tudjuk – nem változik, a $|g\rangle_2 |1\rangle$ viszont ennyi idő alatt éppen visszakerül az $|e\rangle_2 |0\rangle$ -ba. Így a három részrendszer együttes állapota miután a második atom is elhagyta az üreget

$$|\Psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_2 |e\rangle_1 |0\rangle - |e\rangle_2 |g\rangle_1 |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_2 |e\rangle_1 - |e\rangle_2 |g\rangle_1) |0\rangle. \quad (11.5)$$

Látható, hogy a mező mindenképpen visszakerült az alapállapotába a $|0\rangle$ -ba, viszont most a két atom kerül összefonódott állapotba. Az atompár állapotát megadó $(|g\rangle_2 |e\rangle_1 - |e\rangle_2 |g\rangle_1) / \sqrt{2}$ kifejezés egy olyan összefonódott Bell–Bohm-típusú állapot, amellyel 1/2-es spinekkel vagy fotonpolarizációval kapcsolatban a Bell-egyenlőtlenség sérülését lehet demonstrálni. Az ilyen módon beállított állapotú atompárok a Bell-egyenlőtlenség sérülését demonstráló kísérleteket a párizsi csoport ténylegesen el is végezte [24]. Fölhívjuk még itt a figyelmet arra az érdekes tényre is, hogy a két atom úgy került itt egy összefonódott állapotba, hogy nem is találkoztak egymással, azaz nem jött létre közvetlen kapcsolat közöttük, az összefonódást a mezővel való külön-külön végbemenő kölcsönhatás eredményezte.

A mező Schrödinger-macska állapotai

Egy további nagyon érdekes kísérlet során Haroche és munkatársai létrehozták a mező úgynevezett Schrödinger macska állapotait. Az eredeti Schrödinger gondolat szerint, hogy ha a kvantummechanikát a makroszkopikus világra is érvényesnek gondoljuk, akkor egy macska és egy radioaktív mag együttes állapotaként elképzelhető a következő két állapot szuperpozíciója. Az egyik állapotban a radioaktív mag még nem bomlott el, s egy macska él, másikon pedig az elbomló magból induló bomlástermék egy olyan berendezést hoz működésbe, amelyik elpusztítja a macskát. Az ennek megfelelő kvantumállapot alakja:

$$(| \text{macska} \rangle | \uparrow \rangle + | \text{bomlás} \rangle | \downarrow \rangle) / \sqrt{2} \quad (11.6)$$

ahol $|\uparrow\rangle$ a még nem elbomlott, a $|\downarrow\rangle$ pedig az elbomlott mag állapota.

Az üregeken áthaladó atomok esetén ezt abban az értelemben sikerült megvalósítani, hogy a módus-atom rendszer összefonódott állapotának alakja

$$|\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle |\alpha e^{i\phi}\rangle + |g\rangle |\alpha e^{-i\phi}\rangle) \quad (11.7)$$

volt, ahol $|\alpha e^{i\phi}\rangle$ és $|\alpha e^{-i\phi}\rangle$ makroszkopikusan megkülönböztethető állapotok, ha $|\alpha|^2$ elegendően nagy.

Láttuk, hogy a mező másképpen hat az atomra attól függően, hogy az az alap vagy a gerjesztett állapotban van, de ez fordítva is igaz, az atomnak a mezőre kifejtett hatása is függ attól, hogy milyen az induló atomi állapot. Meg lehet vizsgálni, hogy mi történik akkor, ha a beérkező atom már eleve egy $(|e\rangle + i|g\rangle) / \sqrt{2}$ szuperponált állapotban érkezik az $|\alpha\rangle$ koherens állapotú üregbe, amit úgy lehet elérni, hogy mielőtt az atom belépne az üregbe, egy klasszikusnak tekinthető mikrohullámú $\pi/2$ impulzussal meggerjesztik. Azt a térbeli tartományt ahol ezt elérik R_1 Ramsey zónának nevezik. (A technika alkalmazása ugyanis még az eredeti Rabi-féle klasszikus molekulanyaláb módszer javítására N. Ramsey nevéhez fűződik, aki 1989-ben két alább említendő fizikussal együtt Nobel-díjat kapott.)

Az üregrezonátoros kölcsönhatás esetén kiderül, hogy ha az atom és az üreg közötti $\Delta = \omega_0 - \omega$ elhangolás nagyobb mint az $\Omega_0(n+1)$ kvantum Rabi frekvencia (legalábbis addig az n fotonszámig, ami még dominánsan jelen van az üregbe becsatolt α koherens állapotban), akkor a kölcsönhatás során

az eredetileg $(|e\rangle + i|g\rangle)|\alpha\rangle/\sqrt{2}$ együttes állapot az atom áthaladása után az

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + i|g\rangle)|\alpha\rangle \rightarrow |\Psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|\alpha e^{i\phi}\rangle + i|g\rangle|\alpha e^{-i\phi}\rangle) \quad (11.8)$$

folyamat során éppen egy $|\Psi_s\rangle$ állapotba jut, ami annak a következménye, hogy a rezonancia hiányában az atom állapota nem változik, abszorpció vagy emisszió nincs. Ugyanakkor a diszperzív kölcsönhatás a mező fázisát és annak előjelét is megváltoztatja attól függően, hogy az $|e\rangle$ vagy a $|g\rangle$ állapotban volt, míg a fázisváltoztatás mértéke $\phi = \Omega_0^2/4\Delta^2$. Ennek kimutatása megtalálható a [24] könyvben. Ha ezután az atom áthalad egy második R_2 Ramsey-zónán is, amely egy újabb $\pi/2$ impulzussal az atomon az $|e\rangle \rightarrow (|e\rangle + i|g\rangle)/\sqrt{2}$, $|g\rangle \rightarrow (|e\rangle - i|g\rangle)/\sqrt{2}$ transzformációt hajtja végre, akkor az eredmény a

$$|\Psi_{2s}\rangle = \frac{1}{2} [|e\rangle (|\alpha e^{i\phi}\rangle + |\alpha e^{-i\phi}\rangle) + i|g\rangle (|\alpha e^{i\phi}\rangle - |\alpha e^{-i\phi}\rangle)] \quad (11.9)$$

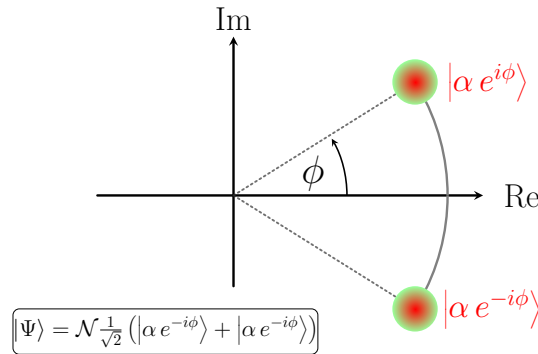
állapot. A második Ramsey-zónát elhagyó atomon ezután mérést hajtanak végre, amely azt vagy az $|e\rangle$ vagy a $|g\rangle$ állapotban találja $1/2$ valószínűséggel. Az első esetben a mező az

$$|\Psi_{ce}\rangle = \mathcal{N}_e(|\alpha e^{i\phi}\rangle + |\alpha e^{-i\phi}\rangle)\sqrt{2} \quad (11.10)$$

páros macska állapotba kerül, míg ha az atom állapota $|g\rangle$, a mező állapota a

$$|\Psi_{co}\rangle = \mathcal{N}_0(|\alpha e^{i\phi}\rangle - |\alpha e^{-i\phi}\rangle)/\sqrt{2} \quad (11.11)$$

lesz, ahol $\mathcal{N}_e$ illetve $\mathcal{N}_0$ normálási korrekciók, amelyek értéke nagy $|\alpha|$ esetén közelítőleg 1.



11.5. ábra. Egy kiválasztott Schrödinger-macska-állapot szemléltetése a komplex síkon.

Mind $|\Psi_{ce}\rangle$ mind $|\Psi_{co}\rangle$ két makroszkopikus, és elegendően nagy ϕ esetén közel ortogonális állapot (“élő és elpusztult macska”) szuperpozíciója. Közöséges körülmények között ilyen állapotot nem lehet megfigyelni, amit a következők alapján érthetünk meg. Legyen az egyszerűség kedvéért most $\phi = \pi/2$ és $\beta := \alpha e^{i\pi/2}$, és $|\beta| \gg 1$. Ekkor

$$|\Psi_{ce}\rangle =: |\Psi_c\rangle = (|\beta\rangle + |-\beta\rangle)/\sqrt{2} \quad (11.12)$$

egy macska-állapot. A $|\Psi_c\rangle$ tiszta állapotnak megfelelő sűrűségoperátor egy projekció:

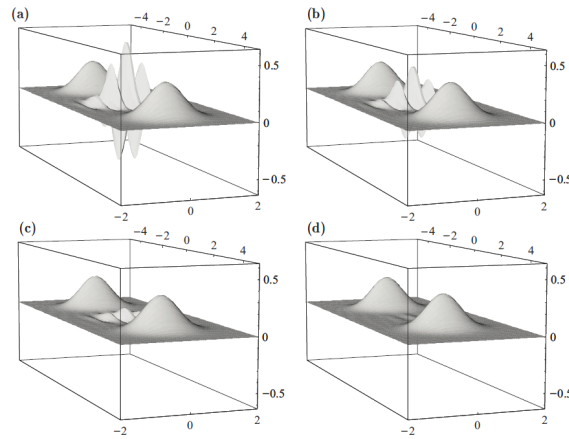
$$|\Psi_c\rangle\langle\Psi_c| = (|\beta\rangle\langle\beta| + |\beta\rangle\langle-\beta| + |-\beta\rangle\langle\beta| + |-\beta\rangle\langle-\beta|)/2. \quad (11.13)$$

Meg lehet mutatni, hogy egy ilyen állapotban lévő rendszer a környezettel való kölcsönhatása során úgy változik, hogy a $|\beta\rangle\langle-\beta|$ és $|\beta\rangle\langle\beta|$ nemdiagonális részei az idő múlásával nem pillanatszerűen, de nagyon rövid időállandóval eltűnnek, bekövetkezik a *dekoherencia* és a rendszer a

$$|\Psi_c\rangle\langle\Psi_c| \longrightarrow \varrho_{\text{inc}} = (|\beta\rangle\langle\beta| + |-\beta\rangle\langle-\beta|)/2 \quad (11.14)$$

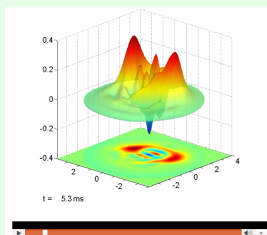
folyamattal a ϱ_{inc} *inkoherens* sűrűségoperátorral jellemzett *keverék* állapotba megy át. Ez utóbbi jellemzi azt a már csupán a klasszikus $1/2 - 1/2$ valószínűségekkel megadható állapotot, amikor már tudjuk, hogy a rendszer az egyik vagy másik klasszikus állapotban van (“a macska él vagy elpusztult”) és a kétfajta állapot kvantumozsúperpozíciója megszűnt. A dekoherencia elméletek szerint az interferencia tagok annál gyorsabban tűnnek el, minél nagyobb az interferáló komponensek távolsága, azaz minél kisebb közöttük az átfedés.

A macska-állapot Wigner-függvényének változását láthatjuk a következő ábrán, ahol a két púp a két koherens állapotnak felel meg, a köztük lévő oszcillációk pedig az interferencia-tagokból származnak. Ezek eltűnése nyomán a Wigner-függvény mindenütt pozitívvá válik, ami az állapot klasszikus voltának jelzése.



11.6. ábra. Egy átlagosan 10 fotont tartalmazó páros macska állapot Wigner függvényének változása az idő függvényében. a) $t = 0$, b) $t = T_c/20$, c) $t = T_c/5$, d) $t = T_c/2$, ahol T_c az üregélettartam.

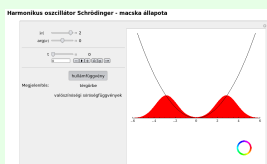
Haroche és munkatársai a dekoherencia folyamatát is sikerrel figyelték meg. Ehhez az üregen változó időközesséssel küldtek át egy további atomot az első után, amely az első által az üregben hagyott és azt követően dekoherenciát szenvedett móddal hat kölcsön. A második atom végállapota a módus állapotától függően változik és tanúskodik a közben végbement dekoherenciáról. A részleteket illetően ismét a [24] könyvre utalunk.

**Animáció:**

„50 miliszekundum egy Schrödinger macska állapot életében”
A linkelt animáció a páratlan macska állapot mérések alapján rekonstruált Wigner-függvényét mutatja. Két jelenséget figyelhetünk meg: egyrészt a kvantumos interferenciák gyorsan eltűnnek, másrészt a rendszer klasszikus komponensei lassan a fázistér origója irányába fejlődnek. Részletesen:

<http://www.nature.com/nature/journal/v455/n7212/pdf/nature07288.pdf>

<http://r14.lkb.ens.fr/spip.php?article253>

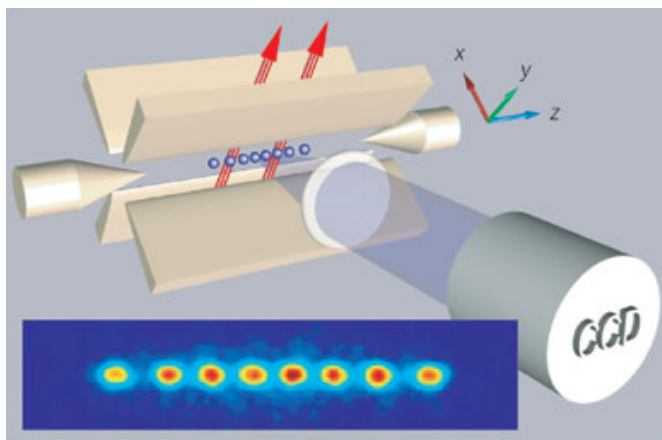
**Animáció:**

Az interaktív animáció segítségével egyetlen módus két koherens állapotának egy érdekes szuperpozícióját vizsgálhatjuk, ez a Schrödinger-macska állapot (Schrödinger-cat state), ami két koherens állapot normált szuperpozíciója: $|SC\rangle = (|\beta\rangle + |-\beta\rangle)/\mathcal{N}$, így ezt is a β komplex számmal jellemezhetjük (11.12). (lásd 2 fejezet végén).

<http://titan.physx.u-szeged.hu/~mmquantum/interactive/>

HarmonikusOscillatorSchrodingerMacskaAllapot.nbp

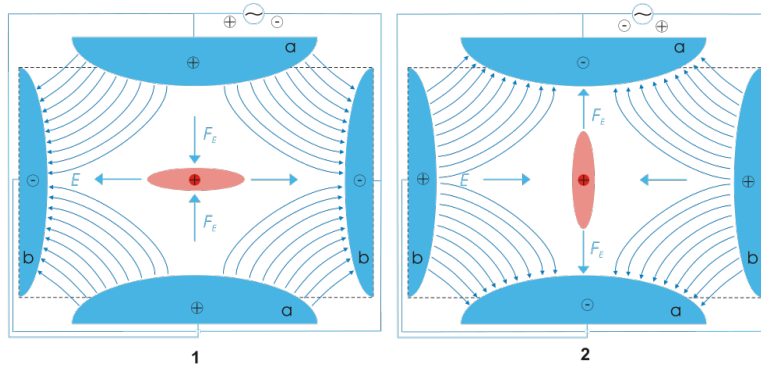
11.2. Csapdázott ionok rezgési állapotai



11.7. ábra. Egy ioncsapda sematikus ábrája. A nyilak a manipuláló lézernyalábokat jelzik. A benne lévő 8 iont a CCD kamerán át látni is lehet, ezt mutatja az ábra alsó része. Az ionok egy lineáris láncként rezegnek a z tengely mentén, a módus típusától függően a csapdafrekvenciánál kb. egy nagyságrenddel lassabban. **Forrás:** http://www.nature.com/nature/journal/v453/n7198/fig_tab/nature07125_F1.html

A JCP-modell egy másik kísérleti megvalósítása csapdázott atomokkal történt, és a David Wineland által Boulderben (USA) vezetett csoport nevéhez kapcsolódik. Alkalmas elektróda-elrendezéssel el lehet érni, hogy elektromos töltéssel rendelkező egy vagy néhány ion hosszabb ideig lényegében nyugalomban legyen vagy viszonylag kis amplitúdójú kollektív rezgéseket végezzen az elektródák között. Az eszközt ioncsapdának nevezik, és több fajtája is van. Ebben a berendezésben a Wineland féle csoportnak sikerült kétnívósra tekinthető ionok belső állapotait azok rezgő mozgásához csatolni. Ilyen módon az előző szakaszban tárgyalt kvantált elektromágneses mező módusának fotonjai helyett itt az ionok mechanikailag rezgő – de kvantált – mozgásához tartozó fononok alkotják a két kölcsönható rendszer másik részét.

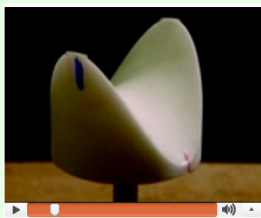
A Wineland-csoport az ionok mozgásának kontrollálására egy úgynevezett Paul-csapdát alkalmazott (W. Paul Nobel díj 1989). Ismert, hogy pontszerű töltések *stabil* egyensúlyát *sztatikus* elektromos terekkel nem lehet elérni (Earnshaw tétele). Ha ugyanis a sztatikus mező potenciálja U , akkor a P pontban elhelyezett töltésre vonatkozóan az egyensúly $\mathbf{F} = -\nabla U|_P = 0$ feltétele valamely P pontban teljesülhet ugyan, de a stabilitáshoz az kellene, hogy a próbatöltésre ható potenciálnak P -ben szigorú minimuma is legyen. Ehhez $\nabla^2 U|_P > 0$ lenne szükséges, ám ez ellentmond a sztatikus tér potenciáljára (a próbatöltés nélkül) érvényes $\nabla^2 U|_P = 0$ Laplace egyenletnek.



11.8. ábra. A csapda metszete az $x - y$ síkban. A potenciál matematikai alakja a tengely közelében jó közelítéssel az $U(\mathbf{r}, t) = \frac{U_0}{2} \left(1 + \frac{x^2 - y^2}{R^2}\right) \cos \omega_{\text{rf}} t$ időben változó nyeregpotenciál, ahol R az elektróda és a tengely távolsága. Az ábrán az ebből származó elektromos erővonalak láthatók a rezgés két fázisában. Az ω_{rf}^{-1} hez képest hosszú időre átlagolva ez egy stabil helyzetet eredményez. Szemléletesen: miközben a töltés a nyereg lejtős irányába indul, a lejtős irány emelkedővé, az emelkedő viszont lejtőssé változik, és visszatéríti a töltést az eredeti helyére, ami periodikusan ismétlődik. **Forrás:** [http://en.wikipedia.org/wiki/](http://en.wikipedia.org/wiki/Quadrupole_ion_trap)

Quadrupole_ion_trap

Ezért a Paul-féle csapdában egy kb. $\omega_{\text{rf}} = 10 - 100$ MHz frekvenciával rezgő, a 11.8 ábrán látható kvadrupólus jellegű mezőt keltenek, amely egy nyeregponttal bíró potenciál, és az ω_{rf}^{-1} -hez képest hosszú időt tekintve egy stabil átlagos helyzetet eredményez. Ezt szemléletesen úgy érthetjük meg, hogy miközben a töltés a nyereg lejtős irányába indul, a lejtős irány emelkedővé, az emelkedő lejtőssé változik és így visszatéríti a töltést az eredeti helyére, és ez periodikusan ismétlődik.

**Animáció:**

A Paul csapda működését jól szemlélteti az a mechanikai analógia, amelynél egy valódi nyereg egy függőleges tengely körül forog, s így a golyó nem gurul le a nyereg középpontjából. A linken látható másik videó a valódi csapda működését is mutatja.

http://www.physics.ucla.edu/demoweb/demomanual/electricity_and_magnetism/electrodynamics/paul_trap.html

Az ioncsapdák kidolgozásának egy másik, szintén Nobel-díjas (1989) úttörőjével Hans Dehmelttel együtt Wineland 1975-ben javaslatot tett arra, hogyan lehetne a csapdában az ionokat megállítani, azaz lehűteni, majd 1978-ban ezt ténylegesen is el tudta végezni. Több atom mozgásának és megállásának, azaz egy atomi szintű fázisátalakulásnak, fagyásnak az első megfigyelése, sőt láthatóvá tétele szintén a fentebb említett H. Walther nevéhez köthető. Egy erős rezonáns átmenetet pumpálva ugyanis egyetlen ion is olyan sok fotont képes szórni, hogy azt egy mikroszkópon keresztül látni is lehet, ez látható a 11.7 ábra alsó részén. Érdemes még azt is megemlíteni, hogy az 1980-as évek közepén a Dehmelt-féle csoport egyetlen elektront is hosszú ideig – több hónapig – csapdában tudott tartani, és azon fontos kísérleteket tudott végezni, pl. az elektron Schwinger által kiszámolt anomális mágneses momentumának mérését. A laborba reggelente bejövő fizikusok az egyetlen csapdázott elektront, amely hónapokig keringett változatlanul, mindennap mint régi ismerőst üdvözölhették, de ez már egy másik érdekes történet.

Wineland kísérleteiben elsősorban ${}^9\text{Be}^+$ ionokat használt, amelynek szintén egy alkáli fém, a Li elektronszerkezetéhez hasonló nívói vannak, s ezáltal optikailag is jól manipulálható. Egy másik ion, amit hasonló célra szoktak használni a ${}^{40}\text{Ca}^+$, ami még annyiival is egyszerűbb a ${}^9\text{Be}^+$ -nál, hogy nincs magspinje (mint ismert a ${}^{40}\text{Ca}^+$ magja kétszer mágikus mag), ezért az optikai spektruma is viszonylag egyszerű.

Az ionokat lézeres hűtéssel lényegében akár nyugalomban is lehet tartani. Ha nem ez a helyzet, akkor az egyensúlyból kitérített ion vagy az ionok egy a csapda térerőssége által meghatározott ω_m körfrekvenciájú rezgő mozgást végeznek, ami rendszerint egy nagyságrenddel lassabb az ionokat csapdában tartó időfüggő mező ω_{rf} rádiófrekvenciás változásánál. Az ω_m -nek megfelelő rezgés az ún. makromozgás, míg erre szuperponálódik a mindig jelenlévő ω_{rf} frekvenciájú kis amplitúdójú rezgés, a mikromozgás. Ez utóbbi biztosítja a csapdázást.

Az ionok makromozgása külső lézertérrel csatolható azok belső elektronállapataikhoz, némileg hasonlóan ahhoz, ahogyan Haroche csoportjának kísérleteiben az üreg oszcillációi és az atomok állapotai közötti csatolás megvalósult. A Wineland-féle kísérleteknél tehát szintén két oszcilláló kvantum objektumról van szó, az egyik ismét egy gerjeszthető “kétnívós atom”, de a másik most nem a mező egy módusa, hanem magának az ionnak a harmonikus rezgése a csapdán belül.

Első pillanatra nem látszik, hogyan lehet ezt a két szabadsági fokot összecsatolni. A kulcs itt is a lézer, amellyel az ionokat megvilágítva az akár rezonáns, akár nemrezonáns módon csatolni tudja a mozgást a belső gerjesztéssel. Az atom által “érezett” lézertér ugyanis függ attól, hogy hol tartózkodik a csapdában. A lézertér síkhullámnak véve a kölcsönhatási energia Hamilton operátora most a következő:

$$H_i = \hbar \frac{\Omega_\ell}{2} \exp(-i\omega_\ell t + ik_\ell Z \cos \vartheta) \sigma_+ + h.c. \quad (11.15)$$

Itt Ω_ℓ a lézertér és az atomi dipól kölcsönhatásakor föllépő $\Omega_\ell = dE_\ell/\hbar$ klasszikus Rabi frekvencia, ω_ℓ az atomot megvilágító külső lézer körfrekvenciája, $k_\ell = \omega_\ell/c$ a megfelelő hullámszám, ϑ pedig a

csapda tengelye (az z tengely) amely mentén az ionok mozognak és a külső lézerefény k hullámvektora által bezárt szög. A lényeges pont itt az, hogy a z tengely mentén mozgó ion helyzetét figyelembe vevő $k_\ell Z \cos \vartheta$ tagban a koordinátát nem klasszikusan, hanem a koordináta Z operátorával adjuk meg. Írjuk az Z -t az oszcillátor kvantummechanikájából jól ismert

$$Z = z_0(a + a^\dagger) \quad (11.16)$$

alakba, ahol a és $a^\dagger$ a léptető operátorok és $z_0 = \sqrt{2\hbar/m\omega_m}$ az m tömegű ionnak az ω_m körfrekvenciával jellemzett rezgésénél a koordináta szórása az alapállapotban, azaz lényegében az ismert Gauss alakú koordináta-hullámfüggvény szélessége. Vezessük be az $\eta_0 := k_\ell z_0 = 2\pi z_0/\lambda_\ell$ definícióval az úgynevezett Lamb–Dicke-paramétert, amely az ion alapállapotú kiterjedésének és a lézer hullámhosszának az aránya szorozva 2π -vel. Ez általában egy kis szám, mivel az ion mérete a csapdában jóval kisebb mint a rendszerint a látható tartományban működő lézer hullámhossza. Így az exponenciálisban a kis $\eta = \eta_0 \cos \vartheta$ paraméter miatt a helyfüggő rész sorbafejthető $\exp(i\eta(a + a^\dagger)) \approx 1 + i\eta(a + a^\dagger)$, és csak az energiaőrző tagokat megtartva (RWA) kapjuk, hogy

$$H_i = i\hbar\eta\frac{\Omega_\ell}{2}(a^\dagger\sigma_- - a\sigma_+). \quad (11.17)$$

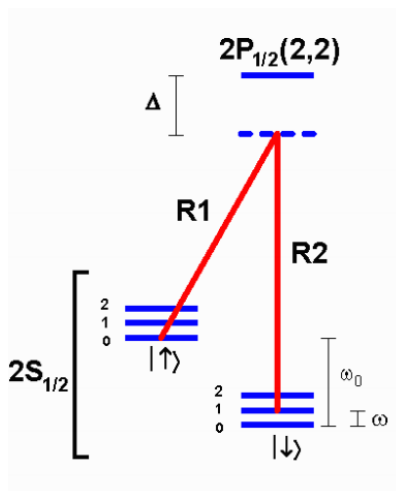
A H_i -ben szereplő két tag itt azt a két lehetséges folyamatot jelenti, hogy (i) az atom belső állapota legerjesztődik és ugyanakkor egy ennek megfelelő kvantummal nő a rezgési energiája, illetve fordítva, (ii) a rezgésből egy adag energia eltűnhet, ha közben ugyanennyivel nő az atom belső energiája, azaz a felső gerjesztett állapotba kerül. Ha még hozzávesszük a két különálló részrendszerhez (a mechanikailag ω_m frekvenciával oszcilláló ion + a két belső nívó) tartozó szokásos Hamilton-operátorokat, akkor ismét a Jaynes–Cummings–Paul-féle probléma áll előttünk. A belső atomi állapotok és a rezgési állapot (11.17)-al megadott kölcsönhatásából itt is periodikus energia csere következik (mint a csatolt ingák esetén), és a kvantumos jelleg miatt ismét diszkrét lebegési frekvenciák megjelenését várjuk. A Wineland-csoport egyik fontos kísérlete éppen ezek kimutatása volt. Érdekes módon ennek publikálása a mező diszkrét voltát jelző kvantum Rabi-frekvenciák mérését bejelentő Haroche-féle cikkel együtt a PRL azonos számában jelent meg [25], [26] – a két csoport megegyezett az azonos publikálási időpontban. Winelandék egyébként ugyanebben a közleményben kísérletileg bemutatták egyetlen ion mozgásának mint oszcillátornak a diszkrét számapállapotait, a koherens állapotait sőt a préselt fonon-állapotok létezését is. Kimérték ezen állapotoknak egymással való kapcsolatát, azaz a megfelelő kvantumos kifejtési együtthatókat, amplitúdókat is.

11.3. Mozgási Schrödinger macska állapotok

Mint már említettük a párizsi csoport egyik legszebb kísérlete volt a mező Schrödinger macska jellegű állapotainak létrehozása. A mindennapi szemlélet számára viszont valószínűleg még elképesztőbb a boulderi csoportnak az a kísérlete, ahol az ion mechanikai mozgásában sikerült Schrödinger macska állapotokat létrehozni. Ennek eredményeképpen egy ion makroszkopikusan két különböző helyen is van egyszerre, s ez abból adódik, hogy az ion kitérése a nyugalmi helyzetéből függ attól, hogy melyik belső állapotában van, az alsóban vagy a felsőben. Ha pedig a belső állapot a kettő szuperpozíciója, akkor ennek megfelelően az ion térbeli elmozdítása is két olyan helyzet szuperpozícióját eredményezi, ahol a lineáris kombináció egyes tagjai az atomi lokalizáltságnál egy nagyságrenddel nagyobb távolságra vannak egymástól. Eszerint egy alibi nem lehet megdönthetetlen bizonyíték egy kvantumrendszer, pl. egy

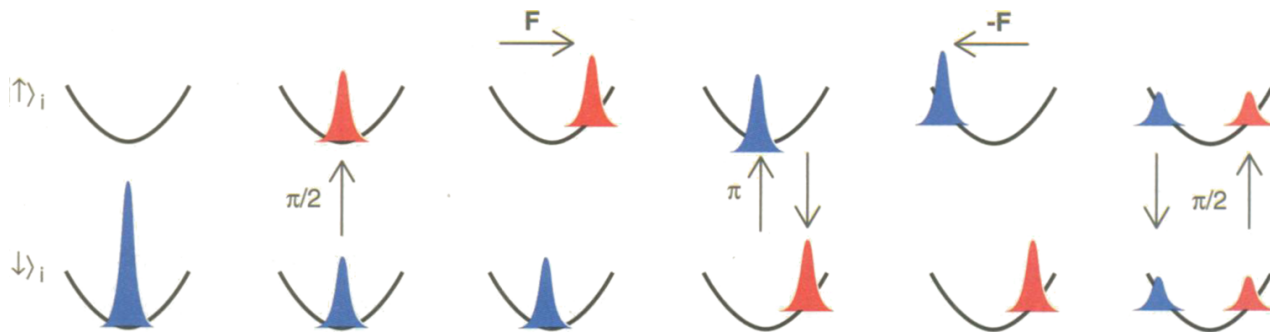
atom esetén, mert az egyszerre két helyen is tartózkodhat. A két helyzet az előző “macskás” állapothoz hasonlóan két különböző belső állapothoz is van csatolva.

A Wineland-féle csoport kísérleteiben használt ${}^9\text{Be}^+$ ion két releváns belső állapota a $|\downarrow\rangle$ és $|\uparrow\rangle$ az ion $2S$ jelű alapállapotának két hosszú élettartamú hiperfinom alnívója volt, egymástól $\omega_0/2\pi = 1,25$ GHz frekvenciának megfelelő energia különbséggel.



11.9. ábra. A Wineland féle csoport kísérleteiben a ${}^9\text{Be}^+$ ion esetében a két nívó közti csatolást az ion $2P$ gerjesztett állapotán keresztül egy kétfotonos Raman gerjesztéssel érték el.

A csatolást a vibrációs állapot és a belső állapot között szintén lézerimpulzusokkal lehetett elérni. Két másik szintén közeleső frekvenciájú lézerrel – azok hullámvektorának irányát megfelelően állítva – az $|\uparrow\rangle$ állapotú ion impulzust vesz át a mezőtől, míg a $|\downarrow\rangle$ állapotú ionnal ez nem történik meg. A spektroszkópiai részleteket illetően itt az eredeti irodalomra illetve az említett [24] könyvre utalunk.



11.10. ábra. A mozgási Schrödinger macska állapot létrehozásának egyes lépései.

Első lépésben egy $\pi/2$ impulzussal az ionokat az alsó és felső állapot egyenlő amplitúdójú szuperpozíciójába vitték, úgy hogy közben az atomok mozgási állapota nem változott, amit úgy értek el, hogy a gerjesztés a csapda tengelyére merőlegesen történt, ami a rezgési vákuum állapotot nem befolyásolta:

$$|\psi_0\rangle = |g, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|g, 0\rangle + |e, 0\rangle). \quad (11.18)$$

Ezután ismét két másik lézerrel elérték, hogy azok impulzust adjanak át az $|e\rangle$ állapotú ionnak, úgy hogy annak mozgása egy $|\alpha\rangle$ koherens rezgési állapotnak feleljen meg, míg a $|g\rangle$ állapotú atomot ez az impulzus nem befolyásolta. A csatolt rendszer így a

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g, 0\rangle + |e, \alpha\rangle) \quad (11.19)$$

állapotba került, ezt mutatja az ábrán a harmadik oszlop. Ezután egy olyan irányú π impulzus, amely a vibrációs állapotot nem befolyásolja a

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, 0\rangle + |g, \alpha\rangle) \quad (11.20)$$

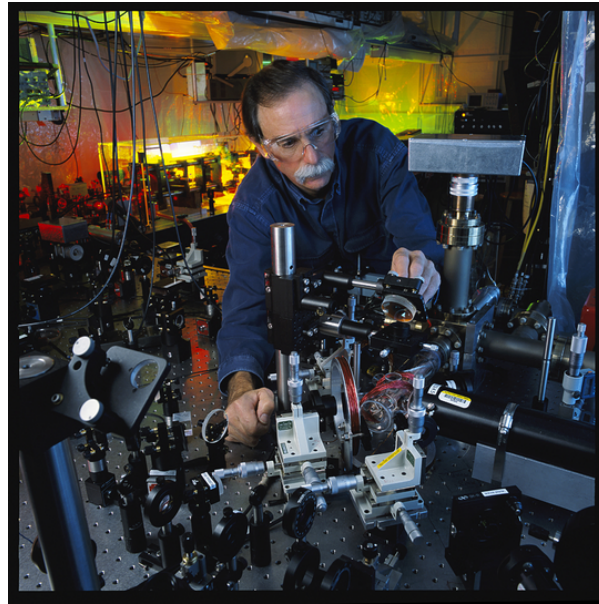
állapotot eredményezi. Ezt követően megint csak a gerjesztett atomot mozdítják meg, ezúttal az ellenkező irányba s így a

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e, -\alpha\rangle + |g, \alpha\rangle) \quad (11.21)$$

állapotot érték el. Végül a vibrációs állapotot nem befolyásoló újabb $\pi/2$ impulzus amely a $|g\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle)$ és $|e\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-|g\rangle + |e\rangle)$ átmenetet indukálja a

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{2}(-|g, -\alpha\rangle + |e, -\alpha\rangle + |g, \alpha\rangle + |e, \alpha\rangle) = \frac{1}{2}|e\rangle(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) + \frac{1}{2}|g\rangle(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \quad (11.22)$$

végállapotba viszi az atomot. A kísérlet során az atomok a harmonikus potenciált biztosító csapdában kb. 7 nm-es méretre voltak lokalizálva, míg az atomi hullámcsomag két része egymástól a $2|\alpha|$ -nak megfelelő 83 nm távolságban volt lokálisan szeparálva.



11.11. ábra. David J. Wineland (1944 -) amerikai fizikus. 2012-es fizikai Nobel-díj Serge Haroche-sal közösen. **Forrás:** <http://www.nist.gov/pml/div688/nobel-101612.cfm>

Ellenőrző kérdések

1. Mik a Rydberg atomok, milyen állapotok közötti átmenetet használtak a Haroche-féle kísérletekben.
2. Milyen rezonátort használtak és hogyan állították be a kölcsönhatás idejét?
3. Hogyan mutatták ki az üregbeli Rabi frekvenciák diszkrét voltát?
4. Hogyan hoztak létre összefonódást különböző atomok belső állapotai között?
5. Mit nevezünk a mező Schrödinger macska állapotának, és hogyan lehetett ezeket létrehozni?
6. Hogyan változik meg rövid idő alatt a macskaállapot és hogyan szemlélteti ezt a Wigner függvény?
7. Mi az ioncsapda, és hogyan tarthatók benne az ionok?
8. Hogyan lehet összecsatolni az ionok egy belső átmenetét a csapdában való kvantumozott mozgásukkal?
9. Milyen ionokat és milyen átmenetet használtak a Wineland-féle kísérletek során?
10. Mit jelent egy mozgási Schrödinger-macska állapot, és milyen lépésekkel lehet eljutni ehhez?

12. fejezet

Spontán emisszió, Lamb eltolódás, Casimir-effektus

Ebben a fejezetben három olyan effektust tárgyalunk, amelyek a mező nullaponti energiájának, vagy másképpen a vákuumfluktuációknak tulajdoníthatók. Az első ezek közül egy gerjesztett atomi állapot spontán lebomlása szabad térben, vagyis a spontán emisszió. Ennek során az atomi energia átadódik az atomot körülvevő mező energiájává, ahol kulcsszerepet játszik az a tény, hogy a Jaynes–Cummings–Paul-modellel szemben folytonosan sok olyan mező módus veheti át az energiát, amely az atomi átmenettel rezonanciában van. A második ilyen jelenség a Lamb-féle eltolódás, amelynek megfigyelése és értelmezése kulcsszerepet játszott a mező kvantumos elméletének megszületésében. Ez a jelenség az atomban az s típusú elektronpályák energiájának megnövekedése a gömbszimmetriát nem mutató, de egyébként azonos energiájú atomi állapotokhoz képest, ami a mező módusainak vákuumállapotaival való kölcsönhatás következménye. A harmadik jelenség a Casimir-effektus, amely szerint két elektromosan semleges párhuzamos vezető lemez között vákuumban egy vonzóerő lép föl.

12.1. A spontán emisszió

A Jaynes–Cummings–Paul-modellben az egymástól $\hbar\omega_0$ távolságra lévő két energianívós atom egyetlen ω körfrekvenciájú módussal hat kölcsön. Amint láttuk, ha a módus kezdeti állapota a vákuum, és az atom alapállapotban van, akkor nem történik semmi. Ha viszont a vákuumba helyezett atom a gerjesztett állapotban van, tehát $C_{e,0}(0) = 1$, $C_{g,1}(0) = 0$, akkor az $|e, n = 0\rangle$ állapotból indulva a csatolt rendszer a

$$C_{e,0}(t) = \cos \frac{\Omega_0}{2}t; \quad C_{g,1}(t) = -i \sin \frac{\Omega_0}{2}t \quad (12.1)$$

képleteknek megfelelően az Ω_0 vákuum Rabi-körfrekvenciával meghatározott módon elindul az alapállapot felé. Ez azonban egyetlen módus esetén reverzibilis folyamat, az atom vissza is veszi az energiát a mezőtől.

Ezzel szemben a szabad térben lévő gerjesztett atom irreverzibilis módon veszti el azt a $\hbar\omega_0$ energiát, amit egy alkalmas gerjesztéssel belé tápláltunk, és ennek időbeli lefolyása exponenciális. A továbbiakban ezt a folyamatot fogjuk vizsgálni.

12.1.1. Megoldás a Fermi-féle aranyszabállyal

Először egy elemi perturbációs közelítéssel próbáljuk meg megoldani a problémát, amely hasonlít a félklasszikus eljárás során az abszorpcióhoz, illetve az indukált emisszióhoz vezető meggondoláshoz. Tekintsük egyetlen módusra az általános megoldást, amelynek alakja a 10. fejezetben tárgyaltak szerint a Schrödinger-képben általában

$$|\Psi(t)\rangle_S = \sum_n (C_{e,n}(t) e^{-i(\omega_e+n\omega)t} |e, n\rangle + C_{g,n+1}(t) e^{-i(\omega_g+(n+1)\omega)t} |g, n+1\rangle) \quad (12.2)$$

alakú. A gyorsan változó exponenciálisokat a $|\Psi(t)\rangle_I = e^{iH_0t/\hbar} |\Psi(t)\rangle_S$ transzformációval a kölcsönhatási képbe való áttéréssel kiküszöböljük, és a $C_{e,1}(0) = 1$, $C_{g,1}(0) = 0$ kezdőállapotból indítjuk a megoldást. Ekkor – mint láttuk – az állapot mindig ebben az altérben marad, azaz

$$|\Psi(t)\rangle_I = C_{e,0}(t) |e, 0\rangle + C_{g,1}(t) |g, 1\rangle. \quad (12.3)$$

Az együtthatókra a Schrödinger egyenletből a

$$\dot{C}_{e,0}(t) = -i \frac{\Omega_0}{2} e^{i\Delta t} C_{g,1}(t) \quad (12.4)$$

$$\dot{C}_{g,1}(t) = -i \frac{\Omega_0}{2} e^{-i\Delta t} C_{e,0}(t) \quad (12.5)$$

egyenletrendszer adódik, amelynek egzakt megoldását egy adott Δ esetén a 10. fejezet alapján fentebb fölirtuk. Ha viszont az atom szabad térben van, akkor már sok olyan különböző irányú $\mathbf{k}$ hullámvektorral megadott módus van, amelynek $\omega = c|\mathbf{k}|$ frekvenciája közel esik az atomi átmenethez tartozó ω_0 Bohr frekvenciához, azaz amelyekre $\Delta = \omega_0 - \omega \ll \omega_0$. Minthogy ez esetben az $\Omega_0 = \frac{2d}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}$ képlet szerint a mező vákuum amplitúdójának megfelelő Rabi-frekvencia is függ az ω -tól, a szóba jöhető sok módus együttes hatását a szélessávú mező által létrehozott indukált emisszió tárgyalásánál használt közelítéshez hasonlóan próbáljuk figyelembe venni.

Ehhez a főnti egyenletrendszert tetszőleges Δ -ra a perturbációs számítás első közelítésében oldjuk meg úgy, hogy a (12.5) második egyenlet bal oldalára a 0-ik közelítésben érvényes $C_{e,0}(t) = 1$ -et írunk, majd integráljuk ezt az egyenletet. Az eredmény

$$C_{g,1}^{(1)}(t) = \frac{\Omega_0}{2} \frac{e^{-i\Delta t} - 1}{\Delta}, \quad (12.6)$$

ami első rendben a

$$\left| C_{g,1}^{(1)}(t) \right|^2 = \frac{\Omega_0^2}{4} \frac{\sin^2 \Delta t/2}{(\Delta/2)^2} \quad (12.7)$$

átmeneti valószínűsége vezet. Ezt az egyetlen Δ esetre kapott eredményt most összegezzük az összes módusra. Mint ismert, pl. a Planck törvény levezetéséből, a térfogategységben a módusok sűrűségének frekvenciafüggése $g(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$. A mező polarizációs irányának a kérdésével egyelőre nem törődve, az összes módus által befolyásolt valószínűséget a

$$P_{e \rightarrow g} = \int \frac{\Omega_0^2}{4} t^2 \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{[t(\omega_0 - \omega)/2]^2} g(\omega) d\omega \quad (12.8)$$

integrál adja. Itt az integrandusban a $\frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{[t(\omega_0 - \omega)/2]^2}$ tényező gyorsan változó függvény a többihez képest. Ez viszont a megfigyelési időtartamok tipikus értékeire csak az $\omega_0 - \omega = 0$ körül ad releváns járulékot az integrálhoz. Pontosabban, használjuk a $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2[(\omega_0 - \omega)t/2]}{[(\omega_0 - \omega)/2]^2} = 2\pi t \delta(\omega_0 - \omega)$ képletet, (s ez az, amit Fermi-féle aranyszabálynak nevezünk),

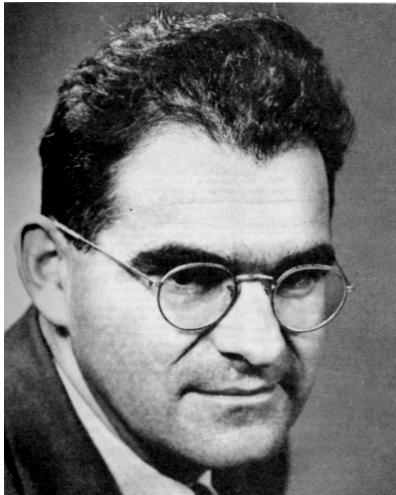
$$P_{e \rightarrow g} = \gamma_0 t, \quad (12.9)$$

ahol a spontán emisszió gyorsaságának γ_0 mértéke (rátája):

$$\gamma_0 = \pi \frac{\Omega_0^2(\omega_0)}{2} g(\omega_0). \quad (12.10)$$

Ez az eredmény mutatja, hogy a γ_0 a $d^2\omega_0^3$ -el arányos, de nem veszi figyelembe az atomi dipólmomentum és a mező vektora közötti szög lehetséges irányait, továbbá azt feltételezi a perturbációs számítás első rendjének megfelelő logikával, hogy a gerjesztett atomi állapot valószínűsége végig közel marad az 1-hez, ami nyilvánvalóan nem érvényes.

12.1.2. A spontán emisszió Weisskopf–Wigner elmélete



12.1. ábra. Victor Frederick Weisskopf (1908 - 2002) osztrák-amerikai fizikus. **Forrás:** http://en.wikipedia.org/wiki/Victor_Weisskopf

Ebben a szakaszban egyetlen atom és sok módus kölcsönhatását vizsgáljuk, amit a következő Hamilton-operátorral modellezünk:

$$H = \hbar \sum_s \omega_s a_s^\dagger a_s + \frac{\hbar \omega_0}{2} \sigma_3 + \hbar \sum_s (\Omega_s^* a_s^\dagger \sigma_- + \Omega_s a_s \sigma_+), \quad (12.11)$$

ahol s az összes lehetséges móduson végigfutó index, és az utolsó kölcsönhatási tagot a forgóhullámú közelítésben adtuk meg, amelyben Ω_s az s -edik módus vákuum Rabi-frekvenciája. A probléma időfüggő megoldását a

$$|\Psi(t)\rangle = C_{e,0}(t) e^{-i\frac{\omega_0}{2}t} |e, \{0\}\rangle + \sum_s C_{g,\{1_s\}}(t) e^{i(\frac{\omega_0}{2} - \omega_s)t} |g, \{1_s\}\rangle \quad (12.12)$$

alakban keressük, a $C_{e,0}(0) = 1$ kezdeti föltétellel, ahol az első tagban szereplő $|e, \{0\}\rangle$ az az induló állapot, amikor az atom gerjesztett és minden módus a vákuum állapotban van. A másik tagban szereplő $|g, \{1_s\}\rangle$ vektorok viszont az alapállapotú atom és a mező egy általános egyfotonos állapotának szorzatát jelentik.

Írjuk be ezt a $|\Psi(t)\rangle$ -t a (12.11) Hamilton-operátornak megfelelő Schrödinger-egyenletbe, majd a szokásos módon vetítsük a kapott eredményt az $|e, \{0\}\rangle$ illetve a $|g, \{1_s\}\rangle$ vektorokra. Az együtthatókra ekkor a

$$\dot{C}_{e,0}(t) = -i \sum_s \Omega_s C_{g,\{1_s\}}(t) e^{-i(\omega_s - \omega_0)t}, \quad (12.13)$$

$$\dot{C}_{g,\{1_s\}}(t) = -i \Omega_s^* e^{i(\omega_s - \omega_0)t} C_{e,0}(t) \quad (12.14)$$

egyenletrendszeret kapjuk. Integráljuk formálisan a (12.14) egyenletet és helyettesítsük vissza (12.13)-be.

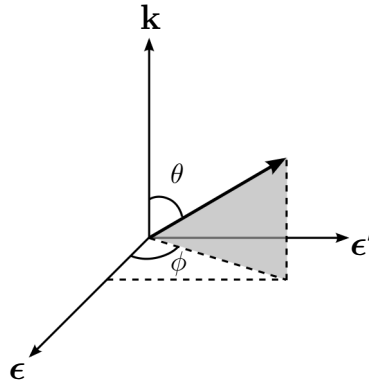
Így a $C_{e,0}(t)$ -re egy integrodifferenciálegyenletet kapunk:

$$\dot{C}_{e,0}(t) = - \sum_s |\Omega_s|^2 \int_{t_0}^t e^{-i(\omega_s - \omega_0)(t-t')} C_{e,0}(t') dt'. \quad (12.15)$$

Eszerint az egyenlet szerint $C_{e,0}(t)$ deriváltját a t időpontban annak korábbi időpillanatokban vett értékei határozták meg, azaz az egyenlet időben nemlokális. A mező és az atom közötti csatolásra jellemző $\Omega_s \rightarrow \Omega(\omega, \theta) = \langle e | \mathbf{D} | g \rangle \mathcal{E}_\omega / \hbar$ belső szorzat függ $\omega_s = \omega$ -tól, azaz a módus frekvenciájától és a módus polarizációs iránya és az atomi dipólus által bezárt szögtől. Legyen a módus $\mathbf{k}$ hullámvektorának iránya a $\hat{\mathbf{z}}$ irány, $\mathcal{E}_\omega$ két polarizációs iránya az $\epsilon = \hat{\mathbf{e}}_x$ és $\epsilon' = \hat{\mathbf{e}}_y$, míg az $\langle e | \mathbf{D} | g \rangle$ átmeneti dipólmomentum mutasson a θ és ϕ polár és azimutszögekkel jellemzett irányba. Ekkor

$$|\langle e | \mathbf{D} | g \rangle \mathcal{E}_\omega|^2 = \frac{d^2}{\hbar^2} \mathcal{E}_\omega^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \frac{d^2}{\hbar^2} \mathcal{E}_\omega^2 \sin^2 \theta, \quad (12.16)$$

ahol kihasználtuk, hogy az átmeneti dipólmomentum nagysága a két polarizációs irányra azonos.



12.2. ábra. A $\mathbf{k}$ vektor a $\mathbf{D}$ vektor és a két polarizációs irány ϵ , illetve ϵ' térbeli helyzete.

A sokmódusú tér kvantálásánál használt formalizmus szerint egy nagyméretű térfogatba zárt mező esetén a módusokra való $\sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k})$ összegzés helyére a $\mathcal{V}/(2\pi)^3 \int f(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k}$ alakú integrál lép. Itt a

$|\mathbf{k}| = \omega/c$ helyett rendszerint az ω változót használjuk, a módusok iránya szerint pedig a θ és ϕ szerinti szokásos gömbi változóknak kell integrálni. (Ha az integrandus a $\mathbf{k}$ irányától illetve a polarizációtól nem függ, akkor ez egyszerűen a $\mathcal{V}$ térfogatban található módusok $\mathcal{V}g(\omega)d\omega = \mathcal{V}\omega^2/c^3\pi^2d\omega$ sűrűségével szorzott függvény integrálását jelenti, amely már a szögek szerint ki van integrálva, esetünkben azonban nem ez a helyzet.) Így a $C_{e,0}(t)$ -re vonatkozó egyenlet:

$$\dot{C}_{e,0}(t) = -\frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3c^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\Omega(\omega, \theta)|^2 \omega^2 d\omega \sin\theta d\theta d\phi \int_{t_0}^t e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} C_{e,0}(t') dt', \quad (12.17)$$

ahol mint láttuk:

$$|\Omega(\omega, \theta)| = \frac{d}{\hbar} \mathcal{E}_\omega \sin\theta = \frac{d}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\mathcal{V}}} \sin\theta. \quad (12.18)$$

Az irányok (θ és ϕ) szerinti integrálás eredménye $2\pi \cdot 4/3 = 8\pi/3$, és így

$$\dot{C}_{e,0}(t) = -\frac{d^2}{8\pi^3c^3\hbar^2} \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \omega^2 d\omega \int_{t_0}^t e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} C_{e,0}(t') dt' \quad (12.19)$$

Most kihasználjuk, hogy $C_{e,0}(t')$ az $e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')}$ -hez képest lassan változó függvény az előforduló ω -k túlnyomó többségére, így azt a t időpontbeli értékével helyettesítve kivisszük az integrál jel elé. A megmaradt exponenciális idő szerinti integrálját a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t e^{-i(\omega-\omega_0)(t-t')} dt' = \pi\delta(\omega - \omega_0) - i\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_0} \quad (12.20)$$

képlettel számíthatjuk ki, amelynek eredményében a Dirac-delta éppen azt jelenti, hogy a módusok frekvenciái közül lényegében csak az ω_0 rezonáns frekvencia játszik szerepet, éppen az amelynél $e^{-i(\omega-\omega_0)t}$ változása lassú. A második tag amelyben a $\mathcal{P}$ a főértéket jelenti, egy frekvenciaeltolódást eredményez, amely kapcsolatba hozható a Lamb féle eltolódással. Itt csak a valós részt figyelembe véve, az eredmény

$$\dot{C}_{e,0}(t) = -\frac{\gamma_0}{2} C_{e,0}(t), \quad (12.21)$$

ahol

$$\gamma_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3} \frac{d^2\omega_0^3}{\hbar c^3} \quad (12.22)$$

a spontán emissziót jellemző állandó.

A Weisskopf–Wigner féle elmélet *irreverzibilis* és exponenciális lecsengésű spontán emissziót mutat, itt nincs föléledés mint a Jaynes–Cummings–Paul-modellből következő dinamikában, ahol csupán egy módusnak adja át az energiát az atom, és azt abból vissza is tudja nyerni. A szabad térben azoknak a folyamatoknak az amplitúdói, amelyek ezt a visszanyerést írják le a sok különböző módusfrekvencia miatt destruktíve interferálnak ezért a visszatérés nem lehetséges.

12.2. A Lamb-eltolódás

A mező kvantumos természetének egy másik megnyilvánulása a Lamb-féle eltolódás. Így nevezzük azt a kicsiny energiakülönbséget, amely bizonyos atomi nívók között lép föl, és amelyet az atom relativisztikus kvantummechanikája nem magyaráz, mert az az atom környezetét jelentő elektromágneses

vákuum fluktuációinak tulajdonítható. A relativisztikus kvantummechanika szerint a H atom két azonos $j = 1/2$ kvantumszámhoz tartozó állapota a $2S_{1/2}$ és $2P_{1/2}$ azonos energiájúak. 1947-ben Lamb és Retherford mikrohullámú módszerrel kb. 1 GHz-nek megfelelő energiakülönbséget mértek a két energianívó között, amelynek magyarázatát a kvatumelektrodinamika segítségével ugyanabban az évben H. Bethe adta meg. Mi itt egy kevésbé egzakt, de jóval egyszerűbb meggondolásra támaszkodva mutatjuk meg a Lamb-eltolódás eredetét. Ez a gondolatmenet T. Weltontól származik. Az egzakt eredmény és annak levezetése megtalálható Landau és Lifshic Elméleti Fizika c. könyvsorozatának IV. kötetében [2].

Az elektron potenciális energiája az e_0 töltésű mag terében

$$V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{|\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}|} \quad (12.23)$$

ahol a $\delta\mathbf{r}$ amiatt lép föl, mert a mező vákuumfluktuációi befolyásolják az elektron helyzetét, beleértve a magtól mért térbeli távolságát is. A $V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$ potenciális energiát sorba fejtvé kapjuk, hogy

$$V(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) = \delta\mathbf{r} \cdot \nabla V + \frac{1}{2}(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 V + \dots \quad (12.24)$$

Az elsőrendű tag átlaga eltűnik, mert a vákuumfluktuációk izotróp volta miatt $\langle \delta\mathbf{r} \rangle_{\text{vac}} = 0$. A másodrendű tag részletesebb alakja

$$\frac{1}{2}(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla)^2 V = \frac{1}{2} \sum_{ij} \delta x_i \delta x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V, \quad (12.25)$$

amelyből átlagolás után, ismét a $\langle \delta x_i \rangle = 0$ miatt, csak a “diagonális”

$$\frac{1}{2} \sum_i (\delta x_i)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \frac{1}{6} \langle (\delta\mathbf{r})^2 \rangle \nabla^2 V \quad (12.26)$$

rész marad meg. Egy $|n, \ell, m_\ell\rangle$ atomi sajátállapotban a korrekció mértéke első rendben így

$$\Delta E = \frac{1}{6} \langle (\delta\mathbf{r})^2 \rangle \langle n, \ell, m_\ell | \nabla^2 V | n, \ell, m_\ell \rangle. \quad (12.27)$$

Tekintettel arra, hogy $\nabla^2 \frac{e_0^2}{|\mathbf{r}|} = -4\pi e_0^2 \delta(\mathbf{r})$, ahol $\delta(\mathbf{r})$ a Dirac-delta, a korrekció

$$\Delta E = \frac{e_0^2}{\epsilon_0} \frac{1}{6} \langle (\delta\mathbf{r})^2 \rangle \langle n, \ell, m_\ell | \delta(\mathbf{r}) | n, \ell, m_\ell \rangle. \quad (12.28)$$

Mivel a stacionárius állapotok koordináta hullámfüggvényei az $\ell = 0$ -nak megfelelő s állapotok kivételével a Dirac-delta szingularitásának helyén vagyis az origóban eltűnnek, ezért a fönti várható érték csak az s állapotokban lesz nullától különböző, és azokra

$$\langle n, 0, 0 | \delta(\mathbf{r}) | n, 0, 0 \rangle = |\psi_{n,0,0}(r=0)|^2 = \frac{1}{\pi n^3 a_0^3} \quad (12.29)$$

az eredmény, ahol a_0 a Bohr sugár. Láthatóan minél kisebb az n főkvantumszám ez az eltolódás annál nagyobb, és az s állapotokra pozitív, míg a p állapotokon nem jelentkezik, eszerint az energiaváltozás

$$\Delta E = \frac{1}{6\epsilon_0} \langle (\delta\mathbf{r})^2 \rangle \frac{e_0^2}{\pi n^3 a_0^3}. \quad (12.30)$$

Most vizsgáljuk meg a $\langle(\delta\mathbf{r})^2\rangle$ átlagot. Ha ez egy $-e_0$ töltésű elektron és annak mozgását a vákuum térerősség hatására létrejövő klasszikus mozgásnak tekintjük, akkor a mozgásegyenlet

$$\frac{d^2(\delta\mathbf{r})_\omega}{dt^2} = -\frac{e_0}{m}\mathcal{E}_\omega e^{-i\omega t}, \quad (12.31)$$

és ennek megoldása

$$(\delta\mathbf{r})_\omega = \frac{e_0}{m\omega^2}\mathcal{E}_\omega e^{-i\omega t}. \quad (12.32)$$

Az átlagos négyzetes eltérés egy módus hatására

$$(\delta\mathbf{r})_\omega^2 = \frac{e_0^2}{2m^2\omega^4}\mathcal{E}_\omega^2 \quad (12.33)$$

és figyelembe véve az $\mathcal{E}_\omega = \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\mathcal{V}}\right)^{1/2}$ vákuum amplitúdót, összes módus hatására bekövetkező energiaeltolódás

$$\Delta E = \frac{1}{6\epsilon_0} \frac{e_0^2}{\pi n^3 a_0^3} \sum_k \frac{e_0^2}{2m^2 k^4 c^4} \frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 \mathcal{V}} \quad (12.34)$$

ahol $k = |\mathbf{k}| = \omega/c$, és $\mathcal{V}$ egy nagyméretű normálási térfogat, amely a mező módusait és a kisméretű atomot tartalmazza. Az összegzés helyett integrálunk a módusokra, a $\mathcal{V}$ térfogatban található módusok számára vonatkozó módussűrűség $\mathcal{V}g(\omega)d\omega = \mathcal{V}\omega^2/c^3\pi^2 d\omega$ képletét használva. Így a kiszámítandó energiaeltolódás

$$\Delta E = \frac{1}{24\epsilon_0^2} \frac{e_0^2}{\pi n^3 a_0^3} \int \frac{e_0^2}{m^2} \frac{\hbar\omega}{\omega^4} \frac{\omega^2}{c^3\pi^2} \frac{d\omega}{c} = \frac{2}{3} \frac{\hbar}{\pi n^3 a_0^3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{\hbar c}\right)^2 \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \int \frac{1}{\omega} d\omega. \quad (12.35)$$

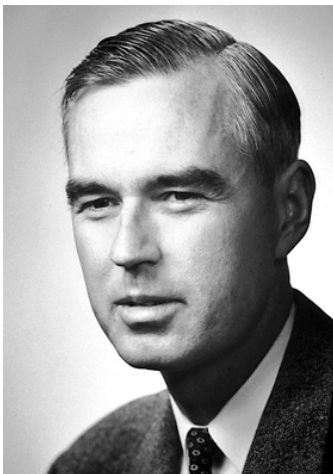
Itt $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{\hbar c} = \alpha$ a Sommerfeld-féle finomstruktúra állandó, $\frac{\hbar}{mc} = \lambda_c$ pedig az elektron redukált (2π -vel osztott) Compton-hullámhossza. Az integrációs határok első látásra a 0 és ∞ között veendőek, így azonban az eredmény logaritmikusan divergens lenne a frekvenciaspektrum mindkét végén. Ám egy természetes levágás mind az alacsony mind a magas frekvencián megszünteti ezt a problémát, ami gyakori trükk az elektromágneses vákuummal kapcsolatos feladatoknál. Az n főkvantumszámhoz tartozó $|E_n| = \frac{mc^2\alpha^2}{2n^2}$ energiájú állapothoz tartozó $\omega_B = |E_n|/\hbar = \frac{mc^2\alpha^2}{2n^2\hbar}$ körfrekvencia a Bohr-elmélet szerint az elektron szögsebességének a fele. Kézenfekvő a föltételezés, hogy ennél kisebb körfrekvenciákra a töltés nem reagál. A felső levágási határt pedig az elektron nyugalmi energiájának megfelelő az $\omega_c = mc^2/\hbar = c/\lambda_c$ Compton-körfrekvencia adja, ettől kezdve ugyanis a nemrelativisztikus dinamika amúgy is érvényét veszti. Így az eredmény:

$$\Delta E = \frac{2}{3} \frac{\hbar}{\pi n^3 a_0^3} \alpha^2 \lambda_c^2 \ln \frac{\omega_c}{\omega_B} = \frac{2}{3} \frac{\hbar}{\pi n^3 a_0^3} \alpha^2 \lambda_c^2 \ln \frac{2n^2}{\alpha^2}. \quad (12.36)$$

Ha itt még figyelembe vesszük az $a_0 = (\hbar/mc)/\alpha = \lambda_c/\alpha$ kapcsolatot, akkor a

$$\Delta E = \frac{2}{3\pi} \frac{mc}{n^3} \alpha^5 \ln \frac{2n^2}{\alpha^2} \quad (12.37)$$

eredményt kapjuk. Az $n = 2$ esetén a $2S_{1/2}$ állapot energiája körülbelül ennyivel adódott magasabbnak mint a $2P_{1/2}$ állapoté, amit a két nívó közötti energiakülönbségnek megfelelő frekvencia $\Delta E/(2\pi\hbar) \approx 1$ GHz-es abszorpció kimutatásával sikerült megmérnie Lambnek.



12.3. ábra. Willis Eugene Lamb, Jr. (1913 - 2008) amerikai fizikus. (1955-ben fizikai Nobel-díjat nyert a róla elnevezett Lamb-eltolódás kimutatásáért). **Forrás:** http://en.wikipedia.org/wiki/Willis_Lamb

12.3. A Casimir-effektus

Ebben a szakaszban egy harmadik érdekes effektust tárgyalunk, amely szintén az elektromágneses vákuummal kapcsolatos. H. B. G. Casimir 1948-ban mutatott rá arra, hogy két tökéletes vezető-, de töltéssel nem bíró sík között vákuumban is vonzó erő lép föl, aminek szemléletes oka, hogy a síkok között az elektromágneses vákuum módusstruktúrája más lesz mint síkok nélkül és ez egy vonzóerőhöz vezet.



12.4. ábra. Hendrik Brugt Gerhard Casimir (1909 - 2000), holland fizikus. **Forrás:** http://en.wikipedia.org/wiki/Hendrik_Casimir

A kvantitatív leíráshoz tekintsünk egy négyzetes hasáb alakú dobozt, amelynek méretei $L_x = L_y =$

L , és $L_z = d$. Ha az elektromos térerősségre minden falon 0 értékű érintő irányú határföltételt írunk elő, az a megfelelő $E_x \sim \cos(l\pi x/L) \sin(\pi m y/L) \sin(n\pi z/d)$ stb. módusfüggvényekben előforduló l, m, n nemnegatív egész számokból a módus körfrekvenciájára a

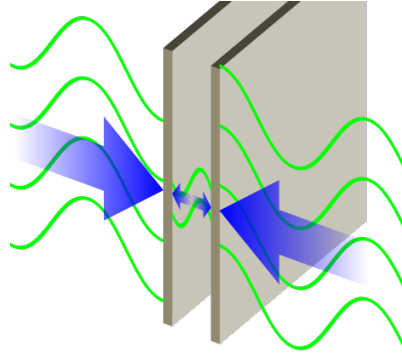
$$\omega_{lmn} = \pi c \left(\frac{l^2}{L^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{d^2} \right)^{1/2} \quad (12.38)$$

formulát adja. Itt megjegyezzük, hogy az l, m, n számok közül egyszerre csak egyikük lehet 0. A pozitív számhármasok két polarizációs irányú módot jelentenek, viszont ha a három szám közül az egyik 0, akkor csak egy polarizációs módus lehetséges.

A doboz esetén a nullaponti energia:

$$E_0(d) = \sum'_{lmn} 2 \left(\frac{1}{2} \hbar \omega_{lmn} \right), \quad (12.39)$$

ahol a 2-es tényező a módusonkénti két független polarizációs irány miatt lép föl. A vessző pedig arra utal, hogy ha az egészek közül valamelyik 0, akkor csak egy polarizációs módus lehetséges, így a 2-es szorzó nem lép föl.



12.5. ábra. A „vákuum-fluktuáció” grafikus szemléltetése. **Forrás:** <http://hu.wikipedia.org/wiki/Casimir-effektus>

Az általunk vizsgált esetben föl fogjuk tenni, hogy $L \gg d$, s ekkor az l és m szerinti összegzés integrálással helyettesíthető a $\frac{\pi l}{L} = k_x$, $\frac{\pi m}{L} = k_y$ és az ennek megfelelő $\sum_l = \int \frac{L}{\pi} dk_x$, $\sum_m = \int \frac{L}{\pi} dk_y$, képletek szerint, s így

$$E_0(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \sum_n \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{1/2}. \quad (12.40)$$

Ezzel szemben, ha szabad térben vagyunk, akkor d tetszőlegesen nagy lehet, és akkor ugyanez a helyettesítés az n szerinti összegzéssel is megtehető, a $\frac{\pi n}{d} = k_z$, és $\sum_n = \int \frac{d}{\pi} dk_z$ formulákkal. Eszerint a $d = \infty$ esetre az

$$E_0(\infty) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \quad (12.41)$$

kifejezést kapjuk. A fenti eredmények mindkét esetben divergensek, de a különbséget végezzé tudjuk tenni, s ez azért lényeges, mert az

$$U(d) = E_0(d) - E_0(\infty) \quad (12.42)$$

mennyiséget azonosíthatjuk a két lemez alkotta rendszer potenciális energiájával, amelyre így

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \left[\sum_n \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \left(k_x^2 + k_y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty dk_x \int_0^\infty dk_y \int_0^\infty dk_z (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (12.43)$$

adódik. Térjünk át hengerkoordinátákra az k_x, k_y síkon az $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ és a $\phi = \arctan(k_y/k_x)$ változókkal, ahol $k_x, k_y > 0$ miatt csak 0 és $\pi/2$ között kell integrálni. Ezt a ϕ szerinti integrálást már elvégezve:

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \frac{\pi}{2} \left[\sum_n \int_0^\infty k dk \left(k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{1/2} - \frac{d}{\pi} \int_0^\infty k dk \int_0^\infty dk_z (k^2 + k_z^2)^{1/2} \right]. \quad (12.44)$$

Most az első tagban emeljük ki az n együtthatóját a gyök alól és végezzük el a $w = (d^2/\pi^2)k^2$ helyettesítést, míg a második tagban ezen túlmenően a $\tilde{z} = \frac{d}{\pi}k_z$ változócsere is. Ekkor

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2}{4} \frac{\pi^2}{d^3} \left[\sum_n \int_0^\infty (w + n^2)^{1/2} dw - \int_0^\infty d\tilde{z} \int_0^\infty (w + \tilde{z}^2)^{1/2} dw \right]. \quad (12.45)$$

Ezek az integrálok divergensek. Casimir azonban rámutatott arra, hogy a frekvenciák fizikailag valójában nem lehetnek végtelenek, mert nagyon rövid hullámhosszokra a lemezek nem képeznek akadályt számukra. Ezért levágást alkalmazott, azaz egy olyan – közelebbről nem meghatározott – $f(\omega/\omega_c)$ függvénnyel szorozta az integrandusokat, amely $\omega/\omega_c \ll 1$ esetén nem befolyásolja az eredményt, azaz $f(\omega/\omega_c) = 1$, (tehát a deriváltjai eltűnnek a 0 közelében), viszont $\omega/\omega_c \rightarrow \infty$ esetén elegendően gyorsan nullához tart.

Vezessük be ezután az

$$F(u) := \int_0^\infty dw (w + u^2)^{1/2} f(\pi c(w + u^2)^{1/2}/\omega_c) \quad (12.46)$$

jelölést. Figyelembe véve, hogy az $n = 0$ módushoz csak egy polarizációs irány tartozik, kapjuk, hogy

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2}{4} \frac{\pi^2}{d^3} \left[\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^\infty F(n) - \int_0^\infty F(z) dz \right]. \quad (12.47)$$

A zárójelben szereplő kifejezést az úgynevezett Euler–McLaurin-képlettel lehet megbecsülni, amely szerint

$$\sum_{n=1}^N F(n) - \int_0^N F(z) dz \approx \frac{1}{2} (F(N) - F(0)) + \sum_{k=1}^p \frac{B_{2k}}{(2k)!} (F^{(2k-1)}(N) - F^{(2k-1)}(0)) \quad (12.48)$$

ahol a B_{2k} együtthatók az úgynevezett Bernoulli-számok [28]: $B_0 = 1$, $B_1 = 1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30, \dots$ és a közelítés annál jobb minél tovább megyünk az összegzésben, azaz minél nagyobb

a p . Ha itt $N \gg N_0$, akkor a függvényérték és a deriváltak értékei a felső határon eltűnnek, továbbá egyszerűen megmutathatóan $F'(u) = -2u^2$, tehát $F'(0) = 0$, míg $F'''(u) = -4$, a magasabb deriváltak pedig eltűnnek. Így az eredmény

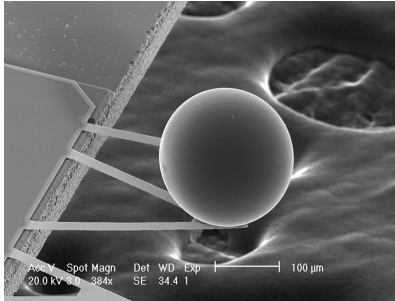
$$U(d) = -\frac{\hbar c L^2 \pi^2}{4} \frac{1}{d^3} \frac{1}{24 \cdot 30} 4 = -\frac{\hbar c L^2 \pi^2}{720 d^3}. \quad (12.49)$$

A felületegységre ható erő, azaz a vákuum energiától származó P nyomás a potenciális energia d szerinti negatív deriváltja osztva L^2 -el, amiből

$$P = -\frac{\hbar c}{240} \frac{\pi^2}{d^4} \quad (12.50)$$

a Casimir-erőnek nevezett nyomás. Egymástól $1 \mu\text{m}$ távolságban lévő lemezek esetén ez a nyomás $1,3 \times 10^{-5} \text{ N/cm}^2$.

Az effektus létezését kísérletileg először 1958-ban M. Sparnaay mutatta ki, 2002-ben G. Ruoso és munkatársai pontosabb kísérleti eljárással az elmélettel kb. 15%-os hibahatáron belüli egyezést mértek.



12.6. ábra. A Casimir effektus méréséről készült kép az "Astronomy Picture of the Day" honlapon. **Forrás:** <http://apod.nasa.gov/apod/ap061217.html>

Ellenőrző kérdések

1. Mi a spontán emisszió jelensége, és miért nem magyarázza azt a félklasszikus elmélet?
2. Mi a különbség a gerjesztett állapot $\rightarrow$ alapállapot átmenet során a JCP modell és a spontán emisszió között?
3. Milyen értelemben pontosabb a Weisskopf-Wigner elmélet az egyszerű perturbatív megoldásnál?
4. Milyen mennyiségek határozzák meg egy átmenethez tartozó spontán emisszió valószínűségét?
5. Mit nevezünk Lamb-féle eltolódásnak, mekkora ennek nagyságrendje a finomszerkezethez képest?
6. Hogyan magyarázza a vákuumfluktuáció a Lamb-féle eltolódást?
7. Miért csak az s állapotok esetén jelentkezik az eltolódás?
8. Mit nevezünk Casimir-effektusnak?

9. Milyen két energia különbségét kell figyelembe venni a Casimir-effektus nagyságának kiszámításához?
10. Hogyan származtatható a Casimir energiából a lemezekre ható nyomás?

Irodalomjegyzék

- [1] Neumann J.: A kvantummechanika matematikai alapjai, Akadémiai kiadó, Budapest 1980
- [2] V. B. Bereszteckij, E. M. Lifsic, L. M. Pitajevszkij: Relativisztikus kvantumelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest 1979
- [3] C. Cohen-Tannoudji, J. DuPont-Roc, G. Grynberg: Photons and Atoms Vol 1. Wiley N.Y. 1989
- [4] G.S. Agarwal: Quantum Optics, Cambridge University Press, Cambridge 2013
- [5] D. F. Walls , G. J. Milburn: Quantum Optics, Springer, Berlin, 1994
- [6] P. Meystre, M. Sargent III: Elements of Quantum Optics: Springer, Berlin, 1991
- [7] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz and J. F. Valley, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 2409
- [8] A. L. Wu, M. Xiao, H. J. Kimble, J. Opt. Soc. Am. B **4**,1465 (1987); M. Xiao, A. L. Wu, H. J. Kimble Phys. Rev. Lett. **59** 278 (1987)
- [9] G. Breitenbach, S. Schiller, J. Mlynek, Nature **387**, 471 (1997)
- [10] P. Kwiat, A. Sternberg, R Y Chiao, Phys Rev. A **45**, 7729 (1992)
- [11] E. T. Jaynes, F. W.Cummings Proc. IEEE, **51**, 89 (1963)
- [12] H. Paul, Annalen der Physik, **466**, 411 (1963)
- [13] J. C. Garrison, R.Y Chiao, Quantum Optics, Oxford University Press, Oxford 2008
- [14] M.O. Scully, M.S. Zubairy, Quantum Optics, Cambridge University Press, Cambridge 1997
- [15] R. Loudon, The Quantum Theory of Light, Third Edition, Oxford University Press 2000
- [16] S. Barnett, P.M. Radmore, Methods in Theoretical Quantum Optics, Oxford Clarendon Press, 1997
- [17] J. J. Slosser, P. Meystre, Resource letter: Coherence in Quantum Optics, CQO-1, Am J. Phys, **65**, 275, (1997)
- [18] H. A. Bachor, A Guide to Experiments in Quantum Optics, Wiley-VCH, Weinheim 1998
- [19] W. P. Schleich: Quantum Optics in Phase Space, Wiley-VCH, Berlin 2001

- [20] Y. S. Kim, M. E. Noz, Phase-Space Picture of Quantum Mechanics, World Scientific, Singapore 1991
- [21] H. M. Nussenzveig, Introduction to Quantum Optics, Gordon and Breach. NY 1973
- [22] C.C. Gerry, P.L. Knight, Introductory Quantum Optics, Cambridge University Press, Cambridge 2005
- [23] R. J. Glauber in Quantum Optics and Electronics, ed. C. deWitt, A. Blanden, C. Cohen-Tannoudji, Gordon and Breach N.Y. 1965 p. 65
- [24] S. Haroche, J.M. Raimond, Exploring the Quantum , Oxford University Press, 2006
- [25] M. Brune et. al. Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996)
- [26] D.M. Meekhof et al. Phys. Rev. Lett. **76**, 1796 (1996)
- [27] D. Meschede, H. Walther, G. Müller, Phys Rev. Lett. **54**, 551 (1985)
- [28] M. D. Abramowitz, I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, NY 1972