Kvantummechanika 1.
Feladatok

1. Tegyük fel, hogy A és B felcserélhető $[A,B]$-vel. Bizonyítsuk be az alábbi két állítást!
a. $[A,B^n]=nB^{n-1}[A,B]$
b. $\left[A,e^B\right]=e^B[A,B]$

2. Bizonyítsuk be, hogy $(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger$. Általánosítsuk a tételt több operátor szorzatára!

3. A Pauli-mátrixokat a következő módon definiáljuk:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Mit mondhatunk az önadjungáltságukról és az unitérségükről?

4. Számítsuk ki a $\sin(AB)$ operátor adjungáltját!

5. Számítsuk ki a Pauli-mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! Vizsgáljuk meg, hogy a sajátvektorok ortogonálisak-e!

Kvantummechanika 1.
Házi feladatok 2.
Elérhető pontszám: 15
Beadási határidő: 2007. szept. 17.

1. Bizonyítandó, hogy az A és B operátorokra akkor és csakis akkor teljesül $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$, ha kommutálnak, azaz $[A,B]=0$. (1p)

2. Önadjungáltak-e a következő operátorok?
$\mathrm{Re}(A)=\frac{1}{2}\left(A+A^\dagger\right)$ (1p)
$\mathrm{Im}(A)=\frac{1}{2i}\left(A-A^\dagger\right)$ (1p)

3. Bizonyítandók a következő állítások az A és B önadjungált operátorokra:
a. Ha α és β valós számok, akkor $\alpha A+\beta B$ önadjungált. (1p)
b. Ha A és B felcserélhetők, akkor AB önadjungált. (1p)
c. Ha $C=[A,B]$, akkor $C^\dagger=-C$. (1p)

4. Legyen $U=e^{iaH}$, ahol U és H operátorok, a pedig valós szám. Bizonyítandó, hogy ha H önadjungált, akkor U unitér. (3p)

5. Számítsuk ki a $\cos(A+B)$ operátor adjungáltját! (2p)

6. Számítsuk ki az alábbi mátrixok közül **kettőnek (egy 3x3-asnak és egy 2x2-esnek)** a sajátértékeit és sajátvektorait! Vizsgáljuk meg a sajátvektorok ortogonalitását!

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}5&\sqrt{2}&0\\\sqrt{2}&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}\ \text{(4p)}$$

Kvantummechanika 1.
Feladatok

1. Tegyük fel, hogy A és B felcserélhető $[A,B]$-vel. Bizonyítsuk be az alábbi két állítást!
a. $[A,B^n]=nB^{n-1}[A,B]$
b. $\left[A,e^B\right]=e^B[A,B]$

2. Bizonyítsuk be, hogy $(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger$. Általánosítsuk a tételt több operátor szorzatára!

3. A Pauli-mátrixokat a következő módon definiáljuk:
$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$
Mit mondhatunk az önadjungáltságukról és az unitérségükről?

4. Számítsuk ki a $\sin(AB)$ operátor adjungáltját!

5. Számítsuk ki a Pauli-mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! Vizsgáljuk meg, hogy a sajátvektorok ortogonálisak-e!

Kvantummechanika 1.
Házi feladatok 2.
Elérhető pontszám: 15
Beadási határidő: 2007. szept. 17.

1. Bizonyítandó, hogy az A és B operátorokra akkor és csakis akkor teljesül $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$, ha kommutálnak, azaz $[A,B]=0$. (1p)

2. Önadjungáltak-e a következő operátorok?
$\mathrm{Re}(A)=\frac{1}{2}\left(A+A^\dagger\right)$ (1p)
$\mathrm{Im}(A)=\frac{1}{2i}\left(A-A^\dagger\right)$ (1p)

3. Bizonyítandók a következő állítások az A és B önadjungált operátorokra:
a. Ha α és β valós számok, akkor $\alpha A+\beta B$ önadjungált. (1p)
b. Ha A és B felcserélhetők, akkor AB önadjungált. (1p)
c. Ha $C=[A,B]$, akkor $C^\dagger=-C$. (1p)

4. Legyen $U=e^{iaH}$, ahol U és H operátorok, a pedig valós szám. Bizonyítandó, hogy ha H önadjungált, akkor U unitér. (3p)

5. Számítsuk ki a $\cos(A+B)$ operátor adjungáltját! (2p)

6. Számítsuk ki az alábbi mátrixok közül **kettőnek (egy 3x3-asnak és egy 2x2-esnek)** a sajátértékeit és sajátvektorait! Vizsgáljuk meg a sajátvektorok ortogonalitását!
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&-i\\i&1\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}5&\sqrt{2}&0\\\sqrt{2}&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}\ \text{(4p)}$$