

Kvantummechanika 1.
Feladatok

1. Egy $|\psi\rangle$ állapotban lévő kvantumrendszer esetén tekintsünk egy adott fizikai mennyiséghez tartozó A önadjungált operátort. A fizikai mennyiség várható értéke és szórásnégyzete ebben az állapotban: $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$, illetve $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$.

(a) Számoljuk ki $\langle A - \langle A \rangle \rangle$ -et!

(b) Bizonyítsuk be, hogy $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$!

(c) Bizonyítsuk be, hogy a szórás akkor és csakis akkor nulla, ha a rendszer az operátor sajátállapotában van!

2. Egy kvantumrendszer vizsgált fizikai mennyiségének felejen meg az E önadjungált operátor az E_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) sajátértékekkel, és a megfelelő $|n\rangle$ ortonormált sajátvektorokkal. Mik a mérés lehetséges kimenetelei, mekkora az egyes eredmények valószínűsége, valamint $\langle E \rangle$ és ΔE , ha a rendszer állapotvektora a mérés előtt:

(a) $|\psi_1\rangle = |0\rangle$

(b) $|\psi_2\rangle = |0\rangle - |1\rangle$;

Normáljuk az állapotokat, ha szükséges.

3. Egy rendszer Hamilton-operátora legyen $H = \frac{1}{2}\hbar\omega \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$. A rendszer állapotvektora a $t = 0$ időpillanatban legyen $|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ha egy $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mérést hajtunk végre egy tetszőleges t időpillanatban, milyen értékeket kaphatunk eredményül és milyen valószínűségekkal? Mennyi ekkor a Q fizikai mennyiség várható értéke?

Kvantummechanika 1.

Házi feladatok 7.

Elérhető pontszám: 10p

Beadási határidő: okt. 29.

1. Ugyanaz a feladat, mint az órai 2. feladatban az alábbi (mérés előtti) állapotvektorokra:

(a) $|\psi_3\rangle = |1\rangle$

(b) $|\psi_4\rangle = |1\rangle - 2|2\rangle + 3|3\rangle$

(c) $|\psi_5\rangle = e^{i\theta}|0\rangle + 2e^{i\varphi}|1\rangle$

Itt se feledkezzenek el a normálásról! (3p)

2. Legyen B a kvantumrendszer egy fizikai mennyisége, mely 1, 2, 3 értékeket vehet fel, a megfelelő normált sajátvektorokat jelöljük $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ -mal. A Hamilton-operátor hatása ezekre az állapotvektorokra a következő:

$$H|1\rangle = |1\rangle + i|2\rangle$$

$$H|2\rangle = |2\rangle - i|1\rangle$$

$$H|3\rangle = |3\rangle.$$

Írjuk fel a Schrödinger-egyenlet megoldását energia-sajátállapotok szerint kifejtve.

Egy adott időpillanatban megmérjük B -t és 1-et kapunk eredményül. Ezután t ideig a rendszert nem zavarjuk, majd ismét megmérjük B -t. Mit kaphatunk eredményül és milyen valószínűséggel? Mi B várható értéke ekkor? Van-e olyan időpillanat, amikor biztosan 3-at kapunk eredményül?

Mi lenne a válasz a fenti kérdésekre, ha B kezdeti mérése 2-t adott volna eredményül? (8p)

Kvantummechanika 1.

Feladatok

1. Egy $|\psi\rangle$ állapotban lévő kvantumrendszer esetén tekintsünk egy adott fizikai mennyiséghez tartozó A önadjungált operátort. A fizikai mennyiség várható értéke és szórásnégyzete ebben az állapotban: $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$, illetve $(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle$.

(a) Számoljuk ki $\langle A - \langle A \rangle \rangle$ -et!

(b) Bizonyítsuk be, hogy $(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$!

(c) Bizonyítsuk be, hogy a szórás akkor és csakis akkor nulla, ha a rendszer az operátor sajátállapotában van!

2. Egy kvantumrendszer vizsgált fizikai mennyiségének felejen meg az E önadjungált operátor az E_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) sajátértékekkel, és a megfelelő $|n\rangle$ ortonormált sajátvektorokkal. Mik a mérés lehetséges kimenetelei, mekkora az egyes eredmények valószínűsége, valamint $\langle E \rangle$ és ΔE , ha a rendszer állapotvektora a mérés előtt:

(a) $|\psi_1\rangle = |0\rangle$

(b) $|\psi_2\rangle = |0\rangle - |1\rangle$;

Normáljuk az állapotokat, ha szükséges.

3. Egy rendszer Hamilton-operátora legyen $H = \frac{1}{2}\hbar\omega \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$. A rendszer állapotvektora a $t = 0$ időpillanatban legyen $|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ha egy $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mérést hajtunk végre egy tetszőleges t időpillanatban, milyen értékeket kaphatunk eredményül és milyen valószínűségekkal? Mennyi ekkor a Q fizikai mennyiség várható értéke?

Kvantummechanika 1.

Házi feladatok 7.

Elérhető pontszám: 10p

Beadási határidő: okt. 29.

1. Ugyanaz a feladat, mint az órai 2. feladatban az alábbi (mérés előtti) állapotvektorokra:

(a) $|\psi_3\rangle = |1\rangle$

(b) $|\psi_4\rangle = |1\rangle - 2|2\rangle + 3|3\rangle$

(c) $|\psi_5\rangle = e^{i\theta}|0\rangle + 2e^{i\varphi}|1\rangle$

Itt se feledkezzenek el a normálásról! (3p)

2. Legyen B a kvantumrendszer egy fizikai mennyisége, mely 1, 2, 3 értékeket vehet fel, a megfelelő normált sajátvektorokat jelöljük $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ -mal. A Hamilton-operátor hatása ezekre az állapotvektorokra a következő:

$$H|1\rangle = |1\rangle + i|2\rangle$$

$$H|2\rangle = |2\rangle - i|1\rangle$$

$$H|3\rangle = |3\rangle.$$

Írjuk fel a Schrödinger-egyenlet megoldását energia-sajátállapotok szerint kifejtve.

Egy adott időpillanatban megmérjük B -t és 1-et kapunk eredményül. Ezután t ideig a rendszert nem zavarjuk, majd ismét megmérjük B -t. Mit kaphatunk eredményül és milyen valószínűséggel? Mi B várható értéke ekkor? Van-e olyan időpillanat, amikor biztosan 3-at kapunk eredményül?

Mi lenne a válasz a fenti kérdésekre, ha B kezdeti mérése 2-t adott volna eredményül? (8p)