Kvantummechanika 2. feladatok 2008. II.feladatsor

1. feladat megoldása:

Kvantumos Runge-Lentz vektor:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}\times\mathbf{P} - \mathbf{P}\times\mathbf{L}) + \gamma m\frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{i}{2\hbar}\left[\mathbf{L}^2\mathbf{P}\right] + \gamma m\frac{\mathbf{R}}{R}$$

Felhasználjuk:

(1)Vektor operátorok esetén is igaz $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ mint arról kiírással meggyőződhetünk (csak itt a sorrend is fontos).

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,\mathbf{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\,C_x + (A_zB_x - A_xB_z)\,C_y + (A_xB_y - A_yB_x)\,C_z$$

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = A_x\,(B_yC_z - B_zC_y) + A_y\,(B_zC_x - B_xC_z) + A_z\,(B_xC_y - B_yC_x)$$

(2) $\mathbf{L}$ komponensei forgatásként hatnak egy $\mathbf{V}$ vektoroperátor komponensein: $[L_i, V_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}V_k$

(3) $\mathbf{PL} = (P_xL_x + P_yL_y + P_zL_z) = (L_xP_x + L_yP_y + L_zP_z) = \mathbf{LP}$
és $\mathbf{LP} = (\mathbf{R}\times\mathbf{P})\,\mathbf{P} = \mathbf{R}\,(\mathbf{P}\times\mathbf{P}) = 0$
(4)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\mathbf{L}\times\mathbf{P} - \mathbf{P}\times\mathbf{L})_x &= \frac{1}{2}((L_yP_z - L_zP_y) - (P_yL_z - P_zL_y))\\ &= \frac{1}{2}(L_yP_z - L_zP_y - i\hbar P_x - L_zP_y - i\hbar P_x + L_yP_z)\\ &= L_yP_z - L_zP_y - i\hbar P_x = (\mathbf{L}\times\mathbf{P})_x - i\hbar P_x\end{aligned}$$

Ahol felhasználtuk, hogy
$P_yL_z = [P_yL_z] + L_zP_y = i\hbar P_x + L_zP_y$
$P_zL_y = [P_zL_y] + L_yP_z = -i\hbar P_x + L_yP_z$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\mathbf{L}\times\mathbf{P} - \mathbf{P}\times\mathbf{L})_x &= \frac{1}{2}((L_yP_z - L_zP_y) - (P_yL_z - P_zL_y))\\ &= \frac{1}{2}(i\hbar P_x + P_zL_y + i\hbar P_x - P_yL_z - P_yL_z + P_zL_y)\\ &= i\hbar P_x + P_zL_y - P_yL_z = i\hbar P_x - (\mathbf{P}\times\mathbf{L})_x\end{aligned}$$

Azaz

$$\frac{1}{2}(\mathbf{L}\times\mathbf{P} - \mathbf{P}\times\mathbf{L}) = (\mathbf{L}\times\mathbf{P}) - i\hbar\mathbf{P} = i\hbar\mathbf{P} - (\mathbf{P}\times\mathbf{L})$$

a) $\mathbf{AL} = \mathbf{LA} = 0$

$\mathbf{AL} = \left(\frac{i}{2\hbar}\left[\mathbf{L}^2, \mathbf{P}\right] + \gamma m\frac{\mathbf{R}}{R}\right)\mathbf{L} = \frac{i}{2\hbar}\left(\left[\mathbf{L}^2, \mathbf{PL}\right] - \mathbf{P}\left[\mathbf{L}^2, \mathbf{L}\right]\right) + \gamma m\frac{\mathbf{R}}{R}(\mathbf{R}\times\mathbf{P}) = 0$
A szorzat kommutátorára vonatkozó szabályok alapján:

$\left[\mathbf{L}^2, \mathbf{P}\right]\mathbf{L} = \left[\mathbf{L}^2, \mathbf{PL}\right] - \mathbf{P}\left[\mathbf{L}^2, \mathbf{L}\right]$

Nyilván $\left[\mathbf{L}^2, \mathbf{L}\right] = 0$ és $\mathbf{PL}$ =0 miatt $\left[\mathbf{L}^2, \mathbf{PL}\right] = 0$

És $\frac{\mathbf{R}}{R}(\mathbf{R}\times\mathbf{P}) = \left(\frac{\mathbf{R}}{R}\times\mathbf{R}\right)\mathbf{P}$ =0 mert $\frac{\mathbf{R}}{R}$ és $\mathbf{R}$ fölcserélhetőek

b)

$$\mathbf{A}^2 = 2Hm\left(L^2 + \hbar^2\right) + \gamma^2m^2 \text{ ahol } H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \gamma\frac{1}{R}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= \left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}-\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right)+\gamma m\frac{\mathbf{R}}{R}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}-\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right)^2+\gamma m\frac{1}{2}\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}-\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right)\frac{\mathbf{R}}{R}+\gamma m\frac{\mathbf{R}}{R}\frac{1}{2}\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}-\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right)+\gamma^2m^2 = \\
&= \underbrace{\left(i\hbar\mathbf{P}-\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right)\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}-i\hbar\mathbf{P}\right)}_{1.TAG}+\underbrace{\gamma m\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}-i\hbar\mathbf{P}\right)\frac{\mathbf{R}}{R}+\gamma m\frac{\mathbf{R}}{R}\left(i\hbar\mathbf{P}-\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right)}_{2.TAG}+\gamma^2m^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.TAG &= \gamma m\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}-i\hbar\mathbf{P}\right)\frac{\mathbf{R}}{R}+\gamma m\frac{\mathbf{R}}{R}\left(i\hbar\mathbf{P}-\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right) = \\
&= \gamma m\left\{\mathbf{L}\left(\mathbf{P}\times\frac{\mathbf{R}}{R}\right)-i\hbar\mathbf{P}\frac{\mathbf{R}}{R}+i\hbar\frac{\mathbf{R}}{R}\mathbf{P}-\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\times\mathbf{P}\right)\mathbf{L}\right\} \\
&= \gamma m\left\{\mathbf{L}\left(\mathbf{P}\times\mathbf{R}\right)\frac{1}{R}-i\hbar\left(\left[\mathbf{P},\frac{\mathbf{R}}{R}\right]+\frac{\mathbf{R}}{R}\mathbf{P}\right)+i\hbar\frac{\mathbf{R}}{R}\mathbf{P}-\frac{1}{R}\left(\mathbf{R}\times\mathbf{P}\right)\mathbf{L}\right\} \\
&= \gamma m\left\{\mathbf{L}\left(-\mathbf{L}\right)\frac{1}{R}-i\hbar\left(-i\hbar\frac{2}{R}+\frac{\mathbf{R}}{R}\mathbf{P}\right)+i\hbar\frac{\mathbf{R}}{R}\mathbf{P}-\frac{1}{R}\mathbf{L}\mathbf{L}\right\} \\
&= \gamma m\left\{-\mathbf{L}^2\frac{1}{R}-i\hbar\left(-i\hbar\frac{2}{R}\right)-i\hbar\frac{\mathbf{R}}{R}\mathbf{P}+i\hbar\frac{\mathbf{R}}{R}\mathbf{P}-\frac{1}{R}\mathbf{L}^2\right\} \\
&= -2\gamma m\left(\mathbf{L}^2\frac{1}{R}+\hbar^2\frac{1}{R}\right) = -2\gamma m\frac{1}{R}\left(\mathbf{L}^2+\hbar^2\right)
\end{aligned}
$$

Ahol fölhasználtuk az alábbi kommutátort:

$$
\begin{aligned}
\left[\mathbf{P},\frac{\mathbf{R}}{R}\right] &= \left[P_x,\frac{X}{R}\right]+\left[P_y,\frac{Y}{R}\right]+\left[P_z,\frac{Z}{R}\right] \\
&= -i\hbar\left(\partial_x\frac{X}{R}+\partial_y\frac{Y}{R}+\partial_z\frac{Z}{R}\right) \\
&= -i\hbar\left(\frac{1}{R}-\frac{X^2}{R^3}+\frac{1}{R}-\frac{Y^2}{R^3}+\frac{1}{R}-\frac{Z^2}{R^3}\right) \\
&= -i\hbar\left(\frac{3}{R}-\frac{R^2}{R^3}\right) = -i\hbar\frac{2}{R}
\end{aligned}
$$

és azt hogy az $\mathbf{L}$ minden komponense fölcserélhető $\frac{1}{R}$ rel

$$
\begin{aligned}
1.TAG &= \left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}-i\hbar\mathbf{P}\right)\left(i\hbar\mathbf{P}-\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right) \\
&= \hbar^2\mathbf{P}^2+i\hbar\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}\right)\mathbf{P}+i\hbar\mathbf{P}\left(\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right)+\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right) \\
&= \hbar^2\mathbf{P}^2+i\hbar\mathbf{L}\left(\mathbf{P}\times\mathbf{P}\right)+i\hbar\left(\mathbf{P}\times\mathbf{P}\right)\mathbf{L}+\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right) \\
&= \hbar^2\mathbf{P}^2+0+0-\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right)
\end{aligned}
$$

Innentől célunk, hogy belássuk: $-\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}\right)\left(\mathbf{P}\times\mathbf{L}\right)=\mathbf{P}^2\mathbf{L}^2$

Tudjuk, hogy $0=\left(\mathbf{PL}\right)^2=\left(P_xL_x+P_yL_y+P_zL_z\right)^2=\left(P_xL_x\right)^2+cpm+P_xL_xP_yL_y+P_xL_xP_zL_z+cpm$
(Megjegyzés: cpm=cikikus permutáltak)
Felhasználva, hogy P_i és L_i fölcserélhető:

$$
P_x^2L_x^2+P_y^2L_y^2+P_z^2L_z^2=-\left(P_xL_xP_yL_y+P_xL_xP_zL_z+\boxed{P_yL_yP_zL_z}+P_yL_yP_xL_x+P_zL_zP_xL_x+\boxed{P_zL_zP_yL_y}\right)
$$

Így

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{L}\times\mathbf{P})(\mathbf{P}\times\mathbf{L}) &= (L_yP_z - L_zP_y)(P_yL_z - P_zL_y) + cpm\\
&= \boxed{L_yP_zP_yL_z} - L_yP_zP_zL_y - L_zP_yP_yL_z + \boxed{L_zP_yP_zL_y} + cpm\\
&= -\left(P_x^2L_x^2 + P_y^2L_y^2 + P_z^2L_z^2\right) - L_yP_zP_zL_y - L_zP_yP_yL_z + cpm
\end{aligned}
$$

az utolsó sorban szereplő $L_yP_zP_zL_y$ és $L_zP_yP_yL_z$ a következő módon alakítható át:

$$
\begin{aligned}
L_yP_zP_zL_y &= ([L_yP_z] + P_zL_y)P_zL_y = i\hbar P_xP_zL_y + P_zL_yP_zL_y\\
&= i\hbar P_xP_zL_y + P_z([L_yP_z] + P_zL_y)L_y = \underline{i\hbar P_xP_zL_y + i\hbar P_zP_xL_y} + P_z^2L_y^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_zP_yP_yL_z &= ([L_zP_y] + P_yL_z)P_yL_z = -i\hbar P_xP_yL_z + P_yL_zP_yL_z\\
&= -i\hbar P_xP_yL_z + P_y([L_zP_y] + P_yL_z)L_z = \underline{-i\hbar P_xP_yL_z - i\hbar P_yP_xL_z} + P_y^2L_z^2
\end{aligned}
$$

Az aláhúzottak és ciklikus permutáltjaik nem adnak járulékot. Ez explicit kiírással bizonyítható, vagy észrevesszük, hogy

$$
\begin{aligned}
\underline{\qquad\qquad} + cpm &= i\hbar P_x(P_zL_y - P_yL_z) + i\hbar P_x(P_zL_y - P_yL_z) + cpm\\
&= -2i\hbar\mathbf{P}(\mathbf{P}\times\mathbf{L}) = -2i\hbar(\mathbf{P}\times\mathbf{P})\mathbf{L} = 0
\end{aligned}
$$

Tehát

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{L}\times\mathbf{P})(\mathbf{P}\times\mathbf{L}) &= -\left(P_x^2L_x^2 + P_y^2L_y^2 + P_z^2L_z^2\right) - P_z^2L_y^2 - P_y^2L_z^2 + cpm\\
&= -\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right)\left(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2\right) = -\mathbf{P}^2\mathbf{L}^2
\end{aligned}
$$

És így

$$
1.TAG = \hbar^2\mathbf{P}^2 - (\mathbf{L}\times\mathbf{P})(\mathbf{P}\times\mathbf{L}) = \mathbf{P}^2\left(\mathbf{L}^2 + \hbar^2\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= \mathbf{P}^2\left(\mathbf{L}^2 + \hbar^2\right) - 2\gamma m\frac{1}{R}\left(\mathbf{L}^2 + \hbar^2\right) + +\gamma^2m^2 =\\
&= 2m\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \gamma\frac{1}{R}\right)\left(\mathbf{L}^2 + \hbar^2\right) + \gamma^2m^2\\
&= 2mH\left(\mathbf{L}^2 + \hbar^2\right) + \gamma^2m^2
\end{aligned}
$$

c) $[U_i, U_j] = ?$, ahol

$$
\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{-2mH}}\mathbf{A}
$$

A d) kérdést megtanulmányozva már sejthetjük, hogy $[U_i, U_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$ kell, hogy legyen.

$$
[A_x, A_y] = \left[i\hbar P_x - (\mathbf{P}\times\mathbf{L})_x + \gamma m\frac{X}{R}, i\hbar P_y - (\mathbf{P}\times\mathbf{L})_y + \gamma m\frac{Y}{R}\right]
$$

Ez a következő 9 tagot jelenti:

$$
\begin{aligned}
-\hbar^2 \left[P_x P_y\right] &= 0 \\
-i\hbar \left[P_x, (\mathbf{P}\times\mathbf{L})_y\right] &= 1.TÍPUS \\
-i\hbar \left[(\mathbf{P}\times\mathbf{L})_x, P_y\right] &= 1.TÍPUS \\
i\hbar\gamma m \left[P_x, \frac{Y}{R}\right] &= -\hbar^2\gamma m \frac{YX}{R^3} \\
i\hbar\gamma m \left[\frac{X}{R}, P_y\right] &= \hbar^2\gamma m \frac{YX}{R^3} \\
\left[(\mathbf{P}\times\mathbf{L})_x, (\mathbf{P}\times\mathbf{L})_y\right] &= 2.TÍPUS \\
-\gamma m \left[(\mathbf{P}\times\mathbf{L})_x, \frac{Y}{R}\right] &= 3.TÍPUS \\
-\gamma m \left[\frac{X}{R}, (\mathbf{P}\times\mathbf{L})_y\right] &= 3.TÍPUS \\
\gamma^2 m^2 \left[\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}\right] &= 0
\end{aligned}
$$

1.TÍPUS:

$$
\begin{aligned}
-i\hbar \left[P_x, (\mathbf{P}\times\mathbf{L})_y\right] &= -i\hbar \left[P_x, P_z L_x - P_x L_z\right] \\
&= -i\hbar \left\{P_z \left[P_x, L_x\right] + \left[P_x, P_z\right] L_x - P_x \left[P_x, L_z\right] - \left[P_x, P_x\right] L_z\right\} \\
&= -i\hbar \left\{0 + 0 + i\hbar P_x P_y + 0\right\} = \hbar^2 P_x P_y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-i\hbar \left[(\mathbf{P}\times\mathbf{L})_x, P_y,\right] &= -i\hbar \left[P_y L_z - P_z L_y, P_y\right] \\
&= -i\hbar \left\{P_y \left[L_z, P_y\right] + \left[P_y, P_y\right] L_z - P_z \left[L_y, P_y\right] - \left[P_z, P_y\right] L_y\right\} \\
&= -i\hbar \left\{-i\hbar P_y P_x + 0 + 0 + 0\right\} = -\hbar^2 P_y P_x
\end{aligned}
$$

Így az 1.Típusú tagok kiejtik egymást.

2.TÍPUS: ehhez kell, hogy

$$
\left[AB, CD\right] = A\left[B, C\right] D + AC\left[B, D\right] + C\left[A, D\right] B + \left[A, C\right] DB
$$

$$
\left[(\mathbf{P}\times\mathbf{L})_x, (\mathbf{P}\times\mathbf{L})_y\right] = \left[P_y L_z - P_z L_y, P_z L_x - P_x L_z\right]
$$

$$
\begin{aligned}
\left[P_y L_z, P_z L_x\right] &= P_y P_z \left[L_z, L_x\right] + \left[P_y, P_z\right] L_x L_z + P_y \left[L_z, P_z\right] L_x + P_z \left[P_y, L_x\right] L_z \\
&= i\hbar P_y P_z L_y + 0 + 0 - \underline{i\hbar P_z^2 L_z} \\
-\left[P_y L_z, P_x L_z\right] &= -P_y P_x \left[L_z, L_z\right] - \left[P_y, P_x\right] L_z L_z - P_y \left[L_z, P_x\right] L_z - P_x \left[P_y, L_z\right] L_z \\
&= 0 + 0 - \underline{i\hbar P_y^2 L_z} - \underline{i\hbar P_x^2 L} \\
-\left[P_z L_y, P_z L_x\right] &= -P_z P_z \left[L_y, L_x\right] - \left[P_z, P_z\right] L_x L_y - P_z \left[L_y, P_z\right] L_x - P_z \left[P_z, L_x\right] L_y \\
&= i\hbar P_z^2 L_z + 0 - i\hbar P_z P_x L_x - i\hbar P_z P_y L_y \\
\left[P_z L_y, P_x L_z\right] &= P_z P_x \left[L_y, L_z\right] + \left[P_z, P_x\right] L_z L_y + P_z \left[L_y, P_x\right] L_z + P_x \left[P_z, L_z\right] L_y \\
&= i\hbar P_z P_x L_x + 0 - i\hbar P_z^2 L_z + 0
\end{aligned}
$$

Tehát

$$\left[(\mathbf{P}\times\mathbf{L})_x,(\mathbf{P}\times\mathbf{L})_y\right]=-i\hbar\mathbf{P}^2L_z \text{ (csak az aláhúzottak maradnak meg)}$$

3.TÍPUS:

$$\begin{aligned}
-\gamma m\left[(\mathbf{P}\times\mathbf{L})_x,\frac{Y}{R}\right] &= -\gamma m\left[P_yL_z-P_zL_y,\frac{Y}{R}\right]\\
&= -\gamma m\left\{P_y\left[L_z,\frac{Y}{R}\right]+\left[P_y,\frac{Y}{R}\right]L_z-P_z\left[L_y,\frac{Y}{R}\right]-\left[P_z,\frac{Y}{R}\right]L_y\right\}\\
&= -\gamma m\left\{-i\hbar P_y\frac{X}{R}-i\hbar\left(\frac{1}{R}-\frac{Y^2}{R^3}\right)L_z+0+i\hbar\left(-\frac{YZ}{R^3}\right)L_y\right\}\\
&= i\hbar\gamma m\left\{P_y\frac{X}{R}+\left(\frac{1}{R}-\frac{Y^2}{R^3}\right)L_z+\frac{YZ}{R^3}L_y\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\gamma m\left[\frac{X}{R},(\mathbf{P}\times\mathbf{L})_y\right] &= -\gamma m\left[\frac{X}{R},P_zL_x-P_xL_z\right]\\
&= -\gamma m\left\{P_z\left[\frac{X}{R},L_x\right]+\left[\frac{X}{R},P_z\right]L_x-P_x\left[\frac{X}{R},L_z\right]-\left[\frac{X}{R},P_x\right]L_z\right\}\\
&= -\gamma m\left\{0-i\hbar\frac{XZ}{R^3}L_x+i\hbar P_x\frac{Y}{R}-i\hbar\left(\frac{1}{R}-\frac{X^2}{R^3}\right)L_z\right\}\\
&= i\hbar\gamma m\left\{\frac{XZ}{R^3}L_x-P_x\frac{Y}{R}+\left(\frac{1}{R}-\frac{X^2}{R^3}\right)L_z\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{O}SSZEG\ddot{U}K &= i\hbar\gamma m\left\{\boxed{P_y\tfrac{X}{R}-P_x\tfrac{Y}{R}}+2\frac{L_z}{R}-\left(\frac{X^2}{R^3}+\frac{Y^2}{R^3}\right)L_z+\frac{YZ}{R^3}L_y+\frac{XZ}{R^3}L_x\right\}\\
&= i\hbar\gamma m\left\{2\frac{L_z}{R}+\underbrace{\boxed{\tfrac{L_z}{R}}-\left(\frac{X^2}{R^3}+\frac{Y^2}{R^3}\right)L_z+\frac{YZ}{R^3}L_y+\frac{XZ}{R^3}L_x}_{MARAD\acute{E}K}\right\}\\
&= i\hbar\gamma 2m\frac{L_z}{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MARAD\acute{E}K &= \frac{L_z}{R}-\left(\frac{X^2}{R^3}+\frac{Y^2}{R^3}\right)L_z+\frac{YZ}{R^3}L_y+\frac{XZ}{R^3}L_x\\
&= \frac{\left(X^2+Y^2+Z^2\right)}{R^3}L_z-\left(\frac{X^2}{R^3}+\frac{Y^2}{R^3}\right)L_z+\frac{YZ}{R^3}L_y+\frac{XZ}{R^3}L_x\\
&= \frac{Z^2}{R^3}L_z+\frac{YZ}{R^3}L_y+\frac{XZ}{R^3}L_x=\frac{Z}{R^3}\left(ZL_z+YL_y+XL_x\right)\\
&= \frac{Z}{R^3}\mathbf{RL}=\frac{Z}{R^3}\mathbf{R}\left(\mathbf{R}\times\mathbf{P}\right)=\frac{Z}{R^3}\left(\mathbf{R}\times\mathbf{R}\right)\mathbf{P}=0
\end{aligned}$$

Tehát végül:

$$\begin{aligned}
\left[A_x,A_y\right] &= -i\hbar\mathbf{P}^2L_z+i\hbar\gamma 2m\frac{L_z}{R}\\
&= -i\hbar 2m\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2m}-\gamma\frac{1}{R}\right)L_z=i\hbar\left(-2mH\right)L_z
\end{aligned}$$

Azaz

$$[U_i, U_j] = \left[\frac{1}{\sqrt{-2mH}}A_i, \frac{1}{\sqrt{-2mH}}A_j\right] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

d) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{J}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$ *és* $\mathbf{J}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{U})$ két független, de azonos "hosszúságú" impulzusnyomaték

(1) azonos "hosszúságú": Az a) pont alapján $\mathbf{LU} = \mathbf{UL} = 0$, így

$$\mathbf{J}_{1,2}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{L} \pm \mathbf{U})^2 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 \pm \mathbf{LU} \pm \mathbf{UL} + \mathbf{U}^2\right) = \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 + \mathbf{U}^2\right)$$

(2) impulzusnyomaték: azaz komponensei tudják a megfelelő fölcserélési relációkat. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k \qquad [L_i, U_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}U_k \qquad [U_i, U_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$$

$$\begin{aligned}
[J_{1,2i}, J_{1,2j}] &= \frac{1}{4}\left[(L_i \pm U_i), (L_j \pm U_j)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left([L_i, L_j] \pm [U_i, L_j] \pm [L_i, U_j] + [U_i, U_j]\right) \\
&= \frac{1}{4}i\hbar\epsilon_{ijk}(L_k \pm U_k \pm U_k + L_k) \\
&= i\hbar\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}(L_k \pm U_k) = i\hbar\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}J_{1,2k}
\end{aligned}$$

(3) függetlenek: azaz egymással fölcserélhetőek a komponenseik:

$$\begin{aligned}
[J_{1i}, J_{2j}] &= \frac{1}{4}\left[(L_i + U_i), (L_j - U_j)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left([L_i, L_j] + [U_i, L_j] - [L_i, U_j] - [U_i, U_j]\right) \\
&= \frac{1}{4}i\hbar\epsilon_{ijk}(L_k + U_k - U_k - L_k) = 0
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_1^2 = \mathbf{J}_2^2 &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 + \mathbf{U}^2\right) = \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 + \frac{1}{-2mH}\mathbf{A}^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbf{L}^2 + \frac{2Hm\left(\mathbf{L}^2 + \hbar^2\right) + \gamma^2 m^2}{-2mH}\right) = \frac{1}{4}\left(-\hbar^2 - \frac{\gamma^2 m}{2H}\right)
\end{aligned}$$

A sajátértékekre ez a következőt jelenti:Mint tudjuk $\mathbf{J}_1^2$ sajátértéke $\hbar^2 j_1(j_1+1)$ és hasonlóan, $\mathbf{J}_2^2$ sajátértéke $\hbar^2 j_2(j_2+1)$. Így

$$\hbar^2 j(j+1) = \frac{1}{4}\left(-\hbar^2 - \frac{\gamma^2 m}{2E}\right)$$

ahol $j_1 = j_2 = j(= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots)$ És ebből adódik, hogy

$$\hbar^2\underbrace{\left(4j^2 + 4j + 1\right)}_{(2j+1)^2} = -\frac{\gamma^2 m}{2E}$$

Bevezetve a $(2j+1) = n\,(\in \mathbb{Z}^+)$ jelölést, és E-re átrendezve:

$$E_n = -\frac{\gamma^2 m}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

Ami megegyezik a más módon kapott értékkel.

f) Korábbról tudjuk, hogy H,.$\mathbf{L}^2$ és L_z fölcserélhetőek, így egy állapot a következő módon "cimkézhető" $|n, l, m_l\rangle$. És ilyenkor egy adott n-hez $l = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$ féle l kvantumszám tartozik, és minden egyes l még $2l+1$ szeresen degenerált $(m_l = -l, \cdots, -1, 0, 1, \cdots l)$ Így az n-től függő energia $\sum_{l=0}^{n-1} 2l+1 = 1+2+\cdots+(2n-1) = (2n-1+1)\frac{n}{2} = n^2$ szeresen degenerált.

Ebben az esetben a felcserélhető operátorok: H,.$\mathbf{J}_1^2$ és $\mathbf{J}_2^2$.

$$\begin{aligned} H\,|n, j_1, j_2\rangle &= E_n\,|n, j_1, j_2\rangle \\ \mathbf{J}_1^2\,|n, j_1, j_2\rangle &= \hbar^2 j_1\,(j_1+1)\,|n, j_1, j_2\rangle \\ \mathbf{J}_2^2\,|n, j_1, j_2\rangle &= \hbar^2 j_2\,(j_2+1)\,|n, j_1, j_2\rangle \end{aligned}$$

n-et kétféleképp is megkaphatjuk, $(2j_1+1) = (2j_2+1) = n$, azaz minden egyes j_1 -ez és j_2 -höz tartozik egy n és azt is tudjuk az impulzusmomentum álltalános elméletéből, hogy egy adott j, $(2j+1)$ szeresen degenerált. Mivel j_1 és j_2 függetlenek ez összesen $(2j_1+1)(2j_2+1)$ szeres degenerációt jelent, ami éppen n^2-tel egyenlő.