Bevezetés

A mechanika történetében három nagy periódus különíthető el. Az első, átfogó kvalitatív vizsgálatokat jelentő hosszú periódus Kepler és Galilei munkásságával zárul. A második ún. kvantitatív periódus Newton Principia Mathematica Phylosophiae Naturalis (1687) című művének megjelenésétől 1889-ig tartott, amikor Poincare rámutatott arra, hogy a Laplace-féle hatványsoros módszer divergál, jóllehet 1887-ben Bruns megmutatta, hogy a hatványsoros módszeren kívül nincs olyan kvantitatív módszer, amellyel az n-test probléma $(n \geq 3)$ megoldható. Ugyanekkor kezdődött a harmadik, ún. neokvalitatív periódus, mégpedig Poincare globális geometriai módszerével. Ennek alapja a rendszer fázisterének geometriai-topológiai jellemzése. Ezzel a módszerrel Poincare, Birkhoff, Kolmogorov, Arnold...kimutatták, hogy a három-test problémában vannak periodikus megoldások (nincs analitikus megoldás a számítógépes pályák pedig nem bizonyítanak). Ebben a kurzusban a második periódussal ismerkedünk meg.

1. Newtoni posztulátumok és értelmezésük

1.1. Mértékegységek

Méter: annak az útnak a hossza, melyet a fény vákuumban $\frac{1}{299\ 792\ 458}$ másodperc alatt tesz meg.

Másodperc: a 133-as tömegszámú, alapállapotú céziumatom két hiperfinom energiaszintje közti átmenetnek megfelelő sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartama.

Kilogramm: a Sévres-ben őrzött platina-iridium henger tömege.
Tervbe van véve a kilogramm alábbi meghatározása: a kilogramm a tömeg egysége, amellyel a Planck-állandó pontosan $6{,}626\ 069\ 3 \times 10^{-34}$ joule másodperc.

1.2. Posztulátumok

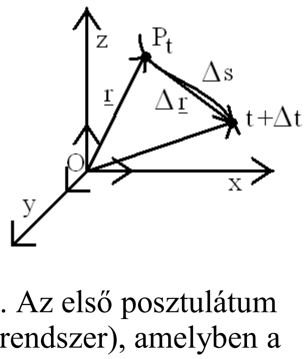
Newton – Principia Mathematica Phylosophiae Naturalis (1687):

1. Minden test megtartja nyugalmi állapotát, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, míg valamilyen külső hatás ennek megváltoztatására nem kényszeríti.

2. A mozgásmennyiség változása arányos az erő hatásával és az erő hatásának irányában történik

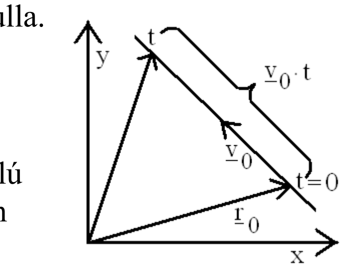
3. A hatás egyenlő az ellenhatással, vagyis két test hatása egymásra egyenlő és iránya ellentétes

1.3. A posztulátumok értelmezése

1. Az **első posztulátum**hoz értelmezni kell a mozgást. A mozgás a helyzet változása az időben. A helyzetmegadáshoz a teret és az időt kell értelmezni (és mérni). A klasszikus nemrelativisztikus mechanikában a tér háromdimenziós euklideszi tér, az idő a tértől függetlenül mért skalár. A háromdimenziós euklideszi térben a vonatkoztatási rendszer legegyszerűbb megadási módja a Descartes-féle derékszögű koordináta rendszer, amelyben a helyzetet három derékszögű koordinátával (x, y, z) adjuk meg. A koordinátarendszert az origóval és a bázisvektorokkal, a helyvektort pedig a kifejtésével adjuk meg:
   $O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \Rightarrow \vec{r}=x\cdot\hat{e}_1+y\cdot\hat{e}_2+z\cdot\hat{e}_3$
   A mozgást a helyvektor időbeli változásával írjuk le: $t \rightarrow \vec{r}=\vec{r}(t)$, amely nem más, mint a hely ismerete az idő függvényében $(x(t), y(t), z(t))$.
   A mozgások fontos jellemzője a sebesség, amely a helyvektor idõderiváltja. Ha $\Delta\vec{r}$ az elmozdulás Δt idő alatt, akkor a sebességet a következő határértékkel definiáljuk:
   $$\Delta\vec{r};\ \Delta t: \lim\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{v}$$
   $$v=\lim\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$
   $$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{x}\cdot\hat{e}_1+\dot{y}\cdot\hat{e}_2+\dot{z}\cdot\hat{e}_3$$
   

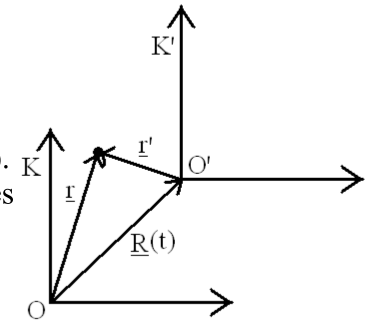
   Az $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0\cdot t$ mozgást egyenes vonalú egyenletes mozgásnak nevezzük, ha $\vec{r}_0$ és $\vec{v}_0$ állandó. A magára hagyott test ilyen mozgást végez, pontosabban van olyan vonatkoztatási rendszer (koordináta rendszer), amelyben a magtára hagyott test így mozog. Az első posztulátum jelentése éppen ez: van olyan vonatkoztatási rendszer (koordináta rendszer), amelyben a

magára hagyott test ilyen (egyenes vonalú egyenletes) mozgást végez. (Nem megfelelő vonatkoztatási rendszerből nézve a magára hagyott test mozgása nagyon bonyolultnak látszódhat.)
A sebesség idõderiváltját gyorsulásnak nevezzük: $\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}=\ddot{x}\cdot\hat{e}_1+\ddot{y}\cdot\hat{e}_2+\ddot{z}\cdot\hat{e}_3$.
Tétel: az inerciarendszerben a magára hagyott test gyorsulása nulla.



$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0\cdot t$
$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\vec{v}_0$
$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}=0$

Fordítva: ha egy test gyorsulása nulla, akkor a test egyenes vonalú egyenletes mozgást végez (vagy ha $v_0=0$, akkor nyugalomban van).
A gyorsulás idõderiváltjára azaz a helyvektor másodiknál magasabb rendű idõderiváltjaira nem lesz szükségünk, mert a második posztulátum értelmezése szerint a gyorsulást a test helyzete és sebessége egy adott t időben egyértelműen meghatározza. Ez a newtoni determináltság elve (lásd: lentebb).
Már Galilei megfogalmazta, hogy az egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerek a mechanika szempontjából egyenértékűek.



Tegyük fel, hogy K' állandó $\vec{V}$ sebességgel mozog K-hoz képest:

$(t=0$-ban $O=O')$

$$\vec{R}=\vec{V}\cdot t \qquad \dot{\vec{R}}=\vec{V}\,;\ \dot{\vec{V}}=0$$
$$\vec{r}=\vec{r}\,'+\vec{R}$$
$$\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}\,'+\vec{V}$$
$$\ddot{\vec{r}}=\ddot{\vec{r}}\,' \qquad \boxed{\vec{a}=\vec{a}\,'}$$

Ha K inerciarendszer, akkor K' is inerciarendszer $\Rightarrow$ ha van inerciarendszer, akkor végtelen sok inerciarendszer van.

2. A **második posztulátum** értelmezése:
Mozgásmennyiség: $\vec{p}=m\cdot\vec{v}$ (impulzus, lendület)
Értelmezés: $\Delta\vec{p}\propto$ erőhatás: $\Delta\vec{p}=\vec{F}\cdot\Delta t$
Matematikai: <u>newtoni determináltság elve:</u> a test helyzete és sebessége minden időben meghatározza a test gyorsulását.

$$t,\underbrace{\vec{r},\vec{v}}_{6\,adat}\rightarrow\vec{a}=\vec{a}(\vec{r},\vec{v},t); \qquad \vec{a}=\frac{1}{m}\cdot\underbrace{\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)}_{erő}$$

$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}} \qquad m\cdot\vec{a}=\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$$
$$m\cdot\dot{\vec{v}}=\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$$
$$\dot{\vec{p}}=\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$$

$$\ddot{\vec{r}}=\frac{1}{m}\cdot\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\ddot{x}&=\frac{1}{m}\cdot F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\\ \ddot{y}&=\frac{1}{m}\cdot F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\\ \ddot{z}&=\frac{1}{m}\cdot F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\end{aligned}}$$

Hatodrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer (ODE)

3. A **harmadik posztulátum** értelmezése:
   $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$ (hatás-ellenhatás, akció-reakció) következménye (jelentése)
   Zárt rendszer impulzusa állandó (az impulzusmegmaradás törvénye):
   $m_1\cdot\vec{v}_1+m_2\cdot\vec{v}_2=\acute{a}lland\acute{o}$
   $\vec{p}_1+\vec{p}_2=\acute{a}lland\acute{o}$
   $\vec{p}=m\cdot\vec{v}$

   Mozgásegyenlet: (a posztulátumok következménye) m tömegpont mozgása $(\vec{r}(t))$ kielégíti az $\boxed{\ddot{\vec{r}}=\frac{1}{m}\cdot\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)}$ hatodrendű differenciálegyenletet rendszert (ún. mozgásegyenletet)

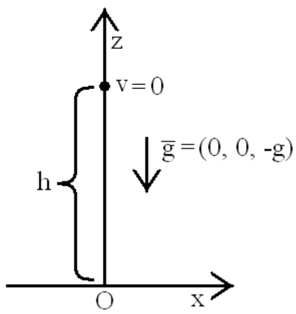
1.4. Példák

1. **Magára hagyott test:** $\vec{F}=0 \;\Rightarrow\; \vec{a}=\ddot{\vec{r}}=0$
   $\ddot{x}=0 \;\Rightarrow\; \dot{x}=a \;\Rightarrow\; x=a\cdot t+b$
   $\ddot{y}=0 \;\Rightarrow\; \dot{y}=a' \;\Rightarrow\; x=a'\cdot t+b'$ 6 db konstans
   $\ddot{z}=0 \;\Rightarrow\; \dot{z}=a'' \;\Rightarrow\; x=a''\cdot t+b''$
   Az integrációs konstansok jelentése: $t=0$-ban a hely (3 adat) és a sebesség (3 adat):
   $x_0=b;\quad y_0=b';\quad z_0=b''$
   $\dot{x}_0=v_{x0}=a;\quad \dot{y}_0=v_{y0}=a';\quad \dot{z}_0=v_{z0}=a'';$
   A 6 db integrációs konstans értékét a kezdeti helyzet és a kezdősebesség rögzíti.
   A magára hagyott test $(\vec{F}=0)$ egyenes vonalú egyenletes mozgást végez:
   Vektori alakban: $\vec{r}=\vec{v}_0\cdot t+\vec{r}_0$

2. **Mozgás homogén nehézségi erőtérben:**
   Homogén nehézségi erőtér: $\vec{g}=\acute{a}lland\acute{o}$ nehézségi gyorsulás
   $\ddot{\vec{r}}=\vec{a}=\vec{g}$ a mozgásegyenlet
   $\dot{\vec{r}}=\vec{v}=\vec{g}\cdot t+\vec{v}_0$
   $\vec{r}=\frac{1}{2}\cdot\vec{g}\cdot t^2+\vec{v}_0\cdot t+\vec{r}_0 \quad\leftarrow\quad t=0$-ban $\vec{r}=\vec{r}_0;\; \vec{v}=\vec{v}_0$
   A mozgás pályája: síkgörbe; parabola. (Házi feladat!)
   $\underbrace{(\vec{r}_{0,}\vec{v}_0)}_{\substack{kezdeti\ \acute{a}llapot\\ t=0}} \quad\rightarrow\quad \underbrace{(\vec{r},\vec{v})}_{t\ id\H{o}beli\ \acute{a}llapot}$

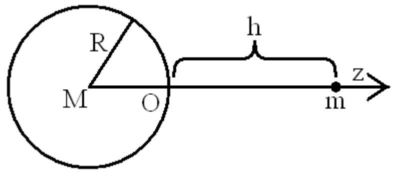
3. **Szabadesés:** $t=0$-ban:
   $z=h;\; x=0;\; y=0$
   $\dot{z}=0;\; \dot{x}=0;\; \dot{y}=0$

   $\vec{r}_0=(0{,}0,h)$
   $\vec{v}_0=(0{,}0{,}0)$
   $\vec{g}=(0{,}0,-g)$
   A kezdeti feltételekhez tartozó megoldás:
   $x=0$
   $y=0$
   $z=h-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$



4. **Esés nagy magasságból:**

$$F_{grav}=G\cdot\frac{m\cdot M}{(R+h)^2}$$



A mozgásegyenlet: $\ddot{z}=-G\cdot\frac{M}{(R+z)^2}$

A kezdeti feltételek: $t=0:\ z=h;\ \dot{z}=0$

A kezdeti feltételeknek megfelelő megoldás: $z(t)=?$

5. **Mozgás súrlódó közegben:**

a) Stokes-féle: $-k\cdot\vec{v}\ \rightarrow\ \vec{r}(t)=\vec{r}_0+\frac{\vec{v}_0}{2\cdot\kappa}\cdot\left(1-e^{-2\cdot\kappa\cdot t}\right)$

Mozgásegyenlet: $m\cdot\ddot{\vec{r}}=-k\cdot\vec{v}=-k\cdot\dot{\vec{r}}$

Kezdeti feltételek: $t=0:\ \vec{r}=\vec{r}_0$ és $\vec{v}=\vec{v}_0$

$\boxed{m\cdot\dot{\vec{v}}=-k\cdot\vec{v}}\quad(\vec{v}=\dot{\vec{r}})$

$$m\cdot\dot{v}_x=-k\cdot v_x;\quad \frac{k}{m}:=2\cdot\kappa$$

$$\frac{d}{dt}(\ln v_x)=\frac{\dot{v}_x}{v_x}=-2\cdot\kappa$$

$$\ln v_x=-2\cdot\kappa\cdot t+\ln v_{x0}$$

$$\ln v_x-\ln v_{x0}=-2\cdot\kappa\cdot t$$

$$\ln\frac{v_x}{v_{x0}}=-2\cdot\kappa\cdot t$$

$$\frac{v_x}{v_{x0}}=e^{-2\cdot\kappa\cdot t}\quad\Rightarrow\quad \dot{x}=v_x=v_{x0}\cdot e^{-2\cdot\kappa\cdot t}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{v_{x0}}{-2\cdot\kappa}\cdot e^{-2\cdot\kappa\cdot t}+\alpha$$

$t=0$-ra: $x_0=\frac{v_{x0}}{-2\cdot\kappa}+\alpha\quad\Rightarrow\quad \alpha=x_0-\frac{v_{x0}}{-2\cdot\kappa}$

$$x=\frac{v_{x0}}{-2\cdot\kappa}\cdot e^{-2\cdot\kappa\cdot t}+x_0-\frac{v_{x0}}{-2\cdot\kappa}=x_0+\frac{v_{x0}}{2\cdot\kappa}\cdot\left(1-e^{-2\cdot\kappa\cdot t}\right)$$

6. **Kvázielasztikus erőtér:** (harmonikus erő)

Van erőcentrum; az erő arányos és ellentétes a kitéréssel (az origó legyen az erőcentrumban)

$$\vec{F}=-D\cdot\vec{r}$$

$$m\cdot\ddot{\vec{r}}=-D\cdot\vec{r}$$

$$\frac{D}{m}:=\omega^2$$

$$\ddot{x}=-\omega^2\cdot x\quad\Rightarrow\quad x=a\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha);$$

$t=0$-ban: $\boxed{x_0=a\cdot\cos(\alpha)}$ (1) és $\dot{x}=\boxed{v_{x0}=-a\cdot\omega\cdot\sin(\alpha)}$ (2)

$$\ddot{y}=-\omega^2\cdot y$$

$$\ddot{z}=-\omega^2\cdot z$$

$$\underbrace{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2}_{\cos^2(\alpha)}+\underbrace{\left(\frac{v_{x0}}{a\cdot\omega}\right)^2}_{\sin^2(\alpha)}=1\quad\Rightarrow\quad a=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_{x0}}{\omega}\right)^2}$$

$$\frac{v_{x0}}{x_0}=-\frac{a\cdot\omega\cdot\sin(\alpha)}{a\cdot\cos(\alpha)}=-\omega\cdot tg(\alpha)\quad\Rightarrow\quad tg(\alpha)=-\frac{v_{x0}}{\omega\cdot x_0}$$

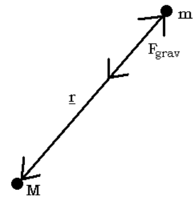
Csillapított rezgés:

$m\cdot\ddot{\vec{r}}=-D\cdot\vec{r}-k\cdot\vec{v}=-D\cdot\vec{r}-k\cdot\dot{\vec{r}}$

Gerjesztett (kényszer)rezgés:

$m\cdot\ddot{x}=-D\cdot x-k\cdot\dot{x}+F_0\cdot\cos(\gamma\cdot t)$ $\quad$ (γ gerjesztő frekvencia)

7. **Kepler probléma; kéttestprobléma:**



$F_{grav}=G\cdot\dfrac{m\cdot M}{r^2}$; ahol r az m és M távolsága.

Feltéve, hogy M az origóban nyugszik: $m\cdot\ddot{\vec{r}}=-G\cdot\dfrac{m\cdot M}{r^2}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}$

8. m tömegű és q töltésű részecske $(\vec{E},\vec{B})$ elektromágneses mezőben; **Lorentz-erő:**

$\vec{E}(\vec{r},t)$; $\vec{B}(\vec{r},t)$

$m\cdot\ddot{\vec{r}}=q\cdot\vec{E}+q\cdot\vec{v}\times\vec{B}$

Relativisztikusan: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)=q\cdot\vec{E}+q\cdot\vec{v}\times\vec{B}$

Ezekre a problémákra még visszatérünk, illetve a gyakorlaton további feladatokat is tárgyalunk.

1.5. Dinamikai rendszerek

Három dimenziós euklideszi tér: helyzet $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$

Inerciarendszerben a newtoni determináltság elve: $\vec{r},\ \vec{v},\ t \quad\rightarrow\quad \vec{a}=\frac{1}{m}\cdot\underbrace{\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)}_{\textit{erőtörvény}}$

Mozgás: $\vec{r}=\vec{r}(t)$

Mozgásegyenlet:

$\ddot{\vec{r}}=\frac{1}{m}\cdot\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ (3 db másodrendű differenciálegyenlet $\Rightarrow$ 6-odrendű)

A koordináták átjelölésével elsőrendű differenciálegyenlet rendszert állítunk elő.

$$x_1=x;\qquad \dot{x}_1=\frac{x_4}{m}$$

$$x_2=y;\qquad \dot{x}_2=\frac{x_5}{m}$$

$$x_3=z;\qquad \dot{x}_3=\frac{x_6}{m}$$

A newtoni mozgásegyenletek megfelelő jelölések bevezetésével átírhatók 6 db elsőrendű differenciálegyenletből álló (=6-odrendű) rendszerré: ún. dinamikai rendszer.

$$x_4=m\cdot\dot{x};\quad \dot{x}_4=F_x\left(x_1,x_2,x_3,\frac{x_4}{m},\frac{x_5}{m},\frac{x_6}{m},t\right)$$

$$x_5=m\cdot\dot{y};\quad \dot{x}_5=F_y\left(x_1,x_2,x_3,\frac{x_4}{m},\frac{x_5}{m},\frac{x_6}{m},t\right)$$

$$x_6=m\cdot\dot{z};\quad \dot{x}_6=F_z\left(x_1,x_2,x_3,\frac{x_4}{m},\frac{x_5}{m},\frac{x_6}{m},t\right)$$

$$\dot{x}_1\equiv\mathcal{F}_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,t)$$
$$\dot{x}_2\equiv\mathcal{F}_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,t)$$
$$\dot{x}_3\equiv\mathcal{F}_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,t)$$
$$\dot{x}_4\equiv\mathcal{F}_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,t)$$
$$\dot{x}_5\equiv\mathcal{F}_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,t)$$
$$\dot{x}_6\equiv\mathcal{F}_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,t)$$

$\boxed{\dot{x}=\mathcal{F}(x,t)}$ $\quad x\in\mathbb{R}^6 \quad \mathcal{F}\in\mathbb{R}^6$ (a mozgásegyenleteknek megfelelő dinamikai rendszer)

A hely (x_1,x_2,x_3)- és impulzus (x_4,x_5,x_6)- koordináták összessége, azaz az x-ek összessége adja az állapotteret (fázisteret): $x\in P$

A fázistérbeli mozgás: $t\rightarrow x=x(t)$, fázisgörbe

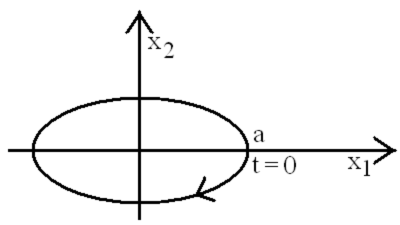
Például: lineáris harmonikus oszcillátor (a fázistér 2-dimenziós):

$$m\cdot\ddot{x}=-D\cdot x,\qquad \omega^2\equiv\frac{D}{m}$$

$$x_1=x=a\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

$$x_2=m\cdot\dot{x}=-a\cdot m\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{x_2}{m\cdot a\cdot\omega}\right)^2=1$$



A lineáris harmonikus oszcillátor fázisgörbéje: ellipszis

A lineáris harmonikus oszcillátor, mint dinamikai rendszer:

$$(x_1 = x\,,\;\; x_2 = m\cdot\dot{x}) \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_1 = \frac{x_2}{m}\,,\;\; \dot{x}_2 = -D\cdot x_1$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\;\; \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2}{m} \\ -D\cdot x_1 \end{pmatrix} = A\cdot x\,,\;\; A = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{m} \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\dot{x} = A\cdot x}$ (a dinamikai rendszer)

$x(t) = e^{A\cdot t}\cdot x_0$ a fázisgörbe, amely $t=0$-ban x_0-on halad át.

Tétel: (Egzisztencia és unicitás tétel)

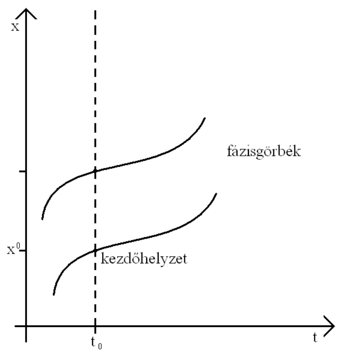
Ha $\mathsf{F}(x,t)$ folytonos és x szerint folytonosan differenciálható, akkor pontosan egy olyan $x = x(t)$ görbe van, amely kielégíti a(z)

a) $\dot{x}(t) = \mathsf{F}(x(t),t)$ differenciálegyenletet

b) $x(t_0) = x^0$ kezdeti feltételt

c) és $x(t)$ t, t_0 és x^0 szerint folytonosan differenciálható

Az $x(t)$ fázisgörbék soha nem metszik egymást!



1.6. Munka, munkatétel

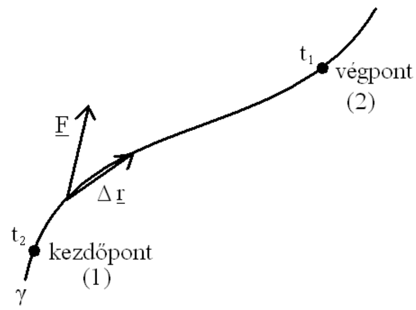
Munka: *erő · elmozdulás* $\cdot\cos($*közbezárt szög*$)$

$$|\vec{F}|\cdot|\Delta\vec{r}|\cdot\cos(\alpha) = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}\,,\quad \text{ahol}\quad \Delta\vec{r} = \dot{\vec{r}}\cdot\Delta t$$

$$\int_{(1)\gamma}^{(2)} \vec{F}\,d\vec{r} \equiv W^{F}_{\gamma\,(1)\to(2)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),t)\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt$$

$\vec{F}\cdot\vec{v}$ a teljesítmény

Egy $\vec{F}$ erő munkáján az erőnek az adott görbe menti integrálját értjük.



Példák:

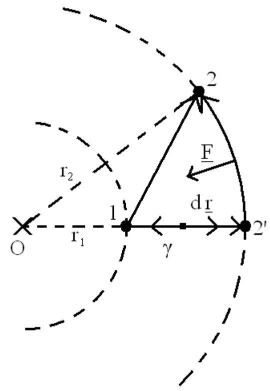
1. A newtoni gravitációs erő munkája: $\vec{F} = -\dfrac{G\cdot m\cdot M}{r^2}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r}$

$G\cdot m\cdot M := A$

$$(1)\to(2')\quad W = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{A}{r^2}\,dr = \left[\frac{A}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{A}{r_2} - \frac{A}{r_1}$$

$$(2')\to(2)\quad W = 0$$

$$W^{Fgrav}_{\gamma\,(1)\to(2)} = \left(-\frac{A}{r_1}\right) - \left(-\frac{A}{r_2}\right)$$

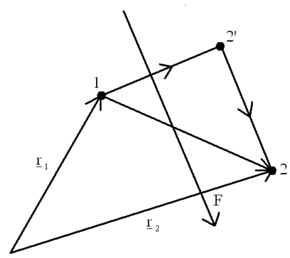


2. A harmonikus erő munkája:

$$\vec{F} = -D\cdot\vec{r}\,;\qquad W^{rug}_{\gamma(1)\to(2)} = \frac{1}{2}\cdot D\cdot\vec{r}_1^{\,2} - \frac{1}{2}\cdot D\cdot\vec{r}_2^{\,2}$$

3. $\vec{F} = \vec{F}_0$ homogén erőtér munkája:

$$W^{F_0}_{\gamma(1)\to(2)} = (-\vec{F}_0\cdot\vec{r}_1) - (-\vec{F}_0\cdot\vec{r}_2)$$



Tétel: (munkatétel)

$m\cdot\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$; $\gamma:\vec{r}(t)$ mozgás, akkor igaz:

$$W^{eredő}_{\gamma(1)\to(2)}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\vec{v}_2^2-\frac{1}{2}\cdot m\cdot\vec{v}_1^2=T_2-T_1=\Delta T$$

Mozgási energia: $\frac{1}{2}\cdot m\cdot\vec{v}^2=T$

A tömegponton végzett összes munka (az eredő erő munkája, vagy gravitációs munka) egyenlő a tömeg mozgási energiájának megváltozásával.

1. Bizonyítás: $m\cdot\ddot{\vec{r}}=\vec{F}\quad /\dot{\vec{r}}$ tegyük fel, hogy $m=állandó$

$$m\cdot\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}=\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}\quad /\int_{t_1}^{t_2}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\underbrace{m\cdot\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}}\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}\,dt=W^{F}_{\gamma\ 1\to 2}$$

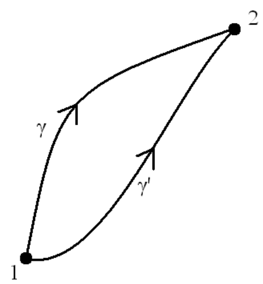
$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{\vec{r}}^2\right)}_{T}$$

$$[T]_{t_1}^{t_2}=W_{1\to 2}$$

2. Bizonyítás: $T=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{\vec{r}}^2$

$$\dot{T}=\underbrace{m\cdot\dot{\vec{v}}}_{m\cdot\ddot{\vec{r}}}\cdot\vec{v}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\Delta T=\int_{t_1}^{t_2}\dot{T}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{v}\cdot\vec{F}=W$$



1.7. Konzervatív erőterek, energiamegmaradás

Definíció: **erőtér**

Egy olyan erőfüggvény, ami csak a helytől függ: $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$

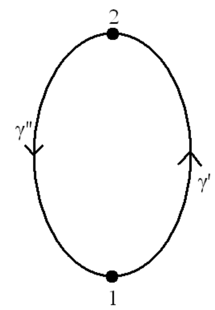
Az erőtereket erővonalakkal szokás jellemezni.

Definíció: **konzervatív erőtér**

erőtér, aminek a munkája nem függ a görbétől, csak a kezdő és a végponttól

$W_{\gamma\ 1\to 2}=W_{\gamma'\ 1\to 2}$

Vannak-e konzervatív erőterek?



$\gamma=\gamma'+\gamma''$

Tegyük fel, hogy $\vec{F}$ konzervatív

$$\int_{\gamma'}=\int_{-\gamma''}=-\int_{\gamma''}$$

$$\int_{\gamma'}+\int_{\gamma''}=0=\oint_{\gamma}$$

γ zárt görbe: $1\to 2\to 1$

$-\gamma''$ a γ'' görbe ellentétes irányítással

Ha konzervatív az erőtér, a zárt görbére vett integrál nulla, és fordítva, vagyis egy $\vec{F}$ erőtér akkor és csak akkor konzervatív, ha bármely zárt görbére vett integrálja nulla.

Tétel:

Ha $\vec{F}$ konzervatív, akkor létezik olyan $U(\vec{r})$ skalármező (skalártér), az ún. potenciál – mégpedig $U(\vec{r}) \overset{def.}{=} -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\, d\vec{r}$ – amelynek negatív gradiense megadja az erőt:

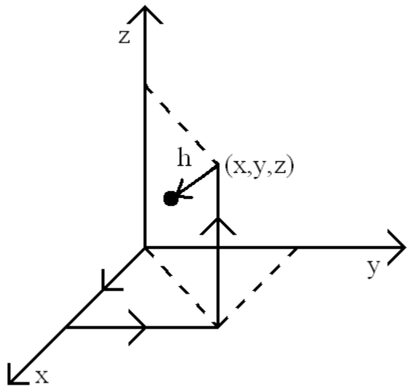
$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -grad\, U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}; -\frac{\partial U}{\partial y}; -\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

Bizonyítás: $U(x,y,z) = -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{F}\, d\vec{r}$

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[U(x+h, y, z) - U(x,y,z) \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{(0,0,0)}^{(x+h,y,z)} \vec{F}\, d\vec{r} - \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{F}\, d\vec{r} \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{(x,y,z)}^{(x+h,y,z)} \vec{F}\, d\vec{r} \right] = F_x(x,y,z)$$



Következmény: konzervatív erőtér rotációja nulla:

$$rot\, \vec{F} = rot(-grad\, U) = 0$$

Tétel (megfordítás):

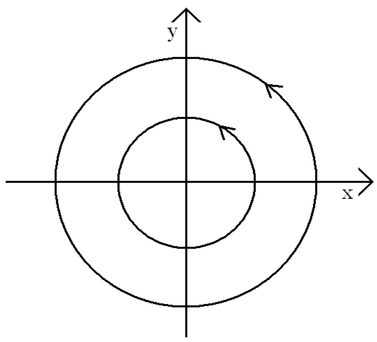
Ha egy egyszeresen összefüggő tartományon $rot\, \vec{F} = 0$, akkor $\vec{F}$ konzervatív.

Fontos példa, amikor $rot\, F = 0$, de a tartomány nem egyszeresen összefüggő:

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right), \quad \oint \vec{F}\, d\vec{r} \neq 0, \text{ de } rot\, \vec{F} = 0$$

$$rot\, \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{k} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) \right] = 0$$



Mert a tartomány nem egyszeresen összefüggő ($\vec{F}$ és $rot\, \vec{F}$ az origóban nincs értelmezve).

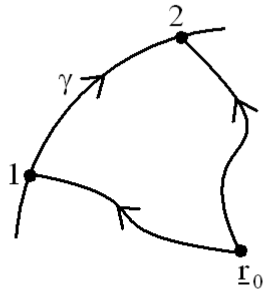
Megjegyzés: A potenciál függ az $\vec{r}_0$ (ún. nullpotenciálú hely) megválasztásától. Az $\vec{r}_0$ megváltoztatása egy konstans hozzáadását jelenti a potenciálhoz:

$$U' = U + C \qquad (C = konstans)$$

Az erő nem változik: $F = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U'}{\partial \vec{r}}$

Tétel: energia megmaradás

Konzervatív erő hatása alatt mozgó test energiája (a kinetikus és a potenciális energia összege) állandó, vagyis ha $m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ és $\vec{F}$ konzervatív, akkor $\frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\dot{\vec{r}}(t) \right)^2 + U\left(\vec{r}(t) \right) \equiv E = \acute{a}lland\acute{o}$ egy mozgásra.



1. Bizonyítás: $m\cdot\ddot{\vec{r}}=\vec{F} \rightarrow W^{F}_{mozgás\ 1\rightarrow 2}=T_2-T_1$

$W^{F\,(konzervatív)}_{\gamma\ 1\rightarrow 2}=\int\limits_{1\rightarrow 2}\vec{F}\,d\vec{r}$, a munka a görbétől független.

$$\int\limits_{\vec{r}_0}^{1}+\int\limits_{1}^{2}+\int\limits_{2}^{\vec{r}_0}=0 \Rightarrow \int\limits_{1}^{2}=\underbrace{\int\limits_{\vec{r}_0}^{2}}_{-U(\vec{r}_2)}-\underbrace{\int\limits_{\vec{r}_0}^{1}}_{U(\vec{r}_1)}=U(\vec{r}_1)-U(\vec{r}_2)$$

Vagyis ha $\vec{F}$ konzervatív és U a potenciálja, akkor a munkáját $U(kezdő)-U(vég)$ adja: $\boxed{\vec{F}\,d\vec{r}=-dU}$.

Másrészt a munkatétel szerint:

$W^{F}_{mozgás\ 1\rightarrow 2}=T_2-T_1=U_1-U_2$, átrendezve: $\underbrace{T_2+U_2}_{E_2}=\underbrace{U_1+T_1}_{E_1}$

2. Bizonyítás:

$$h(\vec{r};\dot{\vec{r}})\overset{def.}{=}\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{\vec{r}}^2+U(\vec{r})\equiv E(t)$$

$$\uparrow\ \uparrow$$

$$\left(m\cdot\ddot{\vec{r}}=-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\right) \rightarrow \vec{r}(t),\ \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\frac{d}{dt}E(t)=\frac{1}{2}\cdot m\cdot 2\cdot\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}+\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}\underbrace{\left(m\cdot\ddot{\vec{r}}+\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}\right)}_{0}=0 \Rightarrow E(t)=állandó$$

1.8. Példák

1. Bizonyítsuk be, hogy az $\vec{F}=m\cdot\vec{g}=állandó$ konzervatív erőtér! (Útmutató: $rot\,\vec{F}=0$, és a tartomány egyszeresen összefüggő)

   $U(\vec{r})=-m\cdot\vec{g}\cdot\vec{r}=-m\cdot(g_x\cdot x+g_y\cdot y+g_z\cdot z)=m\cdot g\cdot z$ ha a z-tengelyt függőlegesen felfelé irányítjuk.

   $-\frac{\partial U}{\partial x}=m\cdot g_x$, …, vagyis $-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}=m\cdot\vec{g}$

   Az energiát a kezdőfeltételek meghatározzák:

   $\frac{1}{2}\cdot m\cdot(v_x^2+v_y^2+v_z^2)+m\cdot g\cdot z=E$

   Az ekvipotenciális felületek(: Az erő merőleges az ekvipotenciális felületekre és a potenciál leggyorsabb csökkenésének irányába mutat)

   Pl.: $U(x,y,z)=m\cdot g\cdot z=C$,

   Az ekvipotenciális felületei a z-tengelyre merőleges, azaz vízszintes síkok.

2. Newton-féle gravitációs erőtér, az erőcentrum (M) az origóban van:

   $\vec{F}=-G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$ $\qquad G\cdot m\cdot M:=A$

   $U(x,y,z)=-\frac{A}{r}=-A\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad \left[r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$

   Az ekvipotenciális felületek origó középpontú gömbfelületek.

   $\left(grad\,r=\frac{\vec{r}}{r},\ grad\,f(r)=f'\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)$

3. Matematikai inga (modell):

$$m\cdot l\cdot\ddot{\Theta}=-m\cdot g\cdot\sin(\Theta)$$

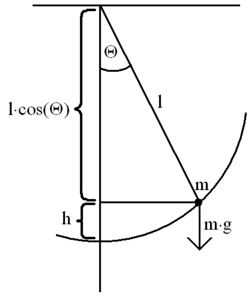
$$\ddot{\Theta}=-\frac{g}{l}\cdot\sin(\Theta)$$

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot(l\cdot\dot{\Theta})^2+m\cdot g\cdot(l-l\cdot\cos(\Theta))=\frac{E}{m}$$

$$\frac{1}{2}\cdot l^2\cdot\dot{\Theta}^2+g\cdot l\cdot(1-\cos(\Theta))=\frac{E}{m\cdot l}$$

$$f(\Theta,\dot{\Theta})=\dot{\Theta}^2+\frac{2\cdot g}{l}\cdot\underbrace{(1-\cos(\Theta))}_{\frac{\Theta^2}{2}}=\frac{2\cdot E}{m\cdot l^2}\equiv\varepsilon^2$$

$$\cos(\Theta)=1-\frac{\Theta^2}{2}$$



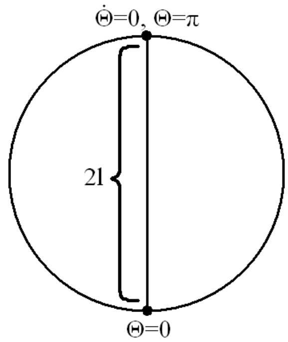
(kis szögű lengésekre)

$$\dot{\Theta}^2+\frac{g}{l}\cdot\Theta^2=\varepsilon^2$$ (a fázisgörbe ellipszis)

Speciálisan, ha $E=2\cdot m\cdot g\cdot l$

$$\dot{\Theta}^2+\frac{2\cdot g}{l}\cdot(1-\cos(\Theta))=\frac{4\cdot m\cdot g\cdot l}{m\cdot l^2}=4\cdot\frac{g}{l}$$

(az ún. szeparátrix egyenlete)



1.9. Centrális erőterek, impulzusmomentum megmaradás

Ha az erőknek van centruma (általában ezt választjuk origónak), akkor centrális erőtérről beszélünk $\left(\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})\right) \Rightarrow \vec{F}\|\vec{r}$

Általánosan: ha nem a centrumban van az origó, akkor $\vec{F}\|\vec{r}-\vec{r}_c$

Tétel: ha $m\cdot\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$ és $\vec{F}$ centrális, akkor $\vec{l}=\vec{r}\times m\cdot\dot{\vec{r}}=\acute{a}lland\acute{o}$, vagyis centrális erő hatása alatt mozgó test impulzusnyomatéka állandó

1. Bizonyítás: $m\cdot\ddot{\vec{r}}=\vec{F}\quad /\vec{r}\times$

$$m\cdot\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}=\vec{r}\times\vec{F}\overset{F\|r}{=}0 \qquad \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})=\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{=0}+\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{m\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})}_{\substack{\vec{l}\\ \text{időben állandó}}}\Big)=0 \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{l}}=0;\ \vec{l}=mozg\acute{a}s\acute{a}lland\acute{o}$$ (a kezdőfeltétel meghatározza)

Definíció: **impulzusnyomaték a centrumra vonatkoztatva**:

$$\vec{l}=m\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})=\vec{r}\times m\cdot\dot{\vec{r}}=\vec{r}\times\vec{p}$$

Definíció: $\vec{F}$ nyomatéka = **forgatónyomaték az origóra vonatkoztatva**

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

2. Bizonyítás: $m\cdot\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$ és $\vec{F}$ centrális

$$\vec{l}=\vec{r}\times m\cdot\dot{\vec{r}}$$

$$\dot{\vec{l}}=\underbrace{\dot{\vec{r}}\times m\cdot\dot{\vec{r}}}_{0}+\vec{r}\times\underbrace{m\cdot\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}}=0,$$ vagyis $\vec{l}=\acute{a}lland\acute{o}$

Szigorúan centrális erőterek:
Definíció: **szigorúan centrális erőtér**

olyan centrális erőtér, amelyben az erő nagysága csak a centrumtól mért távolságtól függ:

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}}$$

például: $\vec{F}_{grav.} = \underbrace{\left(-G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}\right)}_{f(r)}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{F}_{harm} = -D\cdot\vec{r} = \underbrace{(-D\cdot r)}_{f(r)}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

Tétel:

A szigorúan centrális erőtér mindig konzervatív

$$U(r) \overset{def.}{=} -\int_{r_0}^{r} f(x)\,dx$$

Bizonyítás: $-\frac{\partial U}{\partial\vec{r}} = -\frac{dU}{dr}\cdot grad\, r = f(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}$

Például: a gravitációs potenciál: $U(r) = -\frac{G\cdot m\cdot M}{r}$, a harmonikus erő (rugó) potenciálja: $U(r) = \frac{1}{2}\cdot D\cdot r^2$.

Tétel:

Szigorúan centrális erő hatása alatt mozgó tömegpont energiája és impulzusnyomatéka állandó.

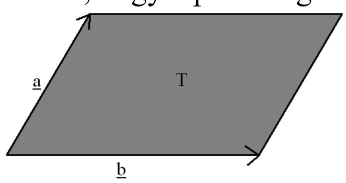
Az impulzusnyomaték (pályamomentum) szemléletes jelentése:

$$\frac{\vec{l}}{m} = \vec{r}\times\dot{\vec{r}} = állandó = \vec{r}_0\times\vec{v}_0$$

$\vec{l}\perp\vec{r}_0;\ \vec{v}_0;\ \vec{r};\ \vec{v}$

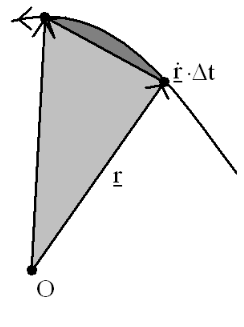
$\vec{r}_0$ és $\vec{v}_0$ kifeszítenek egy síkot, ami merőleges $\vec{l}$-re.

Ismert, hogy a paralelogramma területe:



$$|\vec{a}\times\vec{b}| = T$$

A mozgás ebből a síkból nem lép ki, mert $\vec{r}$ és $\vec{v}$ később szintén kifeszít egy síkot, amely merőleges $\vec{l}$-re .



Így az $\vec{r}$ helyvektor által súrolt terület (felület): $\Delta f \approx \frac{1}{2}\cdot|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\cdot\Delta t|$

$\frac{\Delta f}{\Delta t} \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{|\vec{l}|}{m}$ (a felületi sebesség)

Definíció: **felület vektor** $(\vec{f})$

A felszín szorzata egy normális egységvektorral, vagyis

$\Delta\vec{f} = \frac{1}{2}\cdot\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\cdot\Delta t$. Így az ún. felületi sebesség: $\boxed{\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{\vec{l}}{2\cdot m}}$

Ha $\vec{l} = állandó$, (pl. centrális erőtérben) akkor a felületi sebesség (vektor) állandó: a mozgás síkban zajlik, és a rádiusz vektor egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol.

1.10. Feladatok

1.10.1. Két egyenes út a C pontban derékszögben metsződik. Ezek mentén két gép halad a C pont felé állandó v_1 ill. v_2 sebességgel, $t=0$ időben az egyik gép távolsága C-től x_0, a másiké y_0. Mennyi idő múlva lesz a két gép közötti távolság a legkisebb, és mekkora ez a legkisebb érték?

1.10.2. Mekkora utat tesz meg az $\ddot{x}=-f(t)(<0)$ gyorsulással mozgó test $t=0$-tól megállásig, ha a pálya egyenes és T idő alatt áll meg?

1.10.3. Mozogjon az anyagi pont az x tengely mentén $\vec{F}=F_x\cdot\vec{i}$ erő hatására. Bizonyítsuk be, hogy ha x csak $\dot{x}=v$-től (azaz csak a sebességtől) függ, akkor

$$t-t_0=\int_{v_0}^{v}\frac{m\cdot dv}{F_x(v)},\qquad x-x_0=\int_{v_0}^{v}\frac{m\cdot v\cdot dv}{F_x(v)}$$

1.10.4. Milyen magasra emelkedik a v_0 kezdősebességgel függőlegesen feldobott test? Mennyi ideig emelkedik? (A levegő ellenállását hanyagoljuk el, a vonzóerő csökkenését vegyük figyelembe!)

1.10.5. G súlyú testet v_0 kezdősebességgel függőlegesen felhajítunk. Mekkora sebességgel ér vissza a Földre a test, ha a légellenállás a test
a) sebességével
b) sebességének négyzetével
arányos, az arányossági tényező $k\cdot m$?

1.10.6. Bizonyítsuk be, hogy centrális erő hatása alatt mozgó anyagi pont pályája súrlódó közeg esetén is sík görbe!

1.10.7. m tömegű anyagi pont v_0 kezdősebességgel indul, és $F_s=k\cdot\sqrt{v}$ ellenállású közegben mozog egy egyenes mentén. Hol és mikor áll meg a pont?

1.10.8. Az erő komponensei az xyz koordinátarendszerben:

$$F_x=a_{11}\cdot x+a_{12}\cdot y+a_{13}\cdot z$$
$$F_y=a_{21}\cdot x+a_{22}\cdot y+a_{23}\cdot z \qquad (a_{ij}\text{ állandó})$$
$$F_z=a_{31}\cdot x+a_{32}\cdot y+a_{33}\cdot z$$

Milyen feltételek mellett létezik potenciál? Ekkor mi a potenciál?

1.10.9. Vezessük le a centrális erő nagyságára vonatkozó $F=\frac{m\cdot l^2}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{h}\right)^2$ általános összefüggést, ahol $l=|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}|$, h pedig a pályához húzott érintőnek az erőcentrumtól mért távolsága. Útmutató: használjuk az energia- és a felületi-tételt!

1.10.10. Az előző feladat összefüggését felhasználva igazoljuk, hogy
a) Ha az anyagi pont körpályán mozog, és az erőcentrum maga is a körön van, akkor az erő a távolság ötödik hatványával fordítottan arányos.
b) Ha a pont olyan logaritmikus spirálist ír le, amelynek pólusa az erőcentrom, akkor az erő a távolság köbével fordítottan arányos (logaritmikus spirális: $r=r_0\cdot e^{k\cdot\varphi}$, r, φ a síkbeli polárkoordináták).
c) Ha a pont r sugarú körpályán mozog, és az erőcentrum a kör középpontja, akkor az erő nagysága $\frac{m\cdot v^2}{r}$.