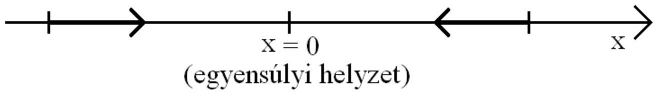
2. Rezgések

2.1. Harmonikus rezgések:

Harmonikus erő: $F = -D \cdot x \quad (D > 0)$

$\boxed{m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x}$ (ezt a mechanikai rendszert lineáris harmonikus oszcillátornak nevezik)



ω_0 (Oszcillátor körfrekvenciája)

$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0}$ Másodrendű konstansegyütthatós homogén lineáris közönséges differenciálegyenlet. Az általános megoldás: $x = a \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \alpha)$.

Az a és α konstansokat a kezdeti feltételek határozzák meg: $(t = 0 : x = x_0 ; \dot{x} = v_0)$

Módszer az általános megoldás keresésére: keressük a megoldást $x = e^{\lambda \cdot t}$ alakban!

$$\left\{\begin{matrix} x = e^{\lambda \cdot t} \\ \dot{x} = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} \\ \ddot{x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot t} \end{matrix}\right\} \qquad (\lambda^2 + \omega_0^2) \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + \omega_0^2) = 0, \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = i \cdot \omega_0 \\ \lambda_2 = -i \cdot \omega_0 \end{matrix}$$

$e^{i \cdot \omega_0 \cdot t} ; e^{-i \cdot \omega_0 \cdot t}$ (független, alap-megoldások) $\Rightarrow x = c_1 \cdot e^{i \cdot \omega_0 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_0 \cdot t}$, ahol c_1 és c_2 tetszőleges komplex együtthatók.

x legyen valós! $\Rightarrow c_1^* = c_2$

Írjuk fel c_1-et $c_1 = \frac{a}{2} \cdot e^{i \cdot \alpha}$ alakban. $\Rightarrow$ $x = \frac{a}{2} \cdot (e^{i \cdot (\omega_0 \cdot t + \alpha)} + e^{-i \cdot (\omega_0 \cdot t + \alpha)}) = a \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \alpha)$

Emlékeztető:

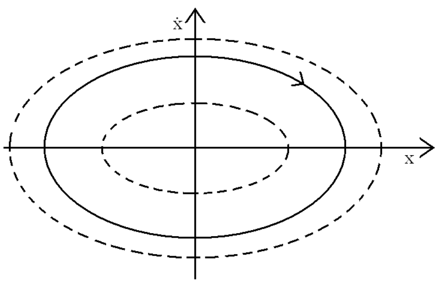
$e^{i \cdot \alpha} = \cos \alpha + i \cdot \sin \alpha$

$\underline{e^{-i \cdot \alpha} = \cos \alpha - i \cdot \sin \alpha}$

$e^{i \cdot \alpha} + e^{-i \cdot \alpha} = 2 \cdot \cos \alpha \;\Rightarrow\; \cos \alpha = \frac{e^{i \cdot \alpha} + e^{-i \cdot \alpha}}{2}$

$e^{i \cdot \alpha} - e^{-i \cdot \alpha} = 2 \cdot \sin \alpha \;\Rightarrow\; \sin \alpha = \frac{e^{i \cdot \alpha} - e^{-i \cdot \alpha}}{2 \cdot i}$

A lineáris harmonikus oszcillátor energiája állandó, a fázisportrét az energia nívógörbéi rajzolják ki:



$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot a^2$$

A fázisgörbék ellipszisek:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{a^2 \cdot \omega_0^2} = 1$$

Ez a lineáris harmonikus oszcillátor fázisportréja.

Egy fázisgörbe (ellipszis) által határolt terület az energiával $\left(E = \frac{1}{2} \cdot D \cdot a^2 \right)$ arányos:

$$\pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot a^2 \cdot \omega_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot E}{m \cdot \omega_0}$$

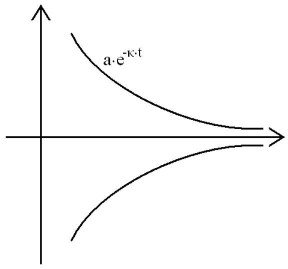
2.2. Csillapított rezgések

$-D\cdot x \underbrace{-\beta\cdot\dot{x}}_{\text{súrlódási erő}}$ $\quad (D>0\,;\beta>0)$ (Stokes-i súrlódás (nincs négyzetes tag))

$$m\cdot\ddot{x}=-D\cdot x-\beta\cdot\dot{x}$$

$$\ddot{x}=-\underbrace{\frac{D}{m}}_{\omega_0^2}\cdot x-\underbrace{\frac{\beta}{m}}_{2\cdot\kappa}\cdot\dot{x}\Rightarrow\underline{\ddot{x}+2\cdot\kappa\cdot\dot{x}+\omega_0^2\cdot x=0} \qquad \omega_0^2\equiv\sqrt{\frac{D}{m}}\quad;\quad\kappa\equiv\frac{\beta}{2\cdot m}$$

A megoldás megkeresésének módszere: keressük a megoldást



$$\left\{\begin{aligned} x&=e^{\lambda\cdot t}\\ \dot{x}&=\lambda\cdot e^{\lambda\cdot t}\\ \ddot{x}&=\lambda^2\cdot e^{\lambda\cdot t}\end{aligned}\right\}\quad \text{Karakterisztikus egyenlet:}\quad (\lambda^2+2\cdot\kappa\cdot\lambda+\omega_0^2)\cdot e^{\lambda\cdot t}=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-2\cdot\kappa\pm\sqrt{(2\cdot\kappa)^2-4\cdot\omega_0^2}}{2}=-\kappa\pm\sqrt{-(\omega_0^2-\kappa^2)}\quad .$$

<u>1. eset (valódi csillapított rezgések):</u> $(\omega_0>\kappa)$: $x=a\cdot e^{-\kappa\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha)$, ahol a és α a kezdőfeltételek által meghatározott konstansok.

$\omega\equiv\sqrt{\omega_0^2-\kappa^2}$ a súrlódás elhangolja a frekvenciát.

$$e^{\lambda_1\cdot t}=e^{-\kappa\cdot t+i\cdot\omega\cdot t}\qquad x=c_1\cdot e^{\lambda_1\cdot t}+c_2\cdot e^{\lambda_2\cdot t}\ \text{ ez valós, ha }\ c_1^*=c_2\text{. Legyen }\ c_1\equiv\frac{a}{2}\cdot e^{i\cdot\alpha}$$
$$e^{\lambda_2\cdot t}=e^{-\kappa\cdot t-i\cdot\omega\cdot t}$$

$$x=\frac{a}{2}\cdot e^{-\kappa\cdot t+i\cdot\omega\cdot t+i\cdot\alpha}+\frac{a}{2}e^{-\kappa\cdot t-i\cdot\omega\cdot t-i\cdot\alpha}=\frac{a}{2}\cdot e^{-\kappa\cdot t}\cdot(e^{i\cdot(\omega\cdot t+\alpha)}+e^{-i\cdot(\omega\cdot t+\alpha)})=a\cdot e^{-\kappa\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha)$$

<u>2. eset (túlcsillapított (súrlódásos) rezgés):</u> $\kappa>\omega_0$

$\lambda_{1,2}=-\kappa\pm\sqrt{\kappa^2-\omega_0^2}\ \Rightarrow\ x=a_1\cdot e^{\lambda_1\cdot t}+a_2\cdot e^{\lambda_2\cdot t}$ az általános megoldás.

<u>3. eset (aperiodikus határeset):</u> $\omega_0=\kappa$

Ha a karakterisztikus egyenlet gyökei egybeesnek:

$\lambda_1=\lambda_2=-\kappa \qquad e^{-\kappa\cdot t},\,t\cdot e^{-\kappa\cdot t}\qquad \boxed{x=(a_1+a_2\cdot t)\cdot e^{-\kappa\cdot t}}$

Próbáljuk felvázolni a fázisgörbéket! Minden esetben az origóban fog végződni a mozgás.

2.3. Kényszerrezgések

$-D\cdot x-\beta\cdot\dot{x}+F_0\cdot\cos(\gamma\cdot t)$, ahol

γ a gerjesztési frekvencia és

F_0 a (szinuszos) gerjesztő erő amplitúdója.

$$-\underbrace{\frac{D}{m}}_{\omega_0^2}\cdot x-\underbrace{\frac{\beta}{m}}_{2\cdot\kappa}\cdot\dot{x}+\underbrace{\frac{F_0}{m}}_{f_0}\cdot\cos(\gamma\cdot t) \qquad \boxed{\ddot{x}+2\cdot\kappa\cdot\dot{x}+\omega_0^2\cdot x=f_0\cdot\cos\gamma\cdot t}$$ inhomogén differenciálegyenlet.

A homogén egyenlet általános megoldása: $x_h=a\cdot e^{-\kappa\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha)$ $(\omega_0>\kappa)$.
Az inhomogén egyenlet általános megoldása egyenlő a homogén differenciálegyenlet általános megoldásának és az inhomogén differenciálegyenlet egy tetszőleges (partikuláris) megoldásának összegével: x_h+x_p .

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának előállítása a **komplexesítés módszerével**:

$$\begin{array}{ll} \ddot{x}+2\cdot\kappa\cdot\dot{x}+\omega_0^2\cdot x=f_0\cdot\cos(\gamma\cdot t) & \\ \underline{+\ddot{y}+2\cdot\kappa\cdot\dot{y}+\omega_0^2\cdot y=f_0\cdot\sin(\gamma\cdot t)} & /\cdot i \\ \ddot{z}+2\cdot\kappa\cdot\dot{z}+\omega_0^2\cdot z=f_0\cdot e^{i\cdot\gamma\cdot t} & \end{array} \qquad \begin{array}{l} x+i\cdot y=z \\ \dot{x}+i\cdot\dot{y}=\dot{z} \\ \ddot{x}+i\cdot\ddot{y}=\ddot{z} \end{array}$$

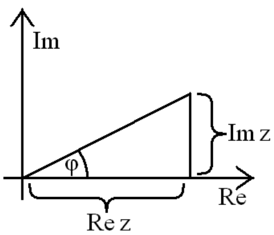
Keressük a megoldást $z=B\cdot e^{i\cdot\gamma\cdot t}$ alakban!

$$z=B\cdot e^{i\cdot\gamma\cdot t}$$
$$\dot{z}=i\cdot\gamma\cdot B\cdot e^{i\cdot\gamma\cdot t}$$
$$\ddot{z}=(i\cdot\gamma)^2\cdot B\cdot e^{i\cdot\gamma\cdot t}=-\gamma^2 B\cdot e^{i\cdot\gamma\cdot t}$$

$$z=B\cdot e^{i\cdot\gamma\cdot t}=|B|\cdot e^{-i\cdot\delta}\cdot e^{i\cdot\gamma\cdot t} \qquad (B=|B|\cdot e^{i\cdot argB}),\ |B|=(B\cdot B^*)^{\frac{1}{2}}\ (B^*\text{a komplex konjugált})$$

$$[-\gamma^2+2\cdot\kappa\cdot i\cdot\gamma+\omega_0^2]\cdot B\cdot e^{i\cdot\gamma\cdot t}=f_0\cdot e^{i\cdot\gamma\cdot t}$$

$$B=\frac{f_0}{(\omega_0^2-\gamma^2)+i\cdot 2\cdot\kappa\cdot\gamma}=\frac{f_0\cdot(\omega_0^2-\gamma^2-i\cdot 2\cdot\kappa\cdot\gamma)}{(\omega_0^2-\gamma^2)^2+(2\cdot\kappa\cdot\gamma)^2}$$



$$b=|B|=(B\cdot B^*)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{f_0^2}{(\omega_0^2-\gamma^2)^2+(2\cdot\kappa\cdot\gamma)^2}}$$

$$tg\,\varphi=\frac{\Im z}{\Re z},\quad tg(-\delta)=\frac{-2\cdot\kappa\cdot\gamma}{\omega_0^2-\gamma^2},\quad \delta=arctg\frac{2\cdot\kappa\cdot\gamma}{\omega_0^2-\gamma^2},\quad z=|B|\cdot e^{i\cdot(\gamma\cdot t-\delta)}$$

Egy partikuláris megoldás tehát:
$$x=\Re z=b\cdot\cos(\gamma\cdot t-\delta)$$

A kényszerrezgés általános megoldása: $x=a\cdot e^{-\kappa\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha)+b\cdot\cos(\gamma\cdot t-\delta)$

Az általános megoldás mutatja a tranziens jelenségek létét, és hogy beáll egy állandósult rezgésre, amely késik a gerjesztéstől. Az állandósult rezgés frekvenciája megegyezik a gerjesztés frekvenciájával (γ), amplitúdója (b) és fáziskésése (δ) függ a sajátfrekvencián kívül a gerjesztés frekvenciájától és a súrlódástól is:

$$b=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\gamma^2)^2+(2\cdot\kappa\cdot\gamma)^2}}; \quad \delta=arctg\frac{2\cdot\kappa\cdot\gamma}{\omega_0^2-\gamma^2};$$ (ún. rezonanciagörbék)

$\gamma_r=\sqrt{\omega_0^2-2\cdot\kappa^2}$ ún. rezonancia frekvencia esetén az amplitúdó maximális.

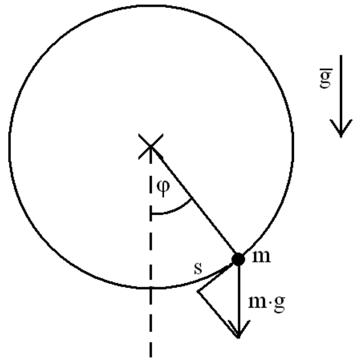
A rezonanciagörbék tanulmányozását segítik a www.walter-fendt.de/ph14e/resonance.htm és a www.physics.usyd.edu.au/Ag/sc/waves/agwaves03.htm honlapok.
A súrlódás nélküli rezonancia (ún. rezonancia katasztrófa) esetét külön kell tárgyalni.

Ekkor $\ddot{x}+\omega_0^2\cdot x=f_0\cdot\cos\gamma\cdot t$ és $\omega_0=\gamma$.

Egy partikuláris megoldás: $x=\frac{f_0}{2\cdot\omega_0}\cdot t\cdot\sin\omega_0\cdot t$ (Az amplitúdó lineárisan nő, katasztrófa.)

2.4. Matematikai inga

Egy l hosszúságú merev rúdon m tömegű tömegpont homogén nehézségi erőtér hatása alatt függőleges síkban vízszintes tengely körül forog.



φ: a rúd függőlegessel bezárt szöge

$s = l\cdot\varphi;\ \dot{s} = l\cdot\dot{\varphi};\ \ddot{s} = l\cdot\ddot{\varphi}$

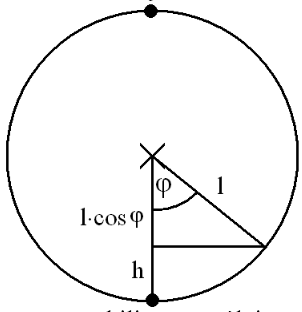
$m\cdot\ddot{s} = -m\cdot g\cdot\sin(\varphi)$

Mozgásegyenlet: $\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\cdot\sin(\varphi)} \overset{kis\,kitérésekre}{=} -\frac{g}{l}\cdot\varphi$

$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2\cdot\sin(\varphi)$

Kis kitérésre: $\ddot{\varphi} = -\omega_0^2\cdot\varphi$, lengésidő: $T_0 = \frac{2\cdot\pi}{\omega_0} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$

Általános esetben: az energiamegmaradás tételét használjuk



$$h = l - l\cdot\cos(\varphi) = l\cdot(1-\cos(\varphi))$$

$$v = l\cdot\dot{\varphi}$$

$$E = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + m\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}^2 + m\cdot g\cdot l\cdot(1-\cos(\varphi))$$

1. **Lengések:** $E < E_0 = 2\cdot m\cdot g\cdot l$

   szélső helyzet ($\dot{\varphi} = 0$: fordulópont, maximális kitérés): φ_0

   $$E = m\cdot g\cdot l\cdot(1-\cos(\varphi_0))$$

   $$\frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}^2 = m\cdot g\cdot l\cdot[\underbrace{1-\cos(\varphi_0)}_{2\cdot\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)} - \underbrace{(1-\cos(\varphi))}_{2\cdot\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}]$$

   $$\dot{\varphi}^2 = 4\cdot\underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega_0^2}\cdot\left[\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

   $$\dot{\varphi} = \pm 2\cdot\omega_0\cdot\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$ szétválasztható változójú differenciálegyenlet

   $$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi'}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}} = \pm 2\cdot\omega_0\int_0^t dt' = 2\cdot\omega_0\cdot t$$ elsőfajú elliptikus integrál: táblázatból

   Lengésidő: $$\boxed{\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} = 2\cdot\omega_0\cdot\frac{T}{4}}$$

$$2\cdot\omega_0\cdot\frac{T}{4}\overset{helyettesítés}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{2\cdot k\cdot\cos(\Psi)\,d\,\Psi}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2(\Psi)}}}{k\cdot\sqrt{1-\sin^2(\Psi)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\,d\,\Psi}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2(\Psi)}}$$

Helyettesítés:

$$\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\equiv k$$

$$k\cdot\sin(\Psi)=\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\varphi=0\ \rightarrow\ \Psi=0$$

$$\varphi=\varphi_0\ \rightarrow\ \sin(\Psi)=1\ \rightarrow\ \Psi=\frac{\pi}{2}$$

$$k\cdot\cos(\Psi)\,d\,\Psi=\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\frac{d\,\varphi}{2}$$

$$d\,\varphi=\frac{2\cdot k\cdot\cos(\Psi)\,d\,\Psi}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}=\frac{2\cdot k\cdot\cos(\Psi)\,d\,\Psi}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2(\Psi)}}$$

Elsőfajú teljes elliptikus integrál:

$$K(z)\overset{def.}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,\Psi}{\sqrt{1-z^2\cdot\sin^2(\Psi)}}$$ a komplex számsíkon van definiálva

$$T=T_0\cdot\frac{2}{\pi}\cdot K\left(\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right)=T_0\cdot\left(1+\frac{\varphi_0^2}{2}+\frac{11}{3072}\cdot\varphi_0^4+\ldots\right)$$

Fejtsük sorba: $\left(1-z^2\cdot\sin^2(\Psi)\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\sin^2(\Psi)\cdot\frac{z^2}{2}+\sin^4(\Psi)\cdot\frac{3\cdot z^4}{8}+\ldots$

Binomiális tétel: $(1+x)^{\nu}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\nu}{i}\cdot x^i$

Tagonként integráljuk $K(z)$-t:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\cdot n}(\Psi)\,d\,\Psi=\frac{\pi}{2\cdot n!}\cdot\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\qquad n=1,\,2,\,\ldots$$

$$K(z)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,\Psi}{\sqrt{1-z^2\cdot\sin^2(\Psi)}}=\frac{\pi}{2}+\frac{z^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cdot z^4\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+\ldots$$

$$z=\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\approx\frac{\varphi_0}{2}-\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{3!}+\ldots$$

Táblázat:

φ_0	$\frac{1}{16}\cdot\varphi_0^2$	$\frac{11}{3072}\cdot\varphi_0^4$
10 °	0,002	$3\cdot10^{-6}$
20 °	0,0076	$1\cdot10^{-4}$
45 °	0,039	$1{,}4\cdot10^{-3}$

2. **Forgások:** $E > E_0$

3. **Szeparátrix:** (határvonal, amely elválasztja a lengéseket a forgásoktól) $E = E_0$

A matematikai inga fázisportréja:

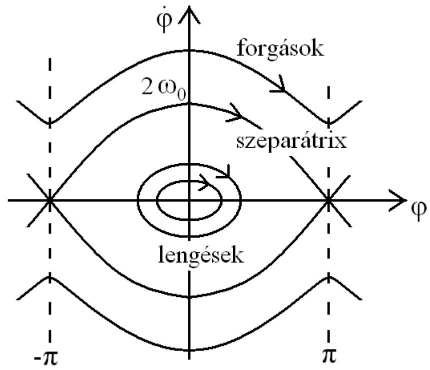
1. Kis lengések:

$$E=\frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}^2+m\cdot g\cdot l\cdot\left[1-\left(1-\frac{\varphi^2}{2}+\ldots\right)\right]$$

$$1=\frac{\dot{\varphi}^2}{2\cdot\frac{E}{m\cdot l^2}}+\frac{\varphi^2}{\frac{2\cdot E}{m\cdot g\cdot l}}$$ egy ellipszis egyenlete

A szeparátrix egyenlete:

$$E=E_0=\boxed{2\cdot m\cdot g\cdot l=\frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}^2+m\cdot g\cdot l\cdot\left(1-\cos(\varphi)\right)}$$

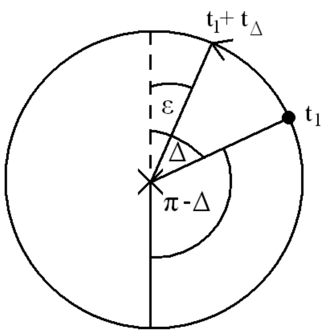


$$0=\frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}^2+m\cdot g\cdot l\cdot\left[-\left(1+\cos(\varphi)\right)\right]$$

$$\dot{\varphi}^2=4\cdot\omega_0^2\cdot\underbrace{\left(\frac{1+\cos(\varphi)}{2}\right)}_{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\boxed{\dot{\varphi}=\pm2\cdot\omega_0\cdot\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|}$$

Mozgás a szeparátrixon:



$$\dot{\varphi}=2\cdot\omega_0\cdot\left|\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=2\cdot\omega_0\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\underbrace{\int_{\pi-\Delta}^{\pi-\varepsilon}\frac{d\varphi}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}_{x=tg\left(\frac{\varphi}{2}\right)}=2\cdot\omega_0\cdot\int_{t_1}^{t_1+t_\Delta}dt=2\cdot\omega_0\cdot t_\Delta$$

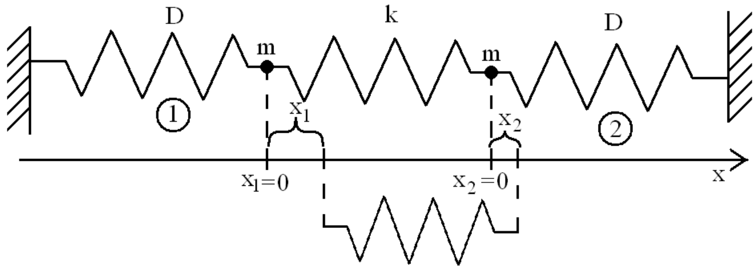
$$x_\Delta = tg\left(\frac{\pi-\Delta}{2}\right) \approx \frac{2}{\Delta}$$

$$x_\varepsilon = tg\left(\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right) \approx \frac{2}{\varepsilon}$$

$$\int_{x_\Delta}^{x_\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \omega_0 \cdot t_\Delta = \ln\left(\frac{x_\varepsilon + \sqrt{1+x_\varepsilon^2}}{x_\Delta + \sqrt{1+x_\Delta^2}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{4}{\varepsilon}}{\frac{4}{\Delta}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_\Delta = \frac{T_0}{2\cdot\pi}\cdot\ln\left(\frac{\Delta}{\varepsilon}\right)} \to \infty$$

A labilis egyensúlyi helyzet eléréséhez a szeparátrixon végtelen hosszú idő szükséges.

2.5. Csatolt rezgések



(1) mozgásegyenlete: $m\cdot\ddot{x}_1=-D\cdot x_1-k\cdot(x_1-x_2)$
(2) mozgásegyenlete: $m\cdot\ddot{x}_2=-D\cdot x_2+k\cdot(x_1-x_2)$ hatás-ellenhatás

$$\frac{D}{m}=\omega_0^2;\quad \frac{k}{m}=\beta$$

$$\ddot{x}_1=-\frac{D}{m}\cdot x_1-\frac{k}{m}\cdot(x_1-x_2)$$

$$\ddot{x}_2=-\frac{D}{m}\cdot x_2+\frac{k}{m}\cdot(x_1-x_2)$$

Keressük a megoldást ... alakban, és helyettesítsük be a mozgásegyenletekbe:

$$x_1=u_1\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha)\quad \dot{x}_1=-u_1\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t+\alpha)\quad \ddot{x}_1=-u_1\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha)$$

$$x_2=u_2\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha)\quad \dot{x}_2=-u_2\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t+\alpha)\quad \ddot{x}_2=-u_2\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha)$$

$$-\omega^2\cdot u_1=-\omega_0^2\cdot u_1-\beta\cdot(u_1-u_2)$$

$$-\omega^2\cdot u_2=-\omega_0^2\cdot u_2+\beta\cdot(u_1-u_2)$$

Homogén lineáris egyenletrendszer nemtriviális megoldását keressük:

$$(\omega_0^2+\beta-\omega^2)\cdot u_1-\beta\cdot u_2=0$$

$$-\beta\cdot u_1+(\omega_0^2+\beta-\omega^2)\cdot u_2=0$$

Akkor és csak akkor van nemtriviális megoldás, ha a determináns eltűnik:

$$0=\begin{vmatrix}\omega_0^2+\beta-\omega^2 & -\beta\\ -\beta & \omega_0^2+\beta-\omega^2\end{vmatrix}=(\omega_0^2+\beta-\omega^2)^2-\beta^2$$

$$\omega_0^2+\beta-\omega^2=\pm\beta$$

$$\omega_{1,2}^2=\omega_0^2+\beta\mp\beta$$

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_1^2&=\omega_0^2\\ \omega_2^2&=\omega_0^2+2\cdot\beta\end{aligned}}$$

A csatolás felhasítja a degenerációt (elfajulást)

$$\omega_2=\sqrt{\omega_0^2+2\cdot\beta}=\omega_0\cdot\sqrt{1+\frac{2\cdot\beta}{\omega_0^2}}\approx\omega_0+\frac{\beta}{\omega_0}$$

Degeneráció: két azonos frekvenciájú rezgés $\Rightarrow$ egybeesnek a frekvenciák

(1) $\omega_1^2=\omega_0^2$

$$\beta\cdot u_1-\beta\cdot u_2=0 \quad \Rightarrow \quad \beta\cdot(u_1-u_2)=0$$

$$u_1=u_2\equiv A$$

A tömegek azonos amplitúdóval, azonos fázisban rezegnek.

(2) $\omega_2^2=\omega_0^2+2\cdot\beta$

$$-\beta\cdot u_1-\beta\cdot u_2=0 \quad \Rightarrow \quad u_1=-u_2\equiv B$$

A tömegek azonos amplitúdóval, de ellentétes fázisban rezegnek.

Általános megoldás:
$$\boxed{\begin{aligned} x_1&=A\cdot\cos(\omega_0\cdot t+\alpha_1)+B\cdot\cos(\omega_2\cdot t+\alpha_2)\\ x_2&=A\cdot\cos(\omega_0\cdot t+\alpha_1)-B\cdot\cos(\omega_2\cdot t+\alpha_2)\end{aligned}}$$

Két ún. **normálrezgés** van, amelyeket a kezdőfeltételek alkalmas megválasztásával állíthatunk elő:

a) $t=0$: $x_1=x_2=a$; $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1&=a\cdot\cos(\omega_0\cdot t)\\ x_2&=a\cdot\cos(\omega_0\cdot t)\end{aligned}}$$

b) $t=0$: $x_1=a$; $x_2=-a$; $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1&=a\cdot\cos(\omega_2\cdot t)\\ x_2&=-a\cdot\cos(\omega_2\cdot t)\end{aligned}}$$

2.6. Feladatok

2.6.1. Határozzuk meg az m tömegű k rugóállandójú lineáris oszcillátor mozgását, ha $t=0$-nál a kitérés $x=0$ és a sebesség $\dot{x}=0$ és az oszcillátorra ható gerjesztő erő

a) $F(t)=F_0=\acute{a}lland\acute{o}$

b) $F(t)=a\cdot t$

c) $F(t)=F_0\cdot e^{-\alpha\cdot t}$

d) $F(t)=F_0\cdot\cos(\gamma\cdot t)$

2.6.2. Határozzuk meg az

a) $U(x)=V\cdot\cos(\alpha\cdot x)-F\cdot x$

b) $U(x)=V\cdot(\alpha^2\cdot x^2-\sin^2(\alpha\cdot x))$

potenciáltérben mozgó tömegpont kis rezgéseit harmonikus közelítésben!

2.6.3. Két azonos magasságban levő pontot függőleges síkú drótpályával kötünk össze, melyen egy gyöngy súrlódás nélkül mozoghat. A két pont távolsága 2 méter. Mennyi idő alatt csúszik át a gyöngy az egyik pontból a másikba, ha a drótpálya alakja

a) félkör

b) ciklois?

Útmutató: írjuk fel az energiatételt!

2.6.4. Az O_1 és O_2 centrumok a közöttük lévő m tömegű anyagi pontot a távolsággal arányos erővel vonzzák. Az arányossági tényező D. Határozzuk meg az O_1O_2 irányú egyenes vonalú rezgések rezgésidejét!