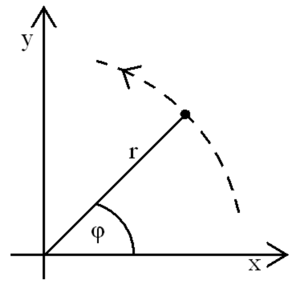
3. Mozgás gravitációs erőtérben, Kepler-törvények

3.1. Előprobléma

M nyugszik az origóban és m ennek gravitációs erőterében mozog.
Milyenek a mozgások?

$$\vec{F}=-G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \qquad \vec{F}=-grad\left(\frac{-G\cdot M\cdot m}{r}\right)$$

$$\boxed{m\cdot\ddot{\vec{r}}=-grad\left(-\frac{A}{r}\right)} \qquad (A=G\cdot M\cdot m)$$



A megoldáshoz, a mozgások elemzéséhez megmaradási tételeket használunk:

$$\vec{l}=m\cdot\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=áll.$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{\vec{r}}^2-\frac{G\cdot M\cdot m}{r}=áll.$$

1. törvény: $\vec{l}=áll.$ $\Rightarrow$ A mozgás síkban történik.
2. törvény: Az $\vec{r}$ egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol (állandó felületi sebesség).

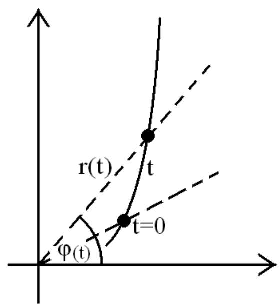
$(x\,;y)$ Sík, $\vec{l}$-re $\perp$, $\vec{l}(0{,}0\,,l_z)$

Síkbeli polárkoordináták (x a polártengely):

$$x=r\cdot\cos\varphi \qquad \dot{x}=\dot{r}\cdot\cos\varphi+r\cdot(-\sin\varphi)\cdot\dot{\varphi}$$

$$y=r\cdot\sin\varphi \qquad \dot{y}=\dot{r}\cdot\sin\varphi+r\cdot\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$\frac{1}{2}\cdot m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{A}{r}=\frac{1}{2}\cdot m(\dot{r}^2+r^2\cdot\dot{\varphi}^2)-\frac{A}{r}=E=áll.$$



$$l_z=l=(m\cdot\vec{r}\times\dot{\vec{r}})_z=m\cdot(x\cdot\dot{y}-\dot{x}\cdot y)=m\,r^2\cdot\dot{\varphi}$$

$$E=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\dot{r}^2+r^2\cdot\left(\frac{l_z}{m\cdot r^2}\right)^2\right)-\frac{A}{r}=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{r}^2}_{\substack{\text{radiális}\\ \text{mozgási}\\ \text{energia}}}+\underbrace{\frac{l_z^2}{2\cdot m\cdot r^2}}_{\substack{\text{centrifugális}\\ \text{energia}}}-\underbrace{\frac{A}{r}}_{\substack{\text{gravi-}\\ \text{tációs}\\ \text{energia}}}$$

$$\dot{r}=\pm\left[\frac{2}{m}\cdot\left(E-\left(\frac{l_z^2}{2\cdot m\cdot r^2}-\frac{A}{r}\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dr}{dt}=\pm\left(\frac{2\cdot E}{m}-\left(\frac{l_z^2}{m^2\cdot r^2}-\frac{2\cdot A}{m\cdot r}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Szétválasztható változójú differenciálegyenlet:

$$\int\frac{dr}{\pm\left(\frac{2\cdot E}{m}-\left(\frac{l_z^2}{m^2\cdot r^2}-\frac{2\cdot A}{m\cdot r}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}=\underbrace{\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\pm(f(r))^{\frac{1}{2}}}}_{\substack{-[G(r_0)-G(r)]=\\ =(t-t_0)\Rightarrow r=r(t)}}=\int_{t_0}^{t}dt$$

$r=r(t)$ elliptikus integrálokkal fejezhető ki.

A polárszög időfüggése is megadható: $\dot{\varphi}=\dfrac{l_z}{m\cdot r^2(t)}\rightarrow\varphi(t)=\displaystyle\int\frac{l_z}{m\cdot r^2(t)}dt$

Ha a mozgás időbeli lezajlásától eltekintünk, és csak a pályagörbe alakja, azaz az $r=r(\varphi)$ függvény érdekel, akkor a következőket csináljuk:

$$r=r(\varphi(t))\qquad \dot{r}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi}$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}=\underbrace{\frac{\pm\left(\frac{2\cdot E}{m}-\left(\frac{l_z^2}{m^2\cdot r^2}-\frac{2\cdot A}{m\cdot r}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{l_z}{m\cdot r^2}}}_{\text{Szétválasztható változójú differenciálegyenlet}}\Rightarrow\int\frac{dr\cdot\frac{1}{m\cdot r^2}}{\pm\left(\frac{2\cdot E}{m}-\left(\frac{l_z^2}{m^2\cdot r^2}-\frac{2\cdot A}{m\cdot r}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}=\int d\varphi$$

$$\varphi-\varphi_0=\int\frac{\frac{l_z}{m\cdot r^2}\cdot dr}{\pm\left(\frac{2\cdot E}{m}-\underbrace{\left(\frac{l_z}{m\cdot r}-\frac{A^2}{l_z^2}\right)}_{z^2}-\frac{A^2}{l_z^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\int\frac{-dz}{\left(\underbrace{\frac{2\cdot E}{m}+\frac{A^2}{l_z^2}}_{c^2}-z^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\arccos\frac{z}{c}$$

$$\boxed{\left\{z=\frac{l_z}{m\cdot r}-\frac{A}{l};\ dz=\frac{-l\cdot dr}{m\cdot r^2}\right\}}\qquad\boxed{\left\{\int\frac{-dx}{a^2-x^2}=\arccos\frac{x}{a}\right\}}$$

$$c\cdot\cos(\varphi-\varphi_0)=z=\frac{l_z}{m\cdot r}-\frac{A}{l_z}$$

$$\frac{A}{l_z}+c\cdot\cos(\varphi-\varphi_0)=z+\frac{A}{l_z}=\frac{l_z}{m\cdot r}\qquad /\cdot\frac{m}{l_z}$$

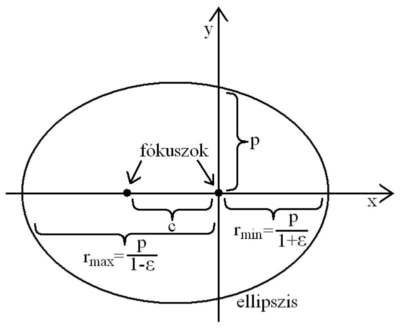
$$\frac{m\cdot A}{l_z^2}+\frac{m\cdot c}{l_z}\cdot\cos(\varphi-\varphi_0)=\frac{1}{r}$$

$$r=\frac{1}{\frac{m\cdot A}{l_z^2}+\frac{m}{l_z}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot E}{m}+\frac{A^2}{l_z^2}}\cdot\cos(\varphi-\varphi_0)}=\frac{\frac{m\cdot A}{l_z^2}}{1+\frac{\frac{l_z^2}{m\cdot A}\cdot m}{l_z}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot E}{m}+\frac{A^2}{l_z^2}}\cdot\cos(\varphi-\varphi_0)}\equiv\frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

Ez egy kúpszeletek fokális egyenlete:

$$\boxed{r=r(\varphi)=\frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi-\varphi_0)}}$$

$$p=\frac{l^2}{m\cdot A};\qquad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2\cdot E}{m}\cdot\frac{l^2}{A^2}}$$



A félnagytengely:

$$a=\frac{r_{min}+r_{max}}{2}=\frac{2\cdot p}{2\cdot(1-\varepsilon^2)}=\frac{p}{(1-\varepsilon^2)}=-\frac{A}{2\cdot E}$$

A félnagytengely csak az energiától függ, illetve az energiát meghatározza a félnagytengely:

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ (lapultság, excentricitás)

A pályagörbe alakja tehát:

$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$ $\varphi=0$ -nál a nevező maximális, és r minimális (ún. pericentrum).

Tegyük fel, hogy: $\varepsilon<1 \Leftrightarrow E<0$ (ellipszis, kötött mozgás): $\left\{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1\right\}$

Ha a polártengelyt a pericentrum felé irányítjuk, akkor $\varphi_0=0$.

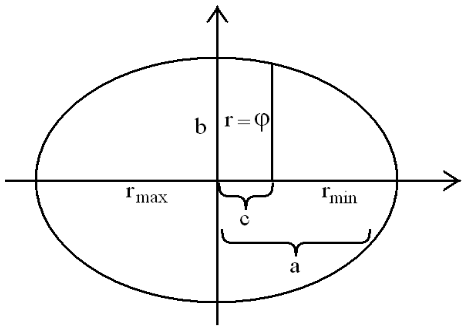
$\varepsilon=1$ - parabola (kitiku/kozmikus sebességek)
$\varepsilon>1$ - hiperbola
$\varepsilon=0$ - körpálya

Kepler III. törvényének levezetéséhez felhasználjuk az egyszerűen belátható $b=\sqrt{p\cdot a}$ összefüggést:

Harmadik törvény.: $\frac{a^3}{T^2}$ minden bolygóra ugyanaz az állandó

Bizonyítás:

Felületi sebesség: $\frac{df}{dt}=\boxed{\frac{l}{2\cdot m}=\frac{\pi\cdot a\cdot b}{T}}$



$$\frac{l}{2\cdot m}=\frac{\pi\cdot a\cdot p^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}}{T}$$

$$\frac{l}{2\cdot m\cdot\pi\cdot p^{\frac{1}{2}}}=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{T} \quad /^2$$

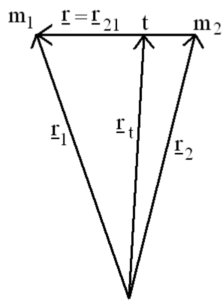
$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{l^2}{4\cdot m^2\cdot\pi^2\cdot p}=\frac{l^2\cdot m\cdot A}{4\cdot m^2\cdot\pi^2\cdot l^2}=\frac{A}{4\cdot m\cdot\pi^2}=\frac{G\cdot m\cdot M}{4\cdot m\cdot\pi^2}=\frac{G\cdot M}{4\cdot\pi^2}$$

Valóban m-től független, minden „bolygóra” azonos állandó.
A bolygómozgás problémája (az ún. kéttestprobléma) visszavezethető az „előproblémára”, így eljutunk Kepler törvényeihez.

3.2. Kéttestprobléma (Kepler törvények)

A kéttestproblémát visszavezetjük egytest problémára (az előproblémára):
m_1, m_2 egymás hatása alatt mozog: (pl. m_1 a bolygó és m_2 a Nap)

(1) $m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \vec{F}_{21}$



Relatív helyvektor: $\vec{r}_{21} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \equiv \vec{r}$
$|\vec{r}_{21}| = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}| = r$

A tömegközéppont helyvektora: $\vec{r}_T \equiv \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

(2) $m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$\frac{(1)+(2)}{m_1 + m_2} = \underbrace{\frac{m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}}_{\ddot{\vec{r}}_t = 0} = 0$ a tömegközéppont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{r}_t &= \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_t + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_t - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r} \end{aligned}\right.$$

$$m_2 \cdot m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 - m_2 \cdot m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 = m_1 \cdot m_2 \cdot \ddot{\vec{r}} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + G \cdot \frac{m_1 \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{(-\vec{r})}{r} =$$
$$= -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot (m_1 + m_2)$$

$\mu \equiv \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ redukált tömeg

$$\boxed{\mu \cdot \ddot{\vec{r}} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}}$$

A kéttestproblémát visszavezettük egytest problémára azáltal, hogy a tömeg helyett redukált tömeget használtunk.
$\vec{l} = \mu \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ relatív impulzusmomentum

Helyezzük az origót a tömegközéppontba:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r} = \frac{1}{\underbrace{1 + \frac{m}{M}}_{\approx 1}} \cdot \vec{r} \qquad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r} = -\frac{\frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}} \cdot \vec{r}$$

$\vec{r}$ az m_2-ből (a Napból) az m_1-be (a bolygóhoz) húzott sugár: Kepler I. és II. törvénye: a Napból a bolygóhoz $(\vec{r}_1)$ húzott vezérsugár $(\vec{r})$ egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol, a pálya ellipszis, a Nap $(\vec{r}_2)$ maga is ellipszis pályán mozog.

Kepler III.: $\frac{l}{2\cdot\mu}=\frac{\pi\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot p^{\frac{1}{2}}}{T}$; $p=\frac{l^2}{\mu\cdot A}$, $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2\cdot E}{\mu}\cdot\frac{l^2}{A^2}}$; $A=G\cdot m_1\cdot m_2$

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{A}{4\cdot\mu\cdot\pi^2}=\frac{G\cdot m_1\cdot m_2\cdot(m_1+m_2)}{4\cdot\pi^2\cdot m_1\cdot m_2}=\frac{G\cdot(m_1+m_2)}{4\cdot\pi^2}=\frac{G\cdot(m+M)}{4\cdot\pi^2}=\frac{G\cdot M}{4\cdot\pi^2}\cdot\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

A Naprendszer bolygóira $\frac{a^3}{T^2}$ jó közelítéssel állandó, a korrekció legfeljebb néhány ezrelék.

A pontos harmadik törvény a kettős csillagok tömegének meghatározásához fontos.
Hasznos honlap: http://www.cuug.ab.ca/~kmcclary/ORRERY/index.html

3.3. Feladatok

3.3.1. Az anyagi pontot az O_1 centrum vonzza, az O_2 taszítja a távolsággal arányos erővel. Az arányossági tényező mindkét centrumra azonos. Igazoljuk, hogy tetszőleges kezdeti feltételek mellett a pálya parabola!

3.3.2. Az O_1 és O_2 centrumok a közöttük lévő m tömegű anyagi pontot a távolsággal arányos erővel vonzzák. Az arányossági tényező c. Határozzuk meg az $O_1 O_2$ irányú egyenes vonalú rezgések T rezgésidejét!

3.3.3. Egy bolygó ε excentricitású ellipszis pályán mozog. Sebessége napközelben v_p. Mekkora a sebessége (v_a) naptávolban?

3.3.4. Határozza meg a Földre illetve a Napra vonatkozó kozmikus sebességeket!
a) Azt a sebességet, amellyel egy műhold alacsony körpályán tud keringeni. (Ún. első kozmikus sebesség)
b) Azt a sebességet, amellyel egy test el tudja hagyni a Föld vonzáskörét! (Parabolikus, szökési, vagy második kozmikus sebesség)
c) Azt a sebességet, amellyel egy test el tudja hagyni a Naprendszert! (Ún. harmadik kozmikus sebesség)

3.3.5. Igazoljuk, hogy a Kepler-problémában
a) $v^2=G\cdot M\cdot\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$!
b) a sebesség az ellipszis kistengelyének végpontjaiban $v_B=\sqrt{G\cdot\frac{M}{a}}$!
c) a pálya bármelyik átmérőjének két végpontjához tartozó v_1 és v_2 sebességek mértani közepe állandó: $\sqrt{v_1\cdot v_2}=\sqrt{G\cdot\frac{M}{a}}$!

3.3.6. A Föld felületétől 300 km magasan egy műholdat körpályára akarnak állítani. Mennyire változik meg a perigeum, ha
a) a sebesség iránya a kör érintőjétől 1°-kal eltér a Föld felé?
b) a sebesség 1 m/s-al kisebb a tervezettnél?