5. Szabad pontrendszerek mechanikai alapelvei, n-testprobléma, Galilei-féle relativitási elv

$m_1, m_2, \dots, m_n$
$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$
$\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n$ 6n db koordináta és sebességkomponens

5.1. Dinamika

Mozgásegyenletek: $m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{n} \vec{F}_{i1}$, ahol $\vec{F}_1$ jelöli a külső erők eredőjét és $\vec{F}_{i1}$ az m_i részéről az m_1-re kifejtett erőt (belső erők).

Egy pontszerű test nem gyakorol erőt saját magára, ezért $i \neq 1$.

$$\boxed{m_k \cdot \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \vec{F}_{ik}} \quad (k=1,\dots,n)$$ 6n-rendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer

5.2. A belső erők tulajdonságai (posztulátumok)

1. a belső erőknek megvan a hatás-ellenhatás tulajdonságuk:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$$

2. a tömegpontok közti kölcsönhatás centrális:

$$\vec{r}_{ij} \overset{def.}{=} \vec{r}_i - \vec{r}_j$$

$$r_{ij} = |\vec{r}_{ij}| = r_{ji}$$

$$\vec{F}_{ji} \| \vec{r}_{ij}$$

3. a kölcsönhatás szigorúan centrális:

$$\vec{F}_{ji} = \underbrace{\overbrace{f_{ij}(r_{ij})}^{\text{nagysága csak a távolságuktól függ}}}_{\textit{szigorúan}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}}_{\textit{centrális}}$$

$f_{ji}(x) = f_{ij}(x)$ szimmetrikus

Ez a posztulátum magában foglalja az előző kettőt is.

5.3. Következmények

Definíció: $\vec{r}_t \overset{def.}{=} \dfrac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + \ldots + m_n \cdot \vec{r}_n}{m_1 + \ldots + m_n} = \dfrac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i}$ a tömegekkel súlyozott átlaghelyzet; tömegközéppont

$$\dot{\vec{r}}_t = \frac{\sum m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}{\sum m_i}$$ a tömegközéppont sebessége

$$\ddot{\vec{r}}_t = \frac{\sum m_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i}{\sum m_i}$$ a tömegközéppont gyorsulása

5.3.1. Tömegközéppont tétel

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \ddot{\vec{r}}_k}_{} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k}_{} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \vec{F}_{ik}}_{}$$

$$\left(\sum m_i \right) \cdot \ddot{\vec{r}}_t = \vec{F}^{\text{összes külső}} + \qquad 0$$

Ha a belső erőket egy pontba toljuk, akkor ott az összegük nulla, mert $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$

Tétel: a tömegközéppont úgy mozog, mintha az összes külső erő erre a pontra hatna és a rendszer teljes tömege ebben a pontban lenne egyesítve. (Ez az első posztulátumból következik.)

5.3.2. Impulzustétel

Vezessük be a $\vec{p}_k \overset{def.}{=} m_k \cdot \dot{\vec{r}}_k$ mennyiséget, ami a k-adik részecske impulzusa, és

a $\vec{P} \overset{def.}{=} \sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k$ mennyiséget, ami a mechanikai rendszer összimpulzusa.

Tétel: $\boxed{\dot{\vec{P}} = \sum_k \dot{\vec{p}}_k = \sum_k m_k \cdot \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}^{\text{összes külső}}}$

A mechanikai rendszer összimpulzusának időderiváltja egyenlő a rendszerre ható összes külső erővel.

5.3.3. Impulzusnyomaték-tétel

Definíció: a k-adik tömegpont origóra vonatkoztatott impulzusnyomatéka: $\vec{r}_k \times \underbrace{\vec{p}_k}_{m_k \cdot \dot{\vec{r}}_k} = \vec{l}_k$

$\vec{L} \overset{def.}{=} \sum_{k=1}^{n} \vec{l}_k$ a mechanikai rendszer impulzusnyomatéka (impulzusmomentuma)

Tétel: $\boxed{\dot{\vec{L}} \overset{def.}{=} \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k}$

Az impulzusnyomaték időderiváltja egyenlő a külső erők forgatónyomatékainak összegével.

Bizonyítás:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_k \times m_k \cdot \dot{\vec{r}}_k\right) = \sum_k \left(\underbrace{\dot{\vec{r}}_k \times m_k \cdot \dot{\vec{r}}_k}_{0} + \vec{r}_k \times \underbrace{m_k \cdot \ddot{\vec{r}}_k}_{\vec{F}_k + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \vec{F}_{ik}}\right) = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \underbrace{\sum_k \vec{r}_k \times \sum_{\substack{i\\ i\neq k}} \vec{F}_{ik}}_{\vec{A}}$$

Be kell látni, hogy a belső erők forgatónyomatékainak összege nulla:

$$\vec{A} = \sum_k \sum_{\substack{i\\ i\neq k}} \vec{r}_k \times \vec{F}_{ik}$$

$$\vec{A} = \sum_i \sum_{\substack{k\\ i\neq k}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ki}$$

$$2 \cdot \vec{A} = \sum_i \sum_{\substack{k\\ i\neq k}} \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_{ik} + \vec{r}_i \times \underbrace{\vec{F}_{ki}}_{-\vec{F}_{ik}}\right) = \sum_i \sum_{\substack{k\\ i\neq k}} \underbrace{(\vec{r}_k - \vec{r}_i)}_{\vec{r}_{ki}} \times \vec{F}_{ik} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = 0$$

5.3.4. Munkatétel (energiatétel)

$$\vec{F}_{ij} = f_{ij}(r_{ij}) \cdot \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \qquad\qquad U_{ji}(x) \overset{def.}{=} -\int \underbrace{f_{ij}(x)}_{\substack{potenciális\\ energia}}\, dx$$

Emlékeztető: negatív gradiens:

$$-\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} U_{ji}(r_{ij}) = \vec{F}_{ji}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} U_{ji}\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}\right)$$

$$f_{ij}(r_{ij}) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot (x_i - x_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}} + (z_i - z_j)^2 = \underbrace{f_{ij}(r_{ij}) \cdot}_{(\vec{F}_{ji})_x} \frac{(\vec{r}_{ij})_x}{r_{ij}}$$

A belső energiákból származó potenciális energia:

$$\boxed{U_b(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_n) \overset{def.}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} U_{ji}(r_{ij})} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} U_{ji}(\vec{r}_{ij})$$

A belső erők összege (az i-edik részecskére ható erők összege): $\boxed{-\frac{\partial U_b}{\partial \vec{r}_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ji}}$

$E = T + U_b$, ahol T a rendszer kinetikus energiája

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \dot{\vec{r}}^2$$

Tegyük fel, hogy ismert a rendszer mozgása: $\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_n(t), \dot{\vec{r}}_1(t), \ldots, \dot{\vec{r}}_n(t)$

$$\frac{dU_b}{dt} = \frac{\partial U_b}{\partial \vec{r}_1} \cdot \dot{\vec{r}}_1 + \frac{\partial U_b}{\partial \vec{r}_2} \cdot \dot{\vec{r}}_2 + \ldots + \frac{\partial U_b}{\partial \vec{r}_n} \cdot \dot{\vec{r}}_n = -\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{jl} \cdot \dot{\vec{r}}_1 + \ldots = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{T} + \dot{U}_b = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ji} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ji} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \vec{F}_{ji} \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}_{teljesítmény}$$

Munkatétel: (energiatétel, energiamérleg-tétel)

A mozgási és a belső potenciális energia összegének időderiváltja egyenlő a külső erők összes teljesítményével.

$$\int_1^2 \frac{dE}{dt} dt = \Delta E = \Delta T + \Delta U_b = \int_1^2 \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \, dt = W_{1 \to 2}^{külső}$$

Energiatétel:

$$\boxed{\Delta T + \Delta U_b = W_{1 \to 2}^{külső}}$$

A mozgási és a belső potenciális energia összegének megváltozása egyenlő a külső erők összes munkájával.

5.4. n-testprobléma

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ egymás hatása alatt mozog (nincsenek külső erők)
A kölcsönhatások szigorúan centrálisak és szimmetrikusak.

$\boxed{m_k \cdot \ddot{\vec{r}}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \vec{F}_{ik}}$ $(k=1, \ldots, n)$ 6n-rendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer

Tétel:

(1) a tömegközéppont egyenes vonalú egyenletes mozgást végez
(2) a rendszer impulzusa a mozgás folyamán állandó
(3) a teljes impulzusnyomaték a mozgás folyamán állandó
(4) $E = T + U_b$ állandó

A mozgásegyenlete 10 első integrálja:

Matematikai probléma: keressünk olyan $f(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_n, t)$ függvényeket, amelyek a mozgás folyamán állandók: $f(\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_n(t), \dot{\vec{r}}_1(t), \ldots, \dot{\vec{r}}_n(t), t) = \textit{állandó}$ (mozgásállandók, első integrálok), ahol $\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_n(t)$ kielégíti a mozgásegyenleteket.

Tétel: n-testprobléma esetén a mozgásegyenleteknek van 10 első integrálja, nevezetesen:

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$ három első integrál

(2) $\sum_i m_i \cdot (\vec{r}_i - \dot{\vec{r}}_i \cdot t)$ három első integrál

(3) $\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ három első integrál

(4) $\sum_i \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i^2 + U_b(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n)$ egy első integrál

5.5. Galilei-féle relativitási elv, Galilei-csoport

Galilei-féle relativitási elv:

A mechanika törvényei azonosak az egymáshoz képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerekben.
Jelentése: a mozgásegyenlet invariáns az $\vec{r} \rightarrow \vec{r}\,'=\vec{r}+\vec{V}\cdot t$ úgynevezett Galilei-transzformációval szemben.
Ennek az a következménye (ez amiatt igaz), hogy az erőtörvény csak a „relatív helyzettől” és a relatív sebességtől (a környezethez viszonyított sebesség) függ.

A klasszikus, nem relativisztikus mechanika téridő szimmetriái:

10 paraméteres csoport: $G_+^\uparrow$ $\rightarrow$ Galilei-csoport

1) $\vec{r} \rightarrow \vec{r}\,'=\vec{r}+\vec{a}$: a kezdőpont térbeli eltolása (3 adat) $\vec{a}$
a tér homogén

2) $\vec{r} \rightarrow \vec{r}\,'=\vec{r}+\vec{V}\cdot t$: áttérés az egyenletesen haladó K'-re (3 adat) $\vec{V}$
Galilei-transzformáció

3) $\vec{r} \rightarrow \vec{r}\,'=R\cdot\vec{r}$: áttérés az elforgatott K'-re (3 adat) $\hat{n}, \varphi$
hossz és szögtartó transzformáció

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \left(R_{ij}\right)_{3\times 3}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$r_i' = R_{ij}\cdot r_j \qquad \left(R_{ik}\,R_{il}=\delta_{kl}\right) \qquad R\cdot R^T = R^T\cdot R = E\,; \quad det\,R=+1\,; \quad SO(3)$$

$$SO(3)=\{R | R^T\cdot R = R\cdot R^T = E\,,\ \ det\,R=+1\}$$ speciális ortogonális csoport

forgatás: tengely $(\hat{n})$ 2 adat; forgatás szöge (φ) 1 adat
$R\in SO(3)$ megadható $\hat{n}, \varphi$-vel
a fizika törvényei forgásinvariánsak, a tér izotrop

4) $t \rightarrow t'=t+s$: időeltolás (1 adat) s
a fizikai törvények időeltolás invariánsak, az idő homogén

Csoport: van egy csoportművelet: (ún. szorzás)

$R_1,\ R_2 \quad (R_1\cdot R_2)\cdot\vec{r}=R_1\cdot(R_2\cdot\vec{r})$, mátrix-szorzás

$$(R_1\cdot R_2)^T\cdot(R_1\cdot R_2)=(R_2^T\cdot R_1^T)\cdot(R_1\cdot R_2)=R_2^T\cdot\underbrace{R_1^T\cdot R_1}_{E}\cdot R_2=E$$

$$det(R_1\cdot R_2)=\underbrace{det\,R_1}_{1}\cdot\underbrace{det\,R_2}_{1}=1$$

$$R_1\cdot R_2\in SO(3)$$

R^{-1} létezik, mert $det\,R\neq 0$
$SO(3)$ csoport

Forgatás térben:

$$\sum_{i=1}^{3} \underbrace{R_{ij}}_{(R^T)_{ji}} \cdot R_{ik} = \delta_{jk} \quad \Rightarrow \quad \text{6 egyenlet, 9 komponens} \quad \Rightarrow \quad \text{3 független komponens lehet}$$

Aktív transzformáció: a fizikai rendszert transzformáljuk
Passzív transzformáció: a koordinátarendszert transzformáljuk

Kombinált műveletek: téridő transzformáció: $g \in G_+^{\uparrow}$

$$\vec{r} \xrightarrow{g} \vec{r}\,' = R \cdot \vec{r} + \vec{V} \cdot t + \vec{a}$$
$$t \rightarrow t' = \lambda \cdot t + s$$

$R \in SO(3),\ \det R = +1,\ \lambda = +1$

$g(R,\ \vec{V},\ \vec{a},\ s)$ 10 adat

Értelmezzük $g_1 \cdot g_2$-t

$$g_3 \equiv g_1 \cdot g_2 \left(\underbrace{R_2 \cdot R_1}_{R_3},\ \underbrace{R_2 \cdot \vec{V}_1 + \vec{V}_2}_{\vec{V}_3},\ \underbrace{R_2 \cdot \vec{a}_1 + s_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{a}_2}_{\vec{a}_3},\ \underbrace{s_2 + s_1}_{s_3} \right)$$

A szorzás asszociatív.
Van egység: $\vec{r} \rightarrow \vec{r}\,' = \vec{r} \quad (R = E,\ \vec{V} = \vec{0},\ \vec{a} = \vec{0},\ s = 0)$

Van inverz: $g^{-1}(R^T,\ -R^T \cdot \vec{V},\ s \cdot R^T \cdot \vec{V} - R^T \cdot \vec{a},\ -s)$ (Bizonyítás Hf.)

A Galilei-csoport egy 10 paraméteres csoport.

Bizonyítsuk a szorzást:

$$g_1 \begin{Bmatrix} \vec{r}\,' = R_1 \cdot \vec{r} + \vec{V}_1 \cdot t + \vec{a}_1 \\ t' = t + s_1 \end{Bmatrix}$$

$$g_2 \cdot g_1 \begin{Bmatrix} \vec{r}\,'' = R_2 \cdot (R_1 \cdot \vec{r} + \vec{V}_1 \cdot t + \vec{a}_1) + \vec{V}_2 \cdot (t + s_1) + \vec{a}_2 \\ t'' = (t + s_1) + s_2 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{r}\,'' = R_2 \cdot R_1 \cdot \vec{r} + R_2 \cdot \vec{V}_1 \cdot t + R_2 \cdot \vec{a}_1 + \vec{V}_2 \cdot t + \vec{V}_2 \cdot s_1 + \vec{a}_2 =$$
$$= \underbrace{R_2 \cdot R_1}_{R_3} \cdot \vec{r} + \underbrace{(R_2 \cdot \vec{V}_1 + \vec{V}_2)}_{\vec{V}_3} \cdot t + \underbrace{R_2 \cdot \vec{a}_1 + \vec{V}_2 \cdot s_1 + \vec{a}_2}_{\vec{a}_3}$$

$$t'' = t + \underbrace{(s_1 + s_2)}_{s_3}$$

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = (E,\ \vec{0},\ \vec{0},\ 0) = g_0$$

Galilei-féle relativitási elv: a mechanikai törvények invariánsak a Galilei-csoporttal szemben.

5.6. Feladatok

5.6.1. Azt találjuk, hogy egy kettőscsillagban a két égitest egymástól mért távolsága állandó.
a) Milyen pályán mozog a két csillag?
b) Mekkora a keringés periódusideje?

5.6.2. Egy nyugvó M tömegű test felé u sebességű m tömegű test közeledik, majd rugalmasan ütköznek. Határozzuk meg az ütközés utáni sebességeket, feltételezve, hogy az ütközés centrális! Vizsgáljuk az $m \ll M$, az $M \ll m$ és az $M = m$ esteket!

5.6.3. Egy részecske rugalmasan ütközik egy másik, nyugvó részecskével. Az ütközés után pályája ϑ_1 szöget zár be a becsapódási iránnyal; az eredetileg nyugvó részecske pályája pedig ϑ_2 szöget (az ellenkező irányban). Mutassuk meg, hogy e két könnyen mérhető adat ismerete elegendő az tömeg- és sebességarányok meghatározásához. Adjuk is meg ezeket az arányokat!

5.6.4. Mekkora lehet az előző feladatban a becsapódó részecske maximális eltérülési szöge, ha a nyugvó részecske tömege kisebb a becsapódóénál?