6. Kényszereknek alávetett rendszerek

6.1. Kényszerfeltételek

A koordinátáknak és sebességeknek előírt egyenleteket kell kielégítenie a mozgás folyamán. (Ezeket a feltételeket, egyenleteket is anyagi kölcsönhatások biztosítják, de ezek a kölcsönhatások nagyon bonyolultak lehetnek, ezért egyszerűbb, ha a feltételeket mint egyenleteket vesszük figyelembe.)

Példák:

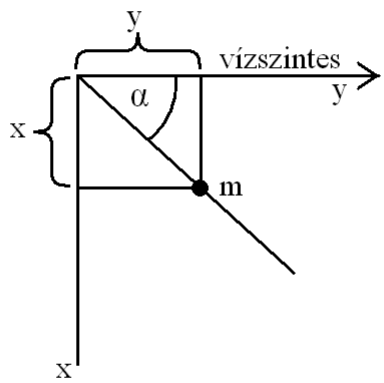
1. **Nyugvó lejtő:**

$$\frac{x}{y} = tg(\alpha)$$

kényszerfeltétel: $\boxed{x - tg(\alpha) \cdot y = 0}$

z-re nincs kikötés

sebességekre: $\boxed{\dot{x} - tg(\alpha) \cdot \dot{y} = 0}$



$\vec{l} = (1, -tg(\alpha), 0)$

$\vec{l} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$ itt $\vec{l} = konstans$, vagyis nem függ a koordinátáktól és az időtől

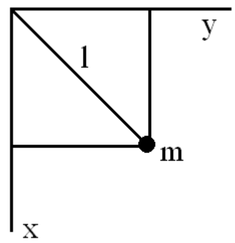
$$f(x, y, z, t) = x - y \cdot tg(\alpha)$$

$$l_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 1; \quad l_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -tg(\alpha); \quad l_z = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 = D$$

időtől független geometriai kényszer (holonom szkleronom rendszer)

2. **Matematikai inga:**

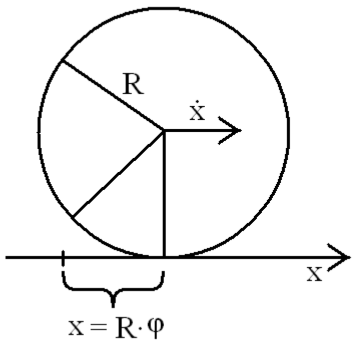


kényszerfeltétel: $\boxed{x^2 + y^2 - l^2 = 0}$

sebességekre: $\boxed{2 \cdot x \cdot \dot{x} + 2 \cdot y \cdot \dot{y} = 0}$

időfüggetlen geometriai kényszer

3. **Tiszta gördülés:**



$$x = R \cdot \varphi$$

$$\boxed{\dot{x} = R \cdot \dot{\varphi}}$$

$$\dot{x} - R \cdot \dot{\varphi} = 0$$

ha a mozgás lineáris, akkor geometriai kényszer (lásd: 6. példa)

4. **Kettős csiga:**

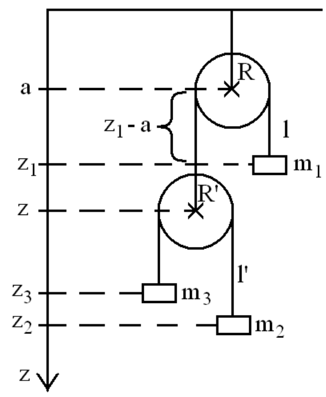
$l = R\cdot\pi + z_1 - a + z - a$

$z = d - z_1 \quad (d = \acute{a}lland\acute{o})$

$l' = R'\cdot\pi + z_2 - z + z_3 - z$

$z_2 + z_3 - 2\cdot z = d' \quad (d' = \acute{a}lland\acute{o})$

$\boxed{2\cdot z_1 + z_2 + z_3 = c}$



geometriai kényszer

$2\cdot\dot{z}_1 + \dot{z}_2 + \dot{z}_3 = 0$

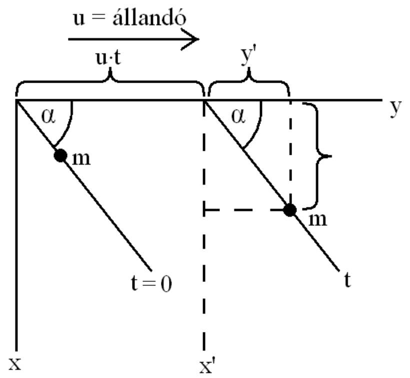
$\vec{l}_1 = (0,0,2)$

$\vec{l}_2 = (0,0,1)$

$\vec{l}_3 = (0,0,1)$

$D = 0$

5. **Mozgó lejtő:**



$\frac{x'}{y'} = tg(\alpha) \qquad x = x'$

$y' = y - u\cdot t$

$\boxed{x - tg(\alpha)\cdot y + tg(\alpha)\cdot u\cdot t = 0}$

$\dot{x} - tg(\alpha)\cdot\dot{y} + tg(\alpha)\cdot u = 0$

geometriai kényszer, de időfüggő

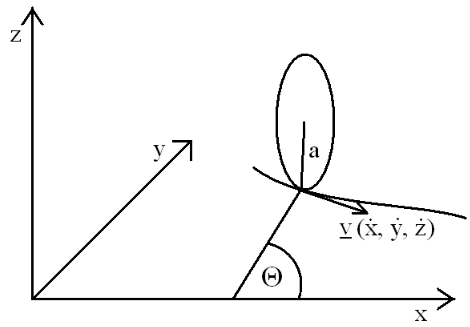
$\vec{l} = (1, -tg(\alpha), 0), \quad D = tg(\alpha)\cdot u$

6. **Függőleges síkú korong gördülése vízszintes síkon:**

a korong középpontja: (x, y, a)

forgásszög: Φ

a korong tengelyének és az x-tengelynek a hajlásszöge: Θ



$v = a\cdot\dot{\Phi}$ a gördülés feltétele (nincs csúszás)

$\dot{x} = v\cdot\sin(\Theta)$

$\dot{y} = -v\cdot\cos(\Theta)$

$\downarrow\downarrow$

kényszerfeltételek: $\boxed{\begin{array}{l} \dot{x} - a\cdot\dot{\Phi}\cdot\sin(\Theta) = 0 \\ \dot{y} + a\cdot\dot{\Phi}\cdot\cos(\Theta) = 0 \end{array}}$

kinematikai kényszer

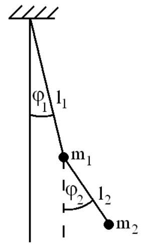
Nem küszöbölhető ki a feltételekből a sebesség, vagyis nem tudjuk csupán a koordinátákkal felírni.

$D = 0$

anholonom mechanikai rendszer, a többi példa holonom

7. **Merev test:**
   olyan test, melyben bármely két pont távolsága a mozgás folyamán állandó
   adott n db tömegpont: $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tömegek
   $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ helyvektorok
   kössük össze őket súlytalan rudakkal
   tegyük fel, hogy $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = d_{ij} = \acute{a}lland\acute{o} \quad \forall i, j = 1,2, \ldots, n$
   $\sqrt{(x_i - x_j)^2 + y^2 + z^2}$
   $\binom{n}{2}$ feltétel, ennyi egyenlet van
   Egy merev test megadásához általában elegendő 6 adat, ha a test lineáris, akkor elég 5 adat.
   geometriai kényszer

8. **Kettős inga:**



   geometriai kényszer
   Hf.: írja fel a kényszerfeltételeket!

A kényszerfeltételeket írjuk fel közös alakban!
mechanikai rendszer: $m_1, m_2, \ldots, m_n$
koordináták: $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$
sebességek: $\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \ldots, \dot{\vec{r}}_n$
A közös felírás: $\vec{l}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 + \vec{l}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2 + \ldots + \vec{l}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n + D = 0$, ahol $D, \vec{l}_i$-k függvényei a koordinátáknak, esetleg az időnek: $\vec{l}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t)$ és $D(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t)$

Definíció: kényszerfeltétel: a $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i \cdot \vec{v}_i + D = 0}$ alakú, sebességekben lineáris egyenlet.

6.2. A kényszerfeltételek osztályozása

- geometriai vagy integrálható, ha van olyan $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t)$, hogy $\vec{l}_i = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i}$ és

  $D = \frac{\partial f}{\partial t}$

  $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0} = \frac{d}{dt} f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t)$$

  $$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) = \acute{a}lland\acute{o}$$

  $$\int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt = f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) = \acute{a}lland\acute{o}$$

- kinematikai, ha nincs ilyen függvény

Időfüggés szempontjából:
- időfüggetlen vagy stacionárius kényszerek: $\vec{l}_i = \vec{l}_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n)$ és $D = 0$
- időfüggő vagy nem-stacionárius kényszerek

6.3. A mechanikai rendszerek osztályozása

tömegpontok: $m_1, m_2, \dots, m_n$

koordináták (3n db): $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$

sebességek: $\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_n$

belső és külső erők: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ún. alkalmazott, vagy szabaderők

kényszerfeltételek (r db): $\sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i^{(\alpha)} \cdot \vec{v}_i + D^{(\alpha)} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r)$

szabadsági fok: $f = 3 \cdot n - r$

Ha minden kényszer geometriai, akkor a mechanikai rendszer **holonom** rendszer, egyébként **anholonom**.
Ha minden kényszer időfüggetlen, akkor a mechanikai rendszer **szkleronom** rendszer, egyébként **reonom**.
Legegyszerűbb rendszerek a szkleronom, holonom rendszerek.

6.4. Virtuális elmozdulás

A $\delta\vec{r}_1, \dots, \delta\vec{r}_n$ 3n koordinátát virtuális elmozdulásnak nevezzük, ha kielégítik a $\sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i^{(\alpha)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r)$ egyenletrendszert.

6.5. Valódi elmozdulás

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i^{(\alpha)} \cdot \vec{v}_i + D^{(\alpha)} = 0 \qquad / \cdot dt$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i^{(\alpha)} \cdot \underbrace{\vec{v}_i dt}_{d\vec{r}_i} + D^{(\alpha)} dt = 0} \qquad (\alpha = 1, \dots, r)$$

Ha $d\vec{r}_1, \dots, d\vec{r}_n$ kielégíti a fenti egyenletrendszert, akkor $d\vec{r}_1, \dots, d\vec{r}_n$-et a dt idő alatt bekövetkező valódi elmozdulásnak nevezzük.
Észrevétel: két valódi elmozdulás különbsége virtuális elmozdulás (ha dt közös, vagyis az időtartamok megegyeznek)

$$\begin{array}{rl} & \sum_i \vec{l}_i^{(\alpha)} \cdot d\vec{r}_i + D^{(\alpha)} dt = 0 \\ (-1) \cdot / & \sum_i \vec{l}_i^{(\alpha)} \cdot d\vec{r}_i{}' + D^{(\alpha)} dt = 0 \\ \hline & \sum_i \vec{l}_i^{(\alpha)} \cdot \underbrace{\left(d\vec{r}_i - d\vec{r}_i{}' \right)}_{\delta\vec{r}_i} = 0 \end{array}$$

Ha a rendszer szkleronom, akkor a valódi és virtuális elmozdulások azonosak.

Például:

1. Álló lejtő:

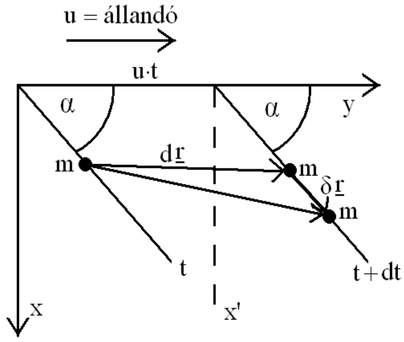
   $\vec{l}\cdot\delta\vec{r}=0$, ahol $\vec{l}=(1,-tg(\alpha),0)$

   $\vec{l}$ merőleges a lejtőre

   a lejtő egyenlete: $f(x,y,z)=x-tg(\alpha)\cdot y=0$ nívófelület

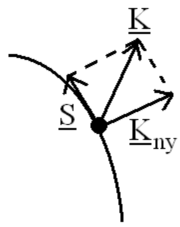
   $\vec{l}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ merőleges a lejtőre $\Rightarrow$ $\delta\vec{r}$ a lejtő síkjába esik

2. Mozgó lejtő:



$\delta\vec{r}$ olyan (nem valódi) elmozdulás, mintha a lejtő mozgása befagyott volna. Azaz az elmozdulás végtelen gyorsan (idő nélkül) következne be.

6.6. A dinamika általános egyenlete



$m_1, m_2, \ldots, m_n$

$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ szabaderők

Általában $m_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i\neq\vec{F}_i$

$\vec{K}_i\overset{def.}{=}m_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i$ kényszererők definíciója.

Az i-edik tömegpont mozgásegyenlete: $m_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i=\vec{F}_i+\vec{K}_i \quad (i=1,\ldots,n)$

Elv:

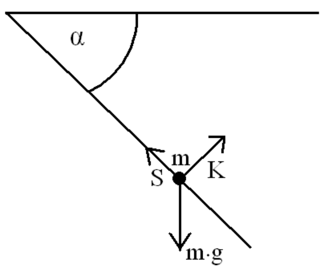
$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\vec{K}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0}$ alapelv

A tapasztalat szerint a kényszererők munkája virtuális elmozdulás során nulla.
Egy függvény nívófelülete legyen: $f(x,y,z)=0$, legyen sima felület.

$\delta\vec{r}$ merőleges a felülethez tartozó $\vec{l}$-ra

$\vec{l}=\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}$ merőleges a felületre

$\vec{l}\cdot\delta\vec{r}=0$



Ha $\vec{K}\cdot\delta\vec{r}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{K}\,\|\,\vec{l}$

$\vec{K}=\lambda\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{r}}$

Ez az elv csak súrlódásmentesen érvényes, vagyis a kényszererők közé nem tartozhat a súrlódás, ezért a szabaderők közé soroljuk.

$S=\mu\cdot K$

A kényszererők virtuális munkája nulla:

$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i-m_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0}$ **a dinamika általános egyenlete** (DÁE)

6.7. Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletek

A mozgás folyamán teljesülnie kell a kényszerfeltételeknek.
A kényszerfeltételeket λ-val szorozva és összeadva, ezt az összeget a dinamika általános egyenletéhez hozzáadva egy 3n tagú kifejezést kapunk, amely nullával egyenlő:

$$\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\cdot\sum_{i=1}^{n}\vec{l}_i^{(\alpha)}\cdot\delta\vec{r}_i=0\qquad(\alpha=1,\dots,r\,;\;\; r<3\cdot n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\cdot\vec{l}_i^{(\alpha)}\cdot\delta\vec{r}_i=0\qquad + D\acute{A}E$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i+\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\cdot\vec{l}_i^{(\alpha)}-m_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0\qquad\text{3n tag}$$

A $\delta x_{1,}\ \delta y_{1,}\ \delta z_{1,}\ \delta x_{2,}\ \dots,\ \delta z_n$ 3n komponens közül csak $3\cdot n-r$ független koordináta lehet.
A 3n tagot csoportosítsuk:
- $3\cdot n-r$ független komponensre
- r függő komponensre

Válasszuk meg $\lambda_1,\dots,\lambda_r$-eket úgy, hogy a függő tagok mind kiessenek.

$$\underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ \textit{függetlenek}}}^{n}\left(\vec{F}_i+\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\cdot\vec{l}_i^{(\alpha)}-m_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i}_{3\cdot n-r\ tag}+\underbrace{\sum_{\substack{i=1\\ \textit{függőek}}}^{n}\left(\vec{F}_i+\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\cdot\vec{l}_i^{(\alpha)}-m_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i}_{\substack{r\ tag\\ \text{legyen nulla}}}=0$$

A független koordináták együtthatóinak ekkor szükséges nullának lenni.

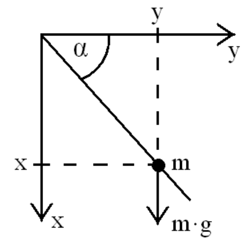
Ezzel mindig elérhető: $\boxed{m_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i=\vec{F}_i+\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\cdot\vec{l}_i^{(\alpha)}}$ $(i=1,\dots,r)$ 3n egyenlet

$$\begin{matrix}\vec{r}_1(t)\\ \vdots\\ \vec{r}_n(t)\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_r\end{matrix}\qquad 3\cdot n+r\ \text{ db ismeretlen, }\ 3\cdot n+r\ \text{ db egyenlet}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i^{(\alpha)} \cdot \dot{\vec{r}}_i + D^{(\alpha)} = 0} \qquad (\alpha = 1, \ldots, r) \quad \text{r db egyenlet}$$

A fenti $3 \cdot n + r$ db bekeretezett egyenletet Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenleteknek nevezzük.

Példa: mozgás nyugvó lejtőn:



$$\frac{x}{y} = tg(\alpha)$$
$$\dot{x} - tg(\alpha) \cdot \dot{y} = 0$$
$$\vec{l} = (1, -tg(\alpha), 0)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} m \cdot \ddot{\vec{r}} = m \cdot \vec{g} + \lambda \cdot \vec{l} \\ \vec{l} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \end{array}} \quad \text{Lagrange-féle elsőfajú mozgásegyenletek}$$

Komponensekben:

$$\left[\begin{array}{l} m \cdot \ddot{x} = m \cdot g + \lambda \cdot 1 = m \cdot g + \lambda \\ m \cdot \ddot{y} = m \cdot 0 - tg(\alpha) \cdot \lambda = -\lambda \cdot tg(\alpha) \\ m \cdot \ddot{z} = m \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = 0 \\ \dot{x} - tg(\alpha) \cdot \dot{y} = 0 \end{array}\right.$$

Differenciáljuk a kényszert még egyszer:

$$\ddot{x} - tg(\alpha) \cdot \ddot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \ddot{y} \cdot tg(\alpha)$$

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot \ddot{y} \cdot tg(\alpha) \quad \Rightarrow \quad m \cdot \ddot{y} = \frac{m \cdot \ddot{x}}{tg(\alpha)} = -\lambda \cdot tg(\alpha) \quad \Rightarrow \quad m \cdot \ddot{x} = -\lambda \cdot tg^2(\alpha) = m \cdot g + \lambda \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda = -\frac{m \cdot g}{1 + tg^2(\alpha)} = -m \cdot g \cdot \cos^2(\alpha)}$$

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot g - m \cdot g \cdot \cos^2(\alpha) = m \cdot g \cdot \left(1 - \cos^2(\alpha)\right) = m \cdot g \cdot \sin^2(\alpha)$$

$$\ddot{y} = \frac{\ddot{x}}{tg(\alpha)} = \frac{g \cdot \sin^2(\alpha)}{tg(\alpha)} = g \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{x} = g \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \\ \ddot{y} = g \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ \ddot{z} = 0 \end{array}}$$

$$K_x = \lambda \cdot 1 = \lambda = -m \cdot g \cdot \cos^2(\alpha)$$
$$K_y = \lambda \cdot \left(-tg(\alpha)\right) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$
$$K_z = \lambda \cdot 0 = 0$$

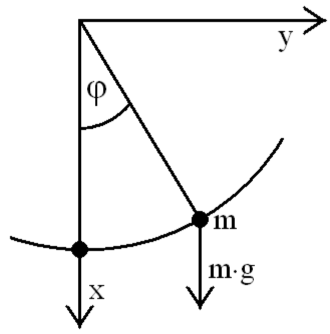
Megjegyzés: jobb koordinátázás, ha az x-tengely a lejtővel párhuzamos, az y-tengely pedig a lejtőre merőleges.

6.8. Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek

A rendszer legyen holonom!
Minden kényszer geometriai: $f^{(\alpha)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t)=0 \quad (\alpha=1,\ldots,r)$.

Példa: matematikai inga

$$\boxed{x^2+y^2-l^2=0}$$



$$2\cdot x\cdot\dot{x}+2\cdot y\cdot\dot{y}=0$$
$$\vec{l}\cdot\dot{\vec{r}}=0$$
$$\vec{l}=(x,y,0)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=l\cdot\cos(\varphi) \\ y=l\cdot\sin(\varphi)\end{array}}$$

$\downarrow\downarrow$

$x^2(\varphi)+y^2(\varphi)-l^2\equiv 0$, a φ tetszőleges értékére teljesül,

mert: $l^2\cdot\cos^2(\varphi)+l^2\cdot\sin^2(\varphi)-l^2=l^2\cdot\underbrace{\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)}_{1}-l^2=0$

6.8.1. Általános koordináták, általános sebességek

Tegyük fel, hogy vanak olyan $q_1, q_2, \ldots, q_f$ koordináták (ún. **általános koordináták**), hogy ezekkel kifejezve az $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ derékszögű koordinátákat a kényszerfeltételek azonossággá válnak.

$$q_1, q_2, \ldots, q_f \quad \rightarrow \quad \vec{r}_1=\vec{r}_1(q_1, q_2, \ldots, q_f, t) \qquad f=3\cdot n-r$$

$$\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_f, t) \qquad i=1,\ldots,n$$

$$f^{(\alpha)}\left(\vec{r}_1(q_1,q_2,\ldots,q_f,t), \ldots, \vec{r}_i(q_1,q_2,\ldots,q_f,t), \ldots, t\right)\equiv 0, \qquad (\alpha=1,\ldots,r).$$

($f^{(\alpha)}$ a q-k változása közben is nulla marad!)

$$q_\nu \quad \rightarrow \quad q_\nu+\delta q_\nu$$

$$0=\delta f^{(\alpha)}=\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \vec{r}_1}\cdot\left(\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1}\cdot\delta q_1+\ldots+\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_\nu}\cdot\delta q_\nu+\ldots\right)+\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \vec{r}_2}\cdot(\ldots)+\ldots$$

$$0=\sum_{i=1}^{n}\vec{l}_i^{(\alpha)}\cdot\underbrace{\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\cdot\delta q_\nu}_{\text{egy virtuális elmozdulás}}$$

$$\delta\vec{r}_i=\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\cdot\delta q_\nu, \quad \text{itt} \quad \delta q_\nu\text{-k függetlenek!}$$

$$\dot{\vec{r}}_i=\frac{d}{dt}\vec{r}_i(q_1,q_2,\ldots,q_f,t)=\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}\cdot\dot{q}_\nu+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\nu}=\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}}$$

A sebességek általános sebességek szerinti differenciálhányadosa egyenlő a koordináták általános koordináták szerinti differenciálhányadosával.
(A q-k az általános koordináták, ha a függvények elegendően simák (többször folytonosan differenciálhatóak), $\dot{q}$-ok az **általános sebességek**.)

Egyszerűen belátható a következő egyenlőség is: $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}=\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\nu}}$

6.8.2. A mozgásegyenlet származtatása

A fenti összefüggések segítségével a dinamika általános egyenletéből megkaphatjuk az általános koordináták időfüggését meghatározó differenciálegyenleteket, az ún. Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenleteket:

DÁE: $\sum_{\nu=1}^{f} \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i\cdot\delta\vec{r}_i$

bal oldal:

$$\sum_{\nu=1}^{f}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\right)}_{\substack{Q_\nu \\ \text{általános erő}}}\cdot\delta q_\nu=\sum_{\nu=1}^{f} Q_\nu\cdot\delta q_\nu$$

jobb oldal (a fent bekeretezett összefüggések felhasználásával):

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i\cdot\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\cdot\delta q_\nu=\sum_{\nu=1}^{f}\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\cdot\delta q_\nu=\sum_{\nu=1}^{f}\left\{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_\nu}-\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\nu}\right\}\cdot\delta q_\nu=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{f}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_\nu}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_i\cdot\dot{\vec{r}}_i^{2}-\frac{\partial}{\partial q_\nu}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_i\cdot\dot{\vec{r}}_i^{2}\right\}\cdot\delta q_\nu=\sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\nu}-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}\right)\cdot\delta q_\nu=\sum_{\nu=1}^{f} Q_\nu\cdot\delta q_\nu$$

Mivel az általános koordináták függetlenek, ezért minden koordinátára külön fenn kell állnia az alábbi egyenletnek

$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\nu}-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=Q_\nu}$ $\nu=1,\ldots,f$ f db másodrendű differenciálegyenlet

Ezek az ún. **Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek**.
A T mozgási energia és a Q általános erő kifejezhető az általános koordináták és az általános sebességek segítségével.

Megjegyzés:

Ha nincsenek kényszerek, akkor az általános koordináták megegyeznek az eredeti koordinátákkal, illetve megfelelő koordináta transzformációkkal új koordinátákat vezethetünk be.

Általános erő: $Q_\nu\overset{def.}{=}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\quad(\nu=1,\ldots,f)$

Kinetikai energia: $T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_i\cdot\dot{\vec{r}}_i^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_i\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\cdot\dot{q}_\nu+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)\cdot\left(\sum_{\mu=1}^{f}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\mu}\cdot\dot{q}_\mu+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)=$

$$=\sum_{\nu=1}^{f}\sum_{\mu=1}^{f}\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\mu}\right)}_{a_{\nu\mu}(q,\,t)}\cdot\dot{q}_\nu\cdot\dot{q}_\mu+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}}_{c(q,\,t)}+2\cdot\sum_{\nu=1}^{f}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)}_{b_\nu(q,\,t)}\cdot\dot{q}_\nu$$

$$T=\sum_{\nu,\,\mu=1}^{f}\frac{1}{2}\cdot a_{\nu\mu}\cdot\dot{q}_\nu\cdot\dot{q}_\mu+\sum_{\nu=1}^{f}b_\nu\cdot\dot{q}_\nu+c \qquad (a_{\nu\mu}=a_{\mu\nu}\ \text{szimmetrikus})$$

Ha a kényszerek időfüggetlenek (vagyis a rendszer szkleronom), akkor $b_\nu=0;\ c=0$, ekkor a kinetikai energia az általános sebességekben homogén másodfokú (kvadratikus), és érvényes, hogy $\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\mu}\cdot\dot{q}_\nu=2\cdot T$

Kiegészítés:

Homogén függvényekre vonatkozó **Euler-tétel**:

legyen $f(x_1,\ldots,x_n)$ n változós függvény homogén k-ad fokú:

$f(\lambda\cdot x_1,\ldots,\lambda\cdot x_n)=\lambda^k\cdot f(x_1,\ldots,x_n)$, ebben az esetben érvényes:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot x_i=k\cdot f}$$

Bizonyítás:

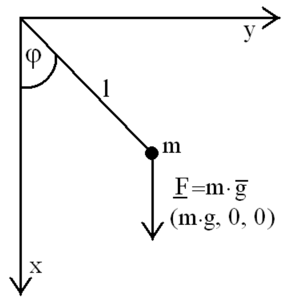
$f(\lambda\cdot x_1,\ldots,\lambda\cdot x_n)=\lambda^k\cdot f(x_1,\ldots,x_n)$ mindkét oldalát differenciáljuk λ-szerint, majd vegyünk $\lambda=1$-et:

$$\frac{df}{d\lambda}=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_{(\lambda\cdot x_1,\ldots,\lambda\cdot x_n)}\cdot x_1+\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]_{(\lambda\cdot x_1,\ldots,\lambda\cdot x_n)}\cdot x_2+\ldots+\left[\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]_{(\lambda\cdot x_1,\ldots,\lambda\cdot x_n)}\cdot x_n=$$
$$=k\cdot\lambda^{k-1}\cdot f(x_1,\ldots,x_n)$$

$\lambda=1$-re: adódik a tétel.

6.8.3. Példák

1. Matematikai inga:



$$\vec{r}=\begin{Bmatrix} x=l\cdot\cos(\varphi) \\ y=l\cdot\sin(\varphi)\end{Bmatrix}$$

$$\dot{\vec{r}}=\begin{Bmatrix} \dot{x}=l\cdot(-\sin(\varphi))\cdot\dot{\varphi} \\ \dot{y}=l\cdot(\cos(\varphi))\cdot\dot{\varphi}\end{Bmatrix}$$

$x^2+y^2=l^2$ (bármely φ-re automatikusan teljesül)

$$T=\frac{1}{2}\cdot m\cdot(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\dot{\varphi}^2\cdot\underbrace{\left[(-\sin(\varphi))^2+(\cos(\varphi))^2\right]}_{1}$$

$$Q_\varphi = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = m\cdot\vec{g}\cdot\left(-l\cdot\sin(\varphi),\ l\cdot\cos(\varphi),\ 0\right) = -m\cdot g\cdot l\cdot\sin(\varphi) = m\cdot g\cdot l\frac{\partial\cos(\varphi)}{\partial\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial\varphi},$$ a

hol $U=-m\cdot g\cdot l\cdot\cos(\varphi)$

Lagrange-függvény: $L=T-U=\frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}^2+m\cdot g\cdot l\cdot\cos(\varphi)$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=m\cdot l^2\cdot\dot{\varphi};\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=m\cdot l^2\cdot\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0$$

$$m\cdot l^2\cdot\ddot{\varphi}=-m\cdot g\cdot l\cdot\sin(\varphi)$$

$$\boxed{\ddot{\varphi}=-\frac{g}{l}\cdot\sin(\varphi)}$$

2. Lineáris harmonikus oszcillátor:
$m\cdot\ddot{x}=-D\cdot x$

x általános koordináta; $\dot{x}$ általános sebesség

$$T=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{x}^2;\ \frac{\partial T}{\partial\dot{x}};\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=m\cdot\ddot{x};\ \frac{\partial T}{\partial x}=0;\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_x$$

$$Q_x=-D\cdot x\cdot\frac{\partial x}{\partial x}=-D\cdot x$$

$$m\cdot\ddot{x}=-D\cdot x$$

6.8.4. A Lagrange-függvény természetes alakja

Tétel: Tegyük fel, hogy $\vec{F}_i$-knek van potenciálja (a szabaderők konzervatívak), akkor az általános erőknek is van potenciálja.

Bizonyítás: $\vec{F}_i=-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}$, ahol $V(\vec{r}_1,\ \dots,\ \vec{r}_n)$

Ekkor $Q_\nu=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i}\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\nu}\equiv-\frac{\partial U}{\partial q_\nu}$, ahol

$$U=V(\vec{r}_1(q_1,\ \dots,\ q_f),\ \dots,\ \vec{r}_n(q_1,\ \dots,\ q_f))\stackrel{def.}{=}U(q_1,\ \dots,\ q_f)$$

Ekkor a **Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek** egyszerűbb alakban írhatók fel.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\nu}-\frac{\partial T}{\partial q_\nu}=-\frac{\partial U(q_1,\ \dots,\ q_f)}{\partial q_\nu}\qquad\left(\text{és mivel }\ \frac{\partial U}{\partial\dot{q}_\nu}=0\ \text{ ezért}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{q}_\nu}-\frac{\partial(T-U)}{\partial q_\nu}=0 \qquad (\nu=1,\ldots,f)$$

Ha bevezetjük a Lagrange-függvényt:

$$L(q_1,\ldots,q_f,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_f,t)\overset{def.}{=}T(q,\dot{q},t)-U(q_1,\ldots,q_f)$$

Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenletek: $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}-\frac{\partial L}{\partial q_\nu}=0}$ $(\nu=1,\ldots,f)$

Ha egy Lagrange-függvényhez egy konstanst hozzáadunk, vagy ha egy nem nulla konstanssal megszorozzuk, a mozgások nem változnak.
Definíció: a Q_ν általános erőt **potenciálos erőnek** nevezzük, ha van olyan $U(q_1,\ldots,q_f,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_f,t)$ $2\cdot f+1$ változós függvény, hogy Q_ν előáll mint

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_\nu}-\frac{\partial U}{\partial q_\nu}\ .$$

$$Q_\nu=\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_\nu}-\frac{\partial U}{\partial q_\nu}$$ (U **általános potenciál**)

Például a mágneses Lorentz-erőnek is van általános, sebességtől is függő potenciálja.
Ha az általános erők potenciálos erők, akkor a mozgásegyenletek alakja:

$$Q_\nu=\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_\nu}-\frac{\partial U}{\partial q_\nu} \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}-\frac{\partial L}{\partial q_\nu}=0} \quad (\nu=1,\ldots,f)$$

6.8.5. Példák Lagrange-függvényekre

1. Lineáris harmonikus oszcillátor:

$$L=T-U=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{x}^2-\frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2$$

2. Matematikai inga:

$$L=T-U=\frac{1}{2}\cdot m\cdot l^2\cdot\dot{\varphi}^2+m\cdot g\cdot l\cdot\cos(\varphi)$$

3. n-testprobléma: szigorúan centrális kölcsönhatás

$U_b(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_n)$ belső potenciális energia

$$-\frac{\partial U_b}{\partial\vec{r}_i}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\vec{F}_{ji}$$

$$L=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_i\cdot\dot{\vec{r}}_i^2-U_b(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_n)$$

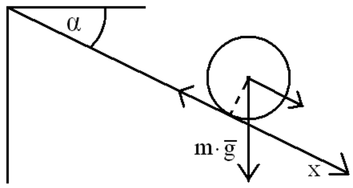
4. Csatolt rezgések:

$$T=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\dot{x}_2^2$$

$$U=\frac{1}{2}\cdot D_1\cdot x_1^2+\frac{1}{2}\cdot D_2\cdot x_2^2+\frac{1}{2}\cdot k\cdot(x_1-x_2)^2$$

$$L=T-U$$

5. Henger gördülése lejtőn: a test homogén
   φ az elfordulás szöge
   általános koordináta: x
   általános sebesség: $\dot{x}$
   gördülés: $\dot{x}=R\cdot\dot{\varphi}$



$$U=m\cdot g\cdot h=-m\cdot g\cdot x\cdot\sin(\alpha)$$

$$T=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{x}^2+\frac{1}{2}\cdot\Theta\cdot\dot{\varphi}^2$$

$$\Theta=\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\cdot m\cdot R^2,\ \text{henger}\\ \frac{2}{5}\cdot m\cdot R^2,\ \text{gömb}\\ m\cdot R^2,\ \text{karika}\end{Bmatrix},\qquad\qquad \gamma=\frac{\Theta}{m\cdot R^2}\ ,$$

$$T=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{x}^2+\frac{1}{2}\cdot m\cdot R^2\cdot\left(\frac{\Theta}{m\cdot R^2}\right)\cdot\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{x}^2\cdot(1+\gamma)$$

$$L=T-U$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=m\cdot\dot{x}\cdot(1+\gamma)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\cdot\ddot{x}\cdot(1+\gamma)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial x}=m\cdot g\cdot\sin(\alpha)$$

$$m\cdot\ddot{x}\cdot(1+\gamma)=m\cdot g\cdot\sin(\alpha)$$

$$\boxed{\ddot{x}=\frac{g\cdot\sin(\alpha)}{1+\gamma}}$$

6.8.6. Az elektromágneses Lorentz-erő általános potenciálja

A q töltésű, m tömegű részecske egy $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ változó elektromágneses mezőben mozog. A rá ható erő a Lorentz-erő, a mozgásegyenlet: $m\cdot\ddot{\vec{r}}=q\cdot\vec{E}+q\cdot\vec{v}\times\vec{B}$
Maxwell:

$$div\,\vec{B}=\vec{0} \qquad \Rightarrow \quad \vec{B}=rot\,\vec{A}$$

$$rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial\, rot\,\vec{A}}{\partial t} \;\Rightarrow\; rot\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0 \;\Rightarrow\; \vec{E}=-grad\,\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

4 mező segítségével felírható a 6 komponensű elektromágneses mező:
ϕ a skalárpotenciál, $\vec{A}$ a vektorpotenciál. (Ezek nem egyértelműek.)

Megmutatjuk, hogy a Lagrange-függvény

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t)= \underbrace{\frac{1}{2}\cdot m\cdot\vec{v}^2}_{\substack{relativisztikusan:\\ -c^2\cdot m\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \underbrace{+q\cdot\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r}, t)-q\cdot\phi}_{relativisztikus}(\vec{r}, t)$$

Bizonyítás: $\left(\dfrac{\partial L}{\partial\vec{v}}=m\cdot\vec{v}+q\cdot\vec{A}\right)$

x-komponensre:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\cdot\dot{x}+q\cdot A_x;\quad \frac{\partial L}{\partial x}=q\cdot\left(v_x\cdot\frac{\partial A_x}{\partial x}+v_y\cdot\frac{\partial A_y}{\partial x}+v_z\cdot\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

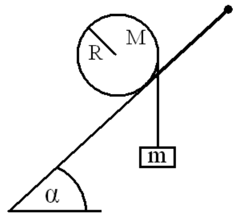
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\cdot\ddot{x}+q\cdot\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\cdot\dot{x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\cdot\dot{y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\cdot\dot{z}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)=\frac{\partial L}{\partial x}$$

$$m\cdot\ddot{x}=q\cdot\underbrace{\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)}_{E_x}+q\cdot\left[v_y\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{(rot\,\vec{A})_z}+v_z\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)}_{-(rot\,\vec{A})_y}\right]$$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x}=q\cdot E_x+q\cdot(\vec{v}\times\underbrace{rot\,\vec{A}}_{\vec{B}})_x}$$

A felírt Lagrange-függvény valóban ezt a mechanikai rendszert írja le.

6.9. Feladatok



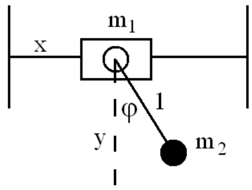
6.9.1. M tömegű R sugarú hengerre tekert nyújthatatlan kötél egyik végét α hajlásszögű lejtőn rögzítjük másik végére az ábra szerint m tömegű testet akasztunk. Mekkora α szög esetén lesz a rendszer egyensúlyban?

6.9.2. Síugró indul az $y = a \cdot x^2$ sísánc h magasságú pontjából. Határozzuk meg a rá ható kényszererőt a pálya tetszőleges pontjában!

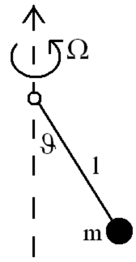
6.9.3. Írja fel az alábbi rendszerek Lagrange-függvényét és a Lagrange-féle másodfajú mozgásegyenleteket
a) szabad tömegpont (használjunk polárkoordinátákat)
b) nehézségi erőtérben mozgó tömegpont
c) lineáris harmonikus oszcillátor
d) térbeli harmonikus oszcillátor (izotrop és anizotrop esetben is)
e) homogén erőtérben mozgó anyagi pont
f) szigorúan centrális erőtérben mozgó anyagi pont (használjunk polárkoordinátákat)
g) egymás gravitációs erőterében mozgó két tömegpont (vezessünk be súlyponti és relatív koordinátákat)
h) az $m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = F(t)$ mozgásegyenletű kényszerrezgést végző anyagi pont
i) síkinga, gömbi inga

6.9.4. Mutassuk meg, hogy a csillapított lineáris harmonikus oszcillátor Lagrange-függvénye felírható $L = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{\beta}{m} \cdot t} \cdot \left[\dot{x}^2 + \frac{\beta}{m} \cdot x \cdot \dot{x} + \left(\frac{\beta^2}{2 \cdot m^2} - \frac{k}{m} \right) \cdot x^2 \right]$ alakban, állapítsa meg az m, a β és a k paraméterek jelentését!

6.9.5. Mutassa meg, hogy az m tömegpont Lagrange-függvénye egy $\vec{\omega}$ szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben $L = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r})^2 - U(\vec{r})$!



6.9.6. Egy m_2 tömegű matematikai inga vízszintes tengely mentén elmozduló m_1 tömegű csúszkához van rögzítve. Írjuk fel a Lagrange-függvényt és a mozgásegyenleteket!



6.9.7. Az l hosszúságú súlytalan rúd vízszintes tengelyű csuklóval kapcsolódik az Ω szögsebességgel forgó függőleges tengelyhez, másik végére m tömegű testet erősítettek.
a) Írja fel a Lagrange-függvényt és a mozgásegyenleteket!
b) Határozza meg az „egyensúlyi” ϑ szöget az Ω függvényében!