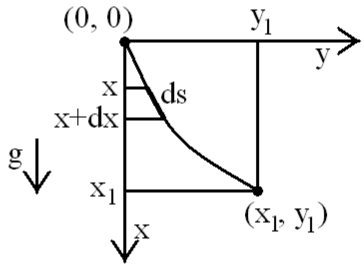
7. Variációszámítás, a mechanika variációs elvei

7.1. A brachistochron probléma (legrövidebb idő)

Homogén nehézségi erőtér; függőleges sík; két pont;összekötő görbe (γ)
$\gamma: \; y=y(x)$
a súrlódást elhanyagoljuk



- Mennyi idő alatt ér át a $(0,\,0)$ pontból az $(x_1,\, y_1)$ pontba a görbére felfűzött gyöngy ?
- Milyen görbe esetén a legrövidebb ez az idő?
- Van-e ilyen görbe?

$$v=\sqrt{2\cdot g\cdot x} \quad \left(\Leftarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2=m\cdot g\cdot x\right)$$

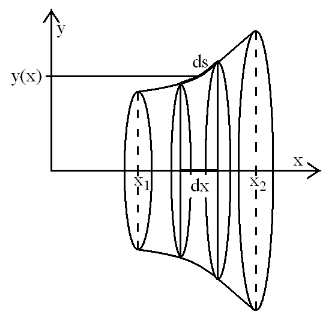
ívhossz: $ds^2=(dy)^2+(dx)^2 \quad \Rightarrow \quad ds=\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$

a befutásához szükséges idő: $dt=\dfrac{ds}{v}=\dfrac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2\cdot g\cdot x}}\,dx$

az átérés ideje: $\gamma \;\rightarrow\; T=\displaystyle\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2\cdot g\cdot x}}\,dx$

Azt a γ görbét keressük, amelyre T extrémális (minimális, mivel maximális nem lehet).

Minimális forgásfelület problémája:
Pl. fizikában szappanhártyák.
$\gamma: \; y=y(x) \;\rightarrow$ forgásfelület

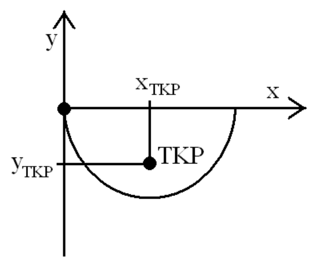


felszíne: F
$df=2\cdot\pi\cdot y(x)\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$

$$\gamma \;\rightarrow\; \mathsf{F}=\int_{x_1}^{x_2} 2\cdot\pi\cdot y(x)\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

F legyen minimális: γ

Láncgörbe:
Egy lánc két végét felfüggesztjük homogén nehézségi erőtérben.
Milyen alakot vesz fel?
A tömegközéppont a lehető legmélyebbre jut.
$y=a\,ch(\alpha\cdot x)$
$\gamma \;\rightarrow\; y_{TKP}$ legyen minimális

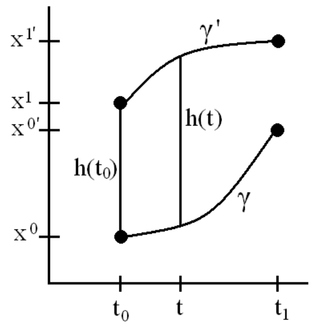


Definíció: a ϕ funkcionál **extrémálisának** nevezzük a γ görbét, ha
$\delta\phi=0$ (tetszőleges h-ra).

Tétel: a γ görbe a $\gamma \to \phi = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)\, dt$ funkcionálnak akkor és csak akkor extrémálisa, ha a $\gamma : x = x(t)$ görbe kielégíti az Euler-Lagrange egyenleteket:

$$\delta\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

7.2. Funkcionál, variáció, Euler-Lagrange egyenlet



2-dimenziós (síkbeli) görbék: $\gamma :\ x = x(t);\ t_0 \le t \le t_1$

$$\gamma \xrightarrow{\phi} \phi(\gamma) \in \mathbb{R} \quad (\phi \text{ funkcionál})$$
$$\gamma' \to \phi(\gamma') = \phi'$$

a funkcionál növekménye: $\phi(\gamma') - \phi(\gamma)$

$$\gamma' :\ x = x(t) + h(t)$$

$$\phi(\gamma + h) - \phi(\gamma) = \underbrace{F(\gamma, h)}_{\substack{h\text{-ban} \\ \text{lineáris} \\ \text{tag}}} + \underbrace{O(h^2)}_{\substack{h\text{-ban} \\ \text{másodrendű} \\ \text{tag}}}$$

A ϕ funkcionál variációja (differenciálja):
Ha le tudunk választani a növekményből egy h-ban lineáris tagot, akkor a ϕ funkcionál differenciálható, és variációja: $\delta\phi = F(\gamma, h)$
A $h(t)$ függvényt a γ görbe variációjának nevezzük.

Speciális funkcionálok:

Brachistochron probléma: $\gamma :\ x = x(t) \to T(\gamma) = \int_0^{t_1} \underbrace{\frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot t}}}_{L(x,\ \dot{x},\ t)} dt = \int_0^{t_1} L(x(t),\ \dot{x}(t),\ t)\, dt$

$L(a, b, c)$ alapfüggvény

$$\gamma :\ x = x(t) \to \phi(\gamma) \overset{def.}{=} \int_{t_0}^{t_1} L(x(t),\ \dot{x}(t),\ t)\, dt \qquad t_0 \le t \le t_1$$

Egy alapfüggvényt a görbe mentén integrálva kapjuk a funkcionál értékét. Az így definiált funkcionál differenciálható:

$$\phi(\gamma + h) - \phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \{ L(x(t) + h(t),\ \dot{x}(t) + \dot{h}(t),\ t) - L(x(t),\ \dot{x}(t),\ t) \}\, dt$$

Fejtsük sorba $h=0$ körül:

$$L(x,\dot{x},t)+\left[\frac{\partial L}{\partial x}\right]_{(x,\dot{x},t)}\cdot h(t)+\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]_{(x,\dot{x},t)}\cdot \dot{h}(t)+O(h^2)-L(x,\dot{x},t)=$$

$$=\underbrace{\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial x}\cdot h+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot \dot{h}\,dt}_{\delta\phi}+O(h^2)$$

$$\delta\phi=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\cdot h+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot h\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\cdot h\right)dt \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\delta\phi=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\cdot h\,dt+\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot h\right]_{t_0}^{t_1}}$$

Ha a γ végpontjait fixen tartjuk $\left(h(t_0)=h(t_1)=0\right)$

$$\boxed{\delta\phi=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\cdot h\,dt}$$

$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$ teljesül a γ mentén

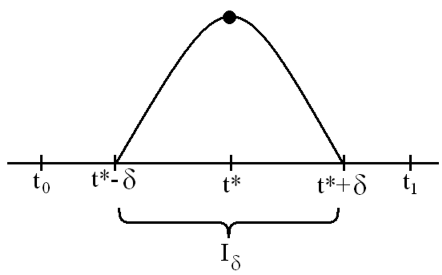
Euler-Lagrange egyenletek:

A $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$ egyenleteket a $\phi=\int L\,dt$ funkcionál Euler-Lagrange egyenletének nevezzük.

Lagrange-lemma:

$$\int_{t_0}^{t_1} m(t)\cdot h(t)\,dt=0$$

„tetszőleges” $h(t)$-re $\Leftrightarrow$ $m(t)=0 \quad t_0\le t\le t_1$



Bizonyítás: indirekt módon

Tegyük fel, hogy $m(t^*)\neq 0;\ t_0\le t^*\le t_1;\ m(t^*)>0$

$m(t)>0 \quad t\in I_\delta$

$$h^*(t)=\begin{cases}\left(t-(t^*-\delta)\right)\cdot\left((t^*+\delta)-t\right), & \text{ha } t\in I_\delta\\ 0 & \text{, egyébként}\end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} m(t)\cdot h^*(t)dt > 0$$ ellentmondás!

Definíció: a ϕ **funkcionál extrémálisának** nevezzük a γ görbét, ha $\delta\phi=0$ („tetszőleges” h-ra)

7.3. A brachistochron probléma megoldása

$$\delta T=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}-\frac{\partial L}{\partial y}=0$$

$$L(y,\ y',\ x)=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2\cdot g\cdot x}}\ ;$$ $2\cdot g$ -t elhagyjuk

$$\frac{\partial L}{\partial y'}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial y'}=\acute{a}lland\acute{o}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{y'^2}{1+y'^2}=c\cdot x$$

$$\gamma:\ y=y(x) \ \rightarrow \begin{Bmatrix} x=x(\tau) \\ y=y(\tau) \end{Bmatrix}$$ paraméteres alakban keressük a görbét

végpontok: $$\begin{Bmatrix} 0=y(0) \\ y_1=y(x_1) \end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{pmatrix} \left.\begin{Bmatrix} 0=x(0) \\ 0=y(0) \end{Bmatrix}\right\}\text{origó} \\ \begin{Bmatrix} x_1=x(\tau_1) \\ y=y(\tau_1) \end{Bmatrix} \end{pmatrix}\right\}\text{végpontok}$$

$$y':=tg\left(\frac{\tau}{2}\right);\quad \frac{y'^2}{1+y'^2}=\frac{tg^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}{1+tg^2\left(\frac{\tau}{2}\right)}=\sin^2\left(\frac{\tau}{2}\right)=\frac{1-\cos(\tau)}{2}=c\cdot x$$

$$a(1-\cos(\tau))=x \qquad \left(a=\frac{1}{2\cdot c}\right)$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\tau}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{d\tau}}=tg\left(\frac{\tau}{2}\right);$$

$$\frac{dx}{d\tau} = a \cdot \sin(\tau);$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\tau}{2}\right)} \cdot 2 \cdot a \cdot \sin\left(\frac{\tau}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\tau}{2}\right) = a \cdot (1 - \cos(\tau)) \Rightarrow y = a \cdot (\tau - \sin(\tau))$$

$$\boxed{y = a \cdot (\tau - \sin(\tau))}$$

$$\boxed{x = a(1 - \cos(\tau))} \qquad \text{ciklois}$$

Azt kaptuk, hogy a tömegpont egy ciklois mentén ér le legrövidebb idő alatt a felső pontból az alsó pontba.

7.4. Variációszámítás (általánosan n-dimenzióban)

$n+1$-dimenziós görbe: $\gamma : x_1 = x_1(t)$

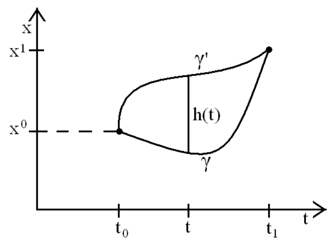
$\vdots \qquad t_0 \le t \le t_1$

$x_n = x_n(t)$

Adva van egy ún. alapfüggvény: $2n+1$ változós az $(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t)$ változók terén.
$L = L(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t)$

Funkcionál: $\gamma : \xrightarrow{\phi} \phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t), t)\, dt$

Tekintsük azokat a görbéket, melyeknek a végpontjai fixen vannak tartva:
γ: tartsuk a görbe végpontjait fixen



$\gamma' = \gamma + h : x_1 = x_1(t) + h_1(t)$

$\vdots$

$x_n = x_n(t) + h_n(t)$

A funkcionál differenciálható és variációja:

$$\delta\phi = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \cdot h_i\, dt$$

Lagrange-lemma $\Rightarrow$
Tétel: (a funcionálhoz tartozó Euler-Lagrange-féle differenciálegyenletek)

$$\delta\phi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

ϕ milyen γ mellett extrémális? (szélsőérték)
Az ilyen γ-kat a ϕ extrémális görbéjének, vagy extrémálisának nevezzük: $\delta\phi = 0$
γ extrémális $\Leftrightarrow$ $\delta\phi = 0$ $\Leftrightarrow$ γ mentén teljesülnek az Euler-Lagrange-egyenletek.

7.5. A legkisebb hatás elve (Hamilton-elv)

Tekintsünk egy mechanikai rendszert. Megadunk általános koordinátákat $(q_1, \dots, q_f)$ és általános sebességeket $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ és az időt (t); továbbá megadunk egy (megfelelő) $2f+1$ változós függvényt, az ún. Lagrange-függvényt:

$$L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t)$$

A $q_1, \dots, q_f$ f-dimenziós teret nevezzük el konfigurációs térnek. Vegyünk görbéket az $f+1$-dimenziós $(q_1, \dots, q_f, t)$ térben: γ

$$\gamma : \begin{matrix} q_1 = q_1(t) \\ \vdots \\ q_f = q_f(t) \end{matrix} \qquad t_0 \le t \le t_1 \quad \text{(fix végpontok)}$$

Definiáljuk az ún. hatás-funkcionált (röviden hatást):

$$\gamma : \xrightarrow{S} S(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), t\right) dt$$

$\left(\text{energia: } [L] = J;\ [S] = J \cdot s\right)$

Elv: a mechanikai rendszer a (t_0, q^0) és (t_1, q^1) pontok között a hatás extrémálisai mentén mozog (variációs elv).

Tartalma: mozgás: $\delta S = 0 \Leftrightarrow \gamma$ mentén teljesülnek az Euler-Lagrange-egyenletek:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, f)$$

A mechanika variációs elvének segítségével számos fontos tételt bizonyíthatunk, illetve számos új módszer alkalmazására nyílik lehetőség.

7.6. Feladatok

7.6.1. Határozza meg annak a görbének az alakját, amelyet egy tengely körül megforgatva a kapott felület felszíne minimális!
Útmutató: a görbe legyen az $y = f(x)$ függvény grafikonja, amelynek x_1, x_2 közötti szakaszát az x tengely körül megforgatjuk, miközben az y_1, y_2 értéket fixen tartjuk.

7.6.2. Milyen alakot vesz fel a homogén nehézségi erőtérben két végén felfüggesztett láncnak (ezt az alakot nevezik láncgörbének)?