8. Kis rezgések stabil egyensúlyi helyzet körül

8.1. A rezgések szétcsatolása harmonikus közelítésben. Normálrezgések

Egyensúlyi helyzet: olyan helyzet, amelybe belehelyezve a rendszert (nulla kezdősebességgel), a rendszer mindvégig ott marad.
Stabil egyensúlyi helyzet: ha a rendszer kezdetben ennek az egyensúlyi helyzetnek a közelében van és nem túl nagy a sebessége, akkor sohasem távolodik el messzire.
A kinetikai energia az általános sebességek másodfokú függvénye, általában homogén másodfokú függvénye; és az erőknek van potenciálja. Legyen az egyensúlyi helyzet az origó: $q_1=\ldots=q_n=0$ és legyen itt a potenciál nulla.

$$L(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)=\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\underbrace{a_{ij}(q_1,\ldots,q_n)}_{szimmetrikus}\cdot\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j}_{T(q,\dot{q})\geq 0}-V(q_1,\ldots,q_n)$$

Feltesszük, hogy $q_1^0,\ldots,q_n^0$ stabil egyensúlyi helyzet és a $\dot{q}_1^0,\ldots,\dot{q}_n^0$ kezdősebességek nem túl nagyok, akkor $\left|q_i(t)-q_1^0\right|\leq\varepsilon$
Vehetjük $q_1^0=0,\ldots,q_n^0=0$-nak

$$T(q,\dot{q})=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{a_{ij}}_{\substack{¿a_{ji}\\ konstans}}(0)\cdot\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j+\underbrace{\sum_k\left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right]_{q=0}\cdot q_k\cdot\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j}_{O(3)}+\ldots\right)$$

$$V(q)=\underbrace{V(0)}_{=0}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial V}{\partial q_k}\right]_{q=0}}_{=0}\cdot q_k+\underbrace{\frac{1}{2!}\cdot\sum_{k,l}\left[\overbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_k\partial q_l}}^{b_{kl}=b_{lk}}\right]_{q=0}}_{\geq 0\ stabil}\cdot q_k\cdot q_l+O(3)$$

$$q^0=0 \quad \text{egyensúlyi helyzet} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{\partial V}{\partial q_k}\right]_{q=0}=0$$

Sorba fejtve a kinetikai energiát és a potenciált az egyensúlyi helyzet körül, és a másodiknál magasabb hatványokat elhanyagolva kapjuk a Lagrange-függvény ún. harmonikus közelítését:

$$L=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot a_{ij}\cdot\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot b_{ij}\cdot q_i\cdot q_j=\frac{1}{2}\cdot A(\dot{q},\dot{q})-\frac{1}{2}\cdot B(q,q)$$

Itt az A mátrix pozitív definit, mert a kinetikai energia mindig pozitív, és a B mátrix pozitív definit, mert az egyensúlyi helyzet stabil, továbbá mindkét mátrix szimmetrikus.
A mozgásegyenleteket az Euler-Lagrange egyenletek felírásával kapjuk:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot\ddot{q}_j, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i}=-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\cdot q_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \cdot \ddot{q}_j + b_{ij} \cdot q_j \right) = 0 \qquad (i=1, \ldots, n)$$ csatolt rezgések

Keressünk olyan megoldásokat, amikor minden koordináta azonos frekvenciával és azonos fázisban rezeg.

$$q_i(t) = u_i \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$$

$$\dot{q}_i(t) = -\omega \cdot u_i \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

$$\ddot{q}_i(t) = -\omega^2 \cdot u_i \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[-\omega^2 \cdot a_{ij} \cdot u_j + b_{ij} \cdot u_j \right] \cdot \underbrace{\cos(\omega \cdot t + \alpha)}_{\substack{\text{leoszthatunk} \\ \text{vele}}} = 0$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \left(b_{ij} - \omega^2 \cdot a_{ij} \right) \cdot u_j = 0}$$ homogén lineáris egyenletrendszer, amely mátrix-jelöléssel:

$$\boxed{(B - \omega^2 \cdot A) \cdot \vec{u} = 0} \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$ oszlopvektor

Általánosított sajátérték-probléma:

$$det(B - \lambda \cdot A) = k_n(\lambda) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \textit{sajátértékek:} & \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 \\ \textit{sajátvektorok:} & \vec{u}^{(1)}, \ldots, \vec{u}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Definíció: $A(\vec{u}, \vec{v}) \overset{def.}{=} \sum_{i,k} a_{ik} \cdot u_i \cdot v_k = u^T \cdot A \cdot v$

Bilineáris: $A\left(\vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)}, \vec{v}\right) = A\left(\vec{u}^{(1)}, \vec{v}\right) + A\left(\vec{u}^{(2)}, \vec{v}\right)$

$$A(\lambda \cdot \vec{u}, \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{u}, \vec{v})$$

Mivel $A = A^T$ (szimmetrikus), ezért $A(\vec{u}, \vec{v}) = A(\vec{v}, \vec{u})$ szimmetrikus bilineáris függvény.

Komplexre: $A\left(\vec{u}, \vec{u}^*\right) = \left(A\left(\vec{u}, \vec{u}^*\right) \right)^* = \sum_{i,k} a_{ik} \cdot u_i \cdot u_k^*$ valós

Bizonyítás: $\sum_{i,k} a_{ik} \cdot u_i \cdot u_k^* \overset{?}{=} \sum_{i,k} a_{ik}^* \cdot u_i^* \cdot u_k = \underbrace{\sum a_{ki} \cdot u_k}_{A(\vec{u}, \vec{u}^*)} \cdot u_i^* = \sum_{i,k} a_{ik} \cdot u_i \cdot u_k^*$

Ha $A > 0 \Rightarrow A(\vec{u}, \vec{u}^*) > 0 \quad (\vec{u} \neq 0)$

$\vec{u} = \vec{a} + i \cdot \vec{b}, \ \vec{u}^* = \vec{a} - i \cdot \vec{b}$ stb.

$$B\cdot\vec{u}=\lambda\cdot A\cdot\vec{u} \quad (\vec{u}\neq 0) \quad \Rightarrow \quad \forall\vec{v}\text{-re}$$

$$B(\vec{u},\vec{v})=\lambda\cdot A(\vec{u},\vec{v})$$

$$u^T\cdot B\cdot v=\lambda\cdot u^T\cdot A\cdot v$$

$$v^T\cdot B\cdot u=\lambda\cdot v^T\cdot A\cdot u$$

$$B\cdot u=\lambda\cdot A\cdot u$$

$$v^T\cdot B\cdot u=\lambda\cdot v^T\cdot A\cdot u$$

Ha A és B szimmetrikus és $B\cdot u=\lambda\cdot A\cdot u$ és $B\cdot u'=\lambda'\cdot A\cdot u'$,akkor ha $\lambda\neq\lambda'$, akkor $A(\vec{u},\vec{u}')=0$ (az $\vec{u}$ és $\vec{u}'$ sajátvektorok A-ortogonálisak)

$$\begin{aligned} &B(\vec{u},\vec{u}')=\lambda\cdot A(\vec{u},\vec{u}')\\ &\underline{-B(\vec{u}',\vec{u})=\lambda'\cdot A(\vec{u}',\vec{u})}\\ &(\lambda-\lambda')\cdot\left(A(\vec{u},\vec{u}')\right)=0 \quad\Rightarrow\quad A(\vec{u},\vec{u}')=0\end{aligned}$$

A különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok A-ortogonálisak.
Állítás: λ valós

Bizonyítás: tegyük fel, hogy λ komplex; $\lambda^*\neq\lambda$
$(B-\lambda\cdot A)\cdot u=0 \quad (\vec{u}\neq 0)$ vegyük a komplex konjugáltját
$(B-\lambda^*\cdot A)\cdot u^*=0$
$A(u,u^*)=0$ ellentmondás $\Rightarrow$ $\lambda^*=\lambda$ $\Rightarrow$ valós

Ha a λ-k valósak $\Rightarrow$ u-k is valósak

$$u^T / \quad B\cdot u=\lambda\cdot A\cdot u \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{B(u,u)}{A(u,u)}>0 \quad (u\neq 0)$$

Ezek alapján:
Sajátértékek: $\lambda=\omega^2>0$
Sajátfrekvenciák: $\omega_1,\ldots,\omega_n$ valósak
Sajátvektorok: $\vec{u}^{(1)},\ldots,\vec{u}^{(n)}$

$A\left(\vec{u}^{(1)},\vec{u}^{(2)}\right)=0$, ha $\omega_1\neq\omega_2$, általában feltehető (ortogonalizálással és normálással elérhető), hogy: $A\left(\vec{u}^{(i)},\vec{u}^{(j)}\right)=0$, ha $i\neq j$

$A\left(\vec{u}^{(i)},\vec{u}^{(j)}\right)=1 \quad (i=1,\ldots,n)$ (ún. A-ortonormált bázis)

Számoljuk ki:

$$B\left(\vec{u}^{(i)},\vec{u}^{(j)}\right)=\omega_i^2\cdot\delta_{ij}$$

$$\left(\vec{u}^{(j)}\right)^T / \quad B\cdot\vec{u}^{(i)}=\omega_i^2\cdot A\cdot\vec{u}^{(i)}$$

$$B\left(\vec{u}^{(j)},\vec{u}^{(i)}\right)=\omega_i^2\cdot\underbrace{A\left(\vec{u}^{(j)},\vec{u}^{(i)}\right)}_{\delta ij}=\omega_i^2\cdot\delta_{ij}$$

Vezessünk be új $Q_1,\dots,Q_n$ koordinátákat (koordináta transzformáció):

$$q_i=\sum_{j=1}^{n} Q_j\cdot u_i^{(j)};\quad \dot q_i=\sum_j \dot Q_j\cdot u_i^{(j)}$$

Lagrange-függvény az új koordinátákkal:

$$L=\frac{1}{2}\cdot A\left(\sum_j \dot Q_j\cdot\vec u^{(j)},\ \sum_k \dot Q_k\cdot\vec u^{(k)}\right)-\frac{1}{2}\cdot B\left(\sum_j Q_j\cdot\vec u^{(j)},\ \sum_k Q_k\cdot\vec u^{(k)}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_j\sum_k \dot Q_j\cdot\dot Q_k\cdot\underbrace{A\left(\vec u^{(j)},\ \vec u^{(k)}\right)}_{\delta_{jk}}-\frac{1}{2}\cdot\sum_j\sum_k Q_j\cdot Q_k\cdot\underbrace{B\left(\vec u^{(j)},\ \vec u^{(k)}\right)}_{\omega_j^2\cdot\delta_{jk}}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}\dot Q_j^2-\frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{n}\omega_j^2\cdot Q_j^2=\sum_{j=1}^{n} L_j$$

A kinetikai energia és a potenciális energia az új koordinátákban tiszta négyzetes tagokból áll (nincs csatolás). Az új koordinátákban a rezgések egymástól függetlenek.

$$L_j=\frac{1}{2}\cdot\dot Q_j^2-\frac{1}{2}\cdot\omega_j^2\cdot Q_j^2$$

A mozgásegyenletek:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot Q_j}=\frac{\partial L_j}{\partial\dot Q_j}=\dot Q_j;\quad \frac{\partial L}{\partial Q_j}=\frac{\partial L_j}{\partial Q_j}=-\omega_j^2\cdot Q_j$$

Mozgásegyenlet: $\ddot Q_j+\omega_j^2\cdot Q_j=0\quad (j=1,\ \dots\ ,\ n)$

Az új koordinátákat normálkoordinátáknak nevezzük, amelyek időfüggése:

$$Q_j=Q_j^0\cdot\cos(\omega_j\cdot t+\alpha_j)$$

$Q_j^0,\ \alpha_j$ kezdőfeltételekből határozható meg

Az eredeti koordináták időfüggése a koordináta transzformáció szerint adódik:

$$q_i=\sum_{j=1}^{n} u_i^{(j)}\cdot Q_j^0\cdot\cos(\omega_j\cdot t+\alpha_j)$$

Egy mechanikai rendszer tetszőleges rezgését a stabil egyensúlyi helyzet körül előállíthatjuk normálrezgések lineáris kombinációjaként (szuperpozíciójaként). Megfelelő kezdőfeltételekkel elérhetjük, hogy minden koordináta azonos frekvenciával (valamelyik normálfrekvenciával) és azonos fázisban rezegjen. Az ilyen rezgést a rendszer normálrezgésének hívjuk.
Állítsuk elő a koordinátatranszformáció inverzét!

$$q_i=\sum_{j=1}^{n} Q_j\cdot u_i^{(j)}\ \Leftrightarrow\ Q_j=\sum_{l,i=1}^{n} a_{li}\cdot u_l^{(j)}\cdot q_i$$

Bizonyítás:

$$\vec{q}=\sum_{j=1}^{n} Q_j\cdot\vec{u}^{(j)}$$

$$A\cdot\vec{q}=\sum_{j=1}^{n} Q_j\cdot A\cdot\vec{u}^{(j)}$$

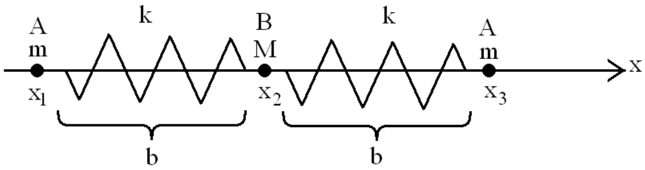
$$\left(\vec{u}^{(k)}\right)^T\cdot A\cdot\vec{q}=\sum_{j=1}^{n} Q_j\cdot\left(\vec{u}^{(k)}\right)^T\cdot A\cdot\vec{u}^{(j)}$$

$$A\left(\vec{u}^{(k)},\ \vec{q}\right)=\sum_{j=1}^{n} Q_j\cdot\underbrace{A\left(\vec{u}^{(k)},\ \vec{u}^{(j)}\right)}_{\delta_{kj}}=Q_k$$

$$Q_k=A\left(\vec{u}^{(k)},\ \vec{q}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot u_i^{(k)}\cdot q_l$$

8.2. Szimmetrikus 3-atomos molekula lineáris rezgései

A – B – A



$$T=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\cdot M\cdot\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{x}_3^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}\cdot M\cdot\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{q}_3^2$$

$$V=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(x_2-x_1-b\right)^2+\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(x_3-x_2-b\right)^2=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(q_2-q_1\right)^2+\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(q_3-q_2\right)^2$$

$$b=x_{2,\,0}-x_{1,\,0}=x_{3,\,0}-x_{2,\,0}$$

$$q_1=x_1-x_{1,\,0};\quad q_2=x_2-x_{2,\,0};\quad q_3=x_3-x_{3,\,0}$$

$$T=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\cdot a_{ij}\cdot\dot{q}_i\cdot\dot{q}_j$$

$$A=\begin{pmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & M & 0\\ 0 & 0 & m\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} k & -k & 0\\ -k & 2\mathrm{k} & -k\\ 0 & -k & k\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k-\omega^2\cdot m & -k & 0\\ -k & 2\cdot k-\omega^2\cdot M & -k\\ 0 & -k & k-\omega^2\cdot m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

A sajátértékeket a karakterisztikus egyenlet gyökei adják (triviálistól eltérő megoldás (sajátvektor) akkor és csak akkor létezik, ha az egyenletrendszer determinánsa nulla):

$$(k-\omega^2\cdot m)\cdot\left[(2\cdot k-\omega^2\cdot M)\cdot(k-\omega^2\cdot m)-k^2\right]+k\cdot\left[-k\cdot(k-\omega^2\cdot m)\right]=0$$

$$(k-\omega^2\cdot m)\cdot\left(2\cdot k^2-2\cdot k\cdot\omega^2\cdot m-k\cdot\omega^2\cdot M+\omega^4\cdot m\cdot M-k^2-k^2\right)=0$$

$$\omega^2\cdot(k-\omega^2\cdot m)\cdot(-2\cdot k\cdot m-k\cdot M+\omega^2\cdot m\cdot M)=0$$

$$\omega^2\cdot(k-\omega^2\cdot m)\cdot\left(\omega^2\cdot m\cdot M-k\cdot(2\cdot m+M)\right)=0$$

A gyökök (sajátfrekvenciák):

$$\omega_1=0;\quad \omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}};\quad \omega_3=\sqrt{\frac{k\cdot(2\cdot m+M)}{m\cdot M}}=\sqrt{\frac{k}{m}\cdot\left(1+\frac{2\cdot m}{M}\right)}$$

<u>A sajátvektorok:</u>

1. $\omega_1=0$

I. $\quad k\cdot u_1-k\cdot u_2+0\cdot u_3=0 \quad\Rightarrow\quad u_1=u_2=\alpha$

II. $\quad -k\cdot u_1+2\cdot k\cdot M\cdot u_2-k\cdot u_3=0 \qquad\qquad \vec{u}^{(1)}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}$

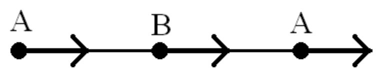
III. $\quad 0\cdot u_1-k\cdot u_2+k\cdot u_3=0 \quad\Rightarrow\quad u_2=u_3=\alpha$

Normálás 1-re:

$$A\left(\vec{u}^{(1)},\,\vec{u}^{(1)}\right)=m\cdot\alpha^2+M\cdot\alpha^2+m\cdot\alpha^2=1$$

$$\alpha=\sqrt{\frac{1}{2\cdot m+M}}$$

$$\boxed{\vec{u}^{(1)}=\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{1}{2\cdot m+M}}\\ \sqrt{\dfrac{1}{2\cdot m+M}}\\ \sqrt{\dfrac{1}{2\cdot m+M}}\end{pmatrix}}$$



transzláció

Ez nem vibráció (rezgés), hanem transzláció. A molekula mint egész egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.
Ez az eset kiküszöbölhető az $m\cdot x_1+M\cdot x_2+m\cdot x_3=0$ egyenlettel (az origót a tömegközéppontba helyezzük) $\Rightarrow$ a valódi rezgésekre 2×2-es mátrixot kapunk.

2. $\omega_2=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

I. $\quad 0\cdot u_1-k\cdot u_2+0\cdot u_3=0 \quad\Rightarrow\quad u_2=0$

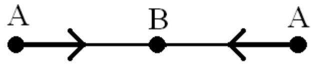
II. $\quad -k\cdot u_1+\left(2\cdot k-\dfrac{k\cdot M}{m}\right)\cdot u_2-k\cdot u_3=0 \quad\Rightarrow\quad -u_1=u_3$

III. $\quad 0\cdot u_1-k\cdot u_2+0\cdot u_3=0$

$$A\left(\vec{u}^{(2)},\,\vec{u}^{(2)}\right)=m\cdot\alpha^2+M\cdot0+m\cdot\alpha^2=1$$

$$\alpha=\sqrt{\frac{1}{2\cdot m}}$$

$$\boxed{\vec{u}^{(2)}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\-\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{2\cdot m}}\\0\\-\sqrt{\frac{1}{2\cdot m}}\end{pmatrix}}$$



normálrezgés
lélegző módus

3. $$\omega_3=\sqrt{\frac{k\cdot(2\cdot m+M)}{m\cdot M}}$$

I. $$\left(k-\frac{k\cdot(2\cdot m+M)}{M}\right)\cdot u_1-k\cdot u_2+0\cdot u_3=0$$

II. $$-k\cdot u_1+\left(2\cdot k-\frac{k\cdot(2\cdot m+M)}{m}\right)\cdot u_2-k\cdot u_3=0$$

III. $$0\cdot u_1-k\cdot u_2+\left(k-\frac{k\cdot(2\cdot m+M)}{M}\right)\cdot u_3=0$$

$$-k\cdot\frac{2\cdot m}{M}\cdot u_1-k\cdot u_2=0$$

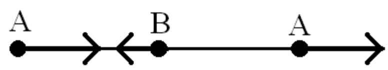
$$-k\cdot u_1-k\cdot\frac{2\cdot m}{M}\cdot u_3=0$$

$$u_1=u_3=-\frac{M}{2\cdot m}\cdot u_2=\alpha$$

$$A\left(\vec{u}^{(3)},\vec{u}^{(3)}\right)=m\cdot\alpha^2+M\cdot\frac{2\cdot m}{M}\cdot\alpha^2+m\cdot\alpha^2=1$$

$$\alpha=\left(2\cdot m\cdot\left(1+\frac{2\cdot m}{M}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\vec{u}^{(3)}=\left(2\cdot m\cdot\left(1+\frac{2\cdot m}{M}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-\frac{2\cdot m}{M}\\1\end{pmatrix}}$$

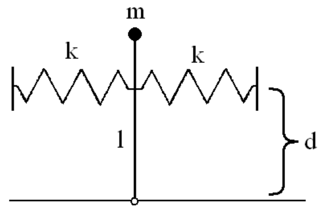


normálrezgés

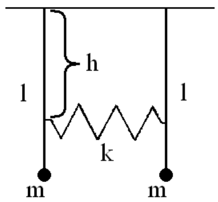
Általában n-atomos molekula esetében 3 koordináta a transzlációhoz, 3 koordináta a rotációhoz tartozik, vagyis a valódi vibrációk száma 3n-6.
(Lineáris molekulák esetében 3n-5.)

8.3. Feladatok

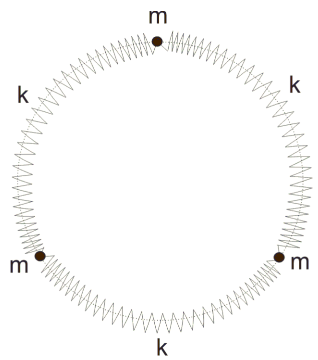
8.3.1. l hosszúságú súlytalan rúd alsó végét csuklóval a talajhoz rögzítjük, és a rudat mindkét oldalon k direkciós erejű, egyformán összenyomott, egyenes rugóval támasztjuk ki, melyek a csuklótól d távolságra érintkeznek a rúddal. A csukló csak a rúd és a rugók által meghatározott síkban való mozgást enged meg. A rúd másik végére m tömegű testet helyezünk. Határozzuk meg a stabil egyensúlyi helyzetet különböző terhelések esetén, valamint a kis rezgések frekvenciáját!



8.3.2. Írjuk le két csatolt inga mozgását!
Útmutató: a két egyforma inga mindegyike egy súlytalan l hosszúságú rúdból és a felfüggesztett m tömegből áll, a rudakat h mélységben egy k állandójú gyenge rugóval kötjük össze. A kicsinynek tekintett kitérési szögek Θ_1 és Θ_2.
a) Írjuk fel a Lagrange-függvényt kis szögekre!
b) Oldjuk meg a mozgásegyenleteket: határozzuk meg a sajátrezgéseket (normálrezgéseket)!
c) Elemezzük a megoldásokat!



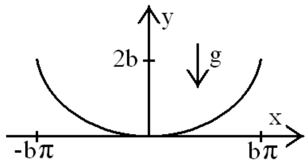
8.3.3. Egy kör mentén három m tömegű test mozoghat. A testeket egyforma rugók kötik egymáshoz a kör mentén. Mekkorák a rendszer sajátfrekvenciái, és milyen mozgások tartoznak ezekhez?



8.3.4. Egy tömegpont az (x, y) függőleges síkban az

$$x = b\cdot(\varphi + \sin(\varphi)),$$
$$y = b\cdot(1 - \cos(\varphi)) \qquad (-\pi \le \varphi \le \pi)$$

görbe mentén mozoghat.
a) Mutassa meg, hogy az origó körüli kis rezgések frekvenciája $\left(\frac{g}{4\cdot b}\right)^{\frac{1}{2}}$!
b) Mutassa meg, hogy nagy amplitúdók esetén is ugyanekkora a frekvencia!



8.3.5. Az l hosszúságú súlytalan rúd vízszintes tengelyű csuklóval kapcsolódik az Ω szögsebességgel forgó függőleges tengelyhez, másik végéremtömegű testet erősítettek.
a) Írja fel a Lagrange-függvényt!
b) Írja fel a mozgásegyenleteket!
c) Határozza meg és ábrázolja az egyensúlyi ϑ_0 helyzet körüli kis rezgések $(\vartheta - \vartheta_0 = a\cdot\cos(\omega\cdot t))$ frekvenciájának függését az Ω-tól!