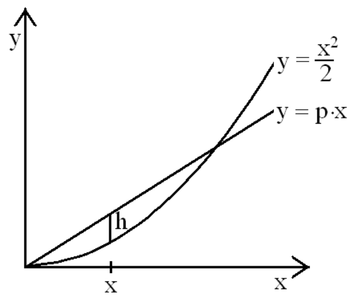
9. Hamilton-féle mechanika

9.1. Legendre-féle transzformáció

$x \rightarrow f(x) \left(pl. = \frac{x^2}{2} \right)$ alulról konvex



$h(x, p) = p \cdot x - f(x)$

Milyen x-nél maximális?

$\frac{\partial h}{\partial x} = 0: \quad \boxed{p = \frac{df}{dx}} \quad \rightarrow \quad x = x(p)$

a példában: $p = x\,;\; h = p \cdot x - \frac{x^2}{2}$

Mekkora a maximuma?

$g(p) = p \cdot x(p) - f(x(p))$

$g = p \cdot p - \frac{p^2}{2} = \frac{p^2}{2}$

Az ily módon definiált $p \rightarrow g(p)$ függvényt az f függvény Legendre-transzformációjának nevezzük.

$f \xrightarrow{\mathscr{L}} g$

A Legendre-transzformált Legendre-transzformáltja az eredeti függvény.

9.2. Hamilton-függvény

A Lagrange-függvény sebességek szerinti Legendre-féle transzformáltja az ún. Hamilton-függvény

$L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t)$

Általános impulzusok:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) \qquad \dot{q}_1 = \dot{q}_1(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$$
$$\vdots \qquad \rightarrow \qquad \vdots$$
$$p_f = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_f}(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f, t) \qquad \dot{q}_f = \dot{q}_f(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$$

$$H(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t) = \sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu \cdot p_\nu - L$$

Megjegyzés: a $\dot{q}$-okat ki kell küszöbölni!

9.2.1. Példák

1. Szabad részecske:
   koordináta: x
   sebesség: $\dot{x}$

$$x,\ \dot{x},\ t\ \rightarrow\ L=\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{x}^2$$

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\cdot\dot{x}\ \rightarrow\ \dot{x}=\frac{p}{m}$$

$$H(x,\ p,\ t)=\dot{x}\cdot p-L=\frac{p}{m}\cdot p-\frac{1}{2}\cdot m\cdot\frac{p^2}{m^2}=\frac{p^2}{2\cdot m}$$

2. Lineáris harmonikus oszcillátor:

$$x,\ \dot{x},\ t\ \rightarrow\ L=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot m\cdot\dot{x}^2}_{T}-\underbrace{\frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2}_{U}$$

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\cdot\dot{x}\ \rightarrow\ \dot{x}=\frac{p}{m}$$

$$H(x,\ p,\ t)=\dot{x}\cdot p-L=\frac{p^2}{m}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{m}+\frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2=\frac{p^2}{2\cdot m}+\frac{D\cdot x^2}{2}$$

3. n-testprobléma:

$$\vec{r}_1,\ \dots,\ \vec{r}_n,\ \dots,\ t$$

$$L=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_i\cdot\dot{\vec{r}}_i^2-U(\vec{r}_1,\ \dots,\ \vec{r}_n)$$

$$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_i\cdot\dot{\vec{r}}_i^2+U(\vec{r}_1,\ \dots,\ \vec{r}_n)$$

$$\vec{p}_1=\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_1}=m_1\cdot\dot{\vec{r}}_1\ \rightarrow\ \dot{\vec{r}}_1=\frac{\vec{p}_1}{m_1}$$
$$\vdots$$

$$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{\vec{p}_i^2}{2\cdot m_i}+U(\vec{r}_1,\ \dots,\ \vec{r}_n)$$

9.3. A Hamilton-függvény jelentése

A leggyakoribb esetekben a Hamilton-függvény a rendszer energiája.

Tétel:
Legyen $L=T-U$, ahol T homogén másodfokú $\dot{q}$-okban, és U nem függ a sebességtől. Ekkor a Hamilton-függvény az energia: $H(q, p, t)=T+U$

Bizonyítás: $H=\sum_{\nu=1}^{n}\dot{q}_\nu\cdot p_\nu-(T-U)=\sum_{\nu=1}^{n}\dot{q}_\nu\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}-T+U=\underbrace{\sum_{\nu=1}^{n}\dot{q}_\nu\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\nu}}_{2T}-T+U=T+U$

Tétel:
Ha L nem függ explicit módon (explicite) az időtől $\left(\frac{\partial L}{\partial t}=0\right)$, akkor:

$$h(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)\overset{def.}{=}\sum_{\nu=1}^{f}\dot{q}_\nu\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}-L$$ mozgásállandó (ún. energia).

Másképp: ha a Lagrange-függvény időeltolás invariáns, akkor a mechanikai rendszer energiája állandó a mozgás folyamán.
Ha a sebességeket az impulzusokkal kiküszöböljük, akkor $h(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ éppen a Hamilton-függvény.

Bizonyítás: $$\frac{dh}{dt}=\sum_{\nu=1}^{f}\left[\ddot{q}_\nu\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}+\dot{q}_\nu\cdot\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\right)\right]-\left[\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial q_\nu}\cdot\dot{q}_\nu+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\cdot\ddot{q}_\nu+\frac{\partial L}{\partial t}\right]=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{f}\ddot{q}_\nu\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\right)}_{=0}+\dot{q}_\nu\cdot\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}-\frac{\partial L}{\partial q_\nu}\right)}_{\substack{Euler-Lagrange\\ =0}}-\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

9.4. Kanonikus egyenletek

Mechanikai rendszer: $\underbrace{q_1, \dots,}_{q}\, q_f,\, \underbrace{p_1, \dots,}_{p}\, p_f, t$ $\quad 2f+1$-dimenziós tér, **kibővített fázistér**.

Adott a Hamilton-függvény: $H(q, p, t)$

Milyenek a mozgások?
$q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t \;\rightarrow\; q_1+dq_1, \dots, q_f+dq_f, p_1+dp_1, \dots, p_f+dp_f, t+dt$

$$dH=\frac{\partial H}{\partial q_1}\cdot dq_1+\ldots+\frac{\partial H}{\partial q_f}\cdot dq_f+\frac{\partial H}{\partial p_1}\cdot dp_1+\ldots+\frac{\partial H}{\partial p_f}\cdot dp_f+\frac{\partial H}{\partial t}\cdot dt=$$
$$=d\left(\sum_{\nu=1}^{f}\dot{q}_\nu\cdot p_\nu-L\right)=\sum_{\nu=1}^{f}d\left(\dot{q}_\nu\cdot p_\nu\right)-dL=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{f}\left(\underbrace{d\,\dot{q}_\nu\cdot}\,p_\nu+\dot{q}_\nu\cdot dp_\nu\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\cdot dq_1+\ldots+\frac{\partial L}{\partial q_f}\cdot dq_f+\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}\cdot d\,\dot{q}_1+\ldots+}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_f}\cdot d\,\dot{q}_f+\frac{\partial L}{\partial t}\cdot dt\right)\quad\Rightarrow$$

A megjelölt tagok az általános impulzusok definíciója alapján kiejtik egymást.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial q_\nu} = -\frac{\partial L}{\partial q_\nu}; \quad \dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Egy mozgás mentén $\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_\nu}}_{-\frac{\partial H}{\partial q_\nu}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}}_{p_\nu}}_{\dot{p}_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, f)$

Összefoglalva:

A mozgások kielégítik a

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_\nu &= \frac{\partial H}{\partial p_\nu} \\ \dot{p}_\nu &= -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \end{aligned}\right. \qquad (\nu = 1, \ldots, f)$$

2f db első rendű egyenletet; 2f rendű közönséges differenciálegyenlet rendszert (ODE).
Ezek az ún. kanonikus, vagy Hamiltoni mozgásegyenletek, a mozgásegyenletek a hamiltoni mechanikában.

Mozgásegyenletek:

Newtoni: $m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$

Lagrange-féle másodfajú: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, f)$

Hamiltoni: $\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial q_\nu}; \quad \dot{p}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, f)$

Variációs elv: $\delta S = 0$

Példa: lineáris harmonikus oszcillátor:

$$H = \frac{p^2}{2 \cdot m} + \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 \qquad (x, p, t)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2 \cdot \frac{p}{2 \cdot m} = \frac{p}{m}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -D \cdot x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -D \cdot x \end{aligned}}$$

A kanonikus egyenletekből könnyen visszakaphatjuk a Newton-féle mozgásegyenletet:

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} \Rightarrow \dot{p} = m \cdot \ddot{x}$$

$m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x$ visszakaptuk a Newton-féle mozgásegyenletet.

Fentebb láttuk, hogy ha a Lagrange-függvény nem függ explicit módon az időtől, akkor az energia mozgásállandó. Ennek megfelelője a Hamiltoni mechanikában az alábbi

Tétel:
Ha $H(q,\ p)$ nem függ explicite az időtől, akkor $H(q,\ p)$ a mozgásegyenletek első integrálja (azaz mozgásállandó).

Bizonyítás: $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q}\cdot\dot{q}+\frac{\partial H}{\partial p}\cdot\dot{p}=\frac{\partial H}{\partial q}\cdot\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{\partial H}{\partial p}\cdot\frac{\partial H}{\partial q}=0$

9.5. A Lagrange-függvény mértéktranszformációja

Az $L'=L(q,\dot{q},\ t)+\frac{dM(q,\ t)}{dt}$ „Lagrange-függvény" ugyanaz a mechanikai rendszer, mint L
$\left(M(q,\ t)\right.$ tetszőleges, megfelelően diffrenciálható függvény$\left.\right)$
L' a Lagrange-függvény mértéktranszformáltja.

Tétel: a mozgások mértékinvariánsak.

Bizonyítás: $S(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1} L\left(q(t),\ \dot{q}(t),\ t\right)dt;$ mozgások: $\delta S=0$

$$S'(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1} L'\,dt=\int_{t_0}^{t_1} L\left(q(t),\ \dot{q}(t),\ t\right)dt+M\left(q^1,\ t_1\right)-M\left(q^0,t_0\right)$$

$$S'=S+\underbrace{M_1-M_0}_{\acute{a}lland\acute{o}};\qquad \delta S'=\delta S=0$$

Vagyis az L' rendszer mozgásai azonosak az L rendszer mozgásaival: a mechanikai rendszer azonos.

9.6. A töltött részecske Lagrange-függvényének mértéktranszformációja

Fontos példa a mértékinvarianciára az elektromágneses Lorentz-erő hatása alatt mozgó töltött tömegpont esete: (q töltésű, m tömegű részecske egy $\vec{E}(\vec{r},\ t)$, $\vec{B}(\vec{r},\ t)$ változó elektromágneses mezőben)

Maxwell:

$$div\,\vec{B}=\vec{0}\qquad\Rightarrow\quad \vec{B}=rot\,\vec{A}$$

$$rot\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial\, rot\,\vec{A}}{\partial t}\ \Rightarrow\ rot\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0\ \Rightarrow\ \vec{E}=-grad\,\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

6 mező helyett 4 mező segítségével felírható az elektromágneses mező:
ϕ a skalárpotenciál, $\vec{A}$ a vektorpotenciál. Ezek azonban nem egyértelműek.

$$\vec{A}\,,\ \phi \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + grad\,\chi \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned}}$$ másodfajú mértéktranszformáció

$$\vec{B}' = rot\,\vec{A}' = rot\,\vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -grad\,\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -grad\left(\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\,grad\,\chi = \vec{E}$$

Vagyis az elektromágneses mező (és így a Lorentz-erő is) invariáns a másodfajú mértéktranszformációval szemben.

Írjuk fel a Lagrange-függvényt!

$$m\,,\ q\,,\ \vec{r}\,,\ \vec{v} = \dot{\vec{r}}\,,\ \vec{E}\,,\ \vec{B} \qquad (\vec{A}\,,\ \phi)$$

$$L(\vec{r}\,,\ \vec{v}\,,\ t) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot m\cdot \vec{v}^{\,2}}_{\substack{relativisztikusan: \\ -c^2\cdot m\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} + \underbrace{q\cdot\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r}\,,\ t) - q\cdot\phi(\vec{r}\,,\ t)}_{relativisztikus} \quad \Rightarrow$$

$$m\cdot\ddot{\vec{r}} = q\cdot\vec{E} + q\cdot\vec{v}\times\vec{B}$$ Lorentz-erő

Bizonyítás: $\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\cdot\vec{v} + q\cdot\vec{A}\right)$

x-komponensre:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\cdot\dot{x} + q\cdot A_x;\quad \frac{\partial L}{\partial x} = q\cdot\left(v_x\cdot\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\cdot\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\cdot\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\cdot\ddot{x} + q\cdot\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\cdot\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\cdot\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$m\cdot\ddot{x} = q\cdot\underbrace{\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)}_{E_x} + q\cdot\left[v_y\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{(rot\,\vec{A})_z} + v_z\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)}_{-(rot\,\vec{A})_y}\right]$$

$$\boxed{m\cdot\ddot{x} = q\cdot E_x + q\cdot(\vec{v}\times\underbrace{rot\,\vec{A}}_{\vec{B}})_x}$$

A felírt Lagrange-függvény valóban a töltött részecske mozgásegyenletét állítja elő nemrelativisztikus esetben.

Hajtsunk végre egy másodfajú mértéktranszformációt:

$$\left\{\begin{aligned} \vec{A}\,' &= \vec{A} + \frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}} \\ \phi\,' &= \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

$\vec{E}\,,\ \vec{B}$ nem változik

$$L\,' = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + q\cdot\vec{v}\cdot\vec{A}\,' - q\cdot\phi\,' = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + q\cdot\vec{v}\cdot\left(\vec{A} + \frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}}\right) - q\cdot\left(\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) =$$
$$= L + q\cdot\left(\vec{v}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) = L + q\cdot\frac{d\chi}{dt}$$

$$\left(\frac{d\chi}{dt} = \dot{\vec{r}}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial \chi}{\partial t}\right)$$

Az elektromágneses mező másodfajú mértéktranszformációja a Lagrange-függvény mértéktranszformációját eredményezi, de minthogy az elektromágneses mező sem, így a mozgások sem változnak.
Írjuk fel a Hamilton-függvényt!

$$H = \dot{q}\cdot p - L\,;\quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\cdot\vec{v} + q\cdot\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{v} = \frac{\vec{p} - q\cdot\vec{A}}{m}$$

$$H = \frac{\vec{p} - q\cdot\vec{A}}{m}\cdot\vec{p} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{(\vec{p} - q\cdot\vec{A})^2}{m} + \frac{q}{m}\cdot(\vec{p} - q\cdot\vec{A})\cdot\vec{A} - q\cdot\phi\right) =$$
$$= \left(\frac{\vec{p} - q\cdot\vec{A}}{m}\right)\cdot\left[\vec{p} - q\cdot\vec{A}\right] - \frac{1}{2\cdot m}\cdot(\vec{p} - q\cdot\vec{A})^2 + q\cdot\phi$$

$\boxed{H = \frac{(\vec{p} - q\cdot\vec{A})^2}{2\cdot m} + q\cdot\phi}$ nem relativisztikus esetben.

9.7. Feladatok

9.7.1. Írja fel az alábbi rendszerek Hamilton-függvényét és a kanonikus mozgásegyenleteket
a) szabad tömegpont (használjunk polárkoordinátákat)
b) nehézségi erőtérben mozgó tömegpont
c) lineáris harmonikus oszcillátor
d) térbeli harmonikus oszcillátor (izotrop és anizotrop esetben is)
e) homogén erőtérben mozgó anyagi pont
f) szigorúan centrális erőtérben mozgó anyagi pont (használjunk polárkoordinátákat)
g) egymás gravitációs erőterében mozgó két tömegpont (vezessünk be súlyponti és relatív koordinátákat)
h) az $m\cdot\ddot{x}+k\cdot x=F(t)$ mozgásegyenletű kényszerrezgést végző anyagi pont
i) síkinga, gömbi inga
Útmutató: lásd a 6.7.3. feladatot.

9.7.2. Felhasználva, hogy a csillapított lineáris harmonikus oszcillátor Lagrange-függvénye felírható $L=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{\beta}{m}\cdot t}\cdot\left[\dot{x}^2+\frac{\beta}{m}\cdot x\cdot\dot{x}+\left(\frac{\beta^2}{2\cdot m^2}-\frac{k}{m}\right)\cdot x^2\right]$ alakban, írja fel az általános impulzust és a Hamilton-függvényt!

9.7.3. Legyen $\tilde{x}(t)$ egy tetszőleges partikuláris megoldása az $m\cdot\ddot{x}+c\cdot\dot{x}+k\cdot x=F(t)$ mozgásegyenletnek. (Gerjesztett csillapított harmonikus oszcillátor.) Tegyük fel, hogy $\frac{c^2}{4\cdot m}<k$ (ún. valódi csillapított rezgés). Hajtsuk végre az $Y=e^{\frac{c\cdot t}{2\cdot m}}\cdot(x-\tilde{x})$ koordináta transzformációt! Mutassuk meg, hogy $m\cdot\ddot{Y}+\tilde{k}\cdot Y=0$ az új mozgásegyenlet, ahol $\tilde{k}=k-\frac{c^2}{4\cdot m}$! Írjuk fel az új Lagrange- és Hamilton-függvényt! Mutassuk meg, hogy

$$\tilde{x}=\frac{1}{m\cdot\omega}\cdot e^{-\frac{c\cdot t}{2\cdot m}}\cdot\Re\left\{i\cdot e^{-i\cdot mega\cdot t}\cdot\int_0^t e^{\frac{c\cdot\tau}{2\cdot m}}\cdot F(\tau)\cdot e^{i\cdot\omega\cdot\tau}\,d\tau+\sqrt{2\cdot m\cdot\omega\cdot\hbar}\cdot z(0)\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}\right\}$$ általános megoldása

az eredeti mozgásegyenletnek, ahol $z(0)$ egy tetszőleges komplex szám és $\omega=\sqrt{\frac{\tilde{k}}{m}}$.