10. Szimmetriák és megmaradási tételek

10.1. Koordináta transzformációk

$\underbrace{q_\nu}_{\substack{\text{régi}\\\text{koordináták}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{Q_\nu}_{\substack{\text{új}\\\text{koordináták}}}$ invertálható és kétszer folytonosan differenciálható (diffeomorfizmus)

$\underbrace{M_{\nu\mu}=\frac{\partial q_\nu}{\partial Q_\mu}}_{\substack{\text{a transzformáció}\\\text{Jacobi mátrixa}}}$ és $M^{-1}_{\mu\nu}=\frac{\partial Q_\mu}{\partial q_\nu}$ nem-szinguláris mátrixok

Tekintsünk el az időfüggéstől:

$q_\nu=q_\nu(Q_1, \dots , Q_f) \quad \Leftrightarrow \quad Q_\nu=Q_\nu(q_1, \dots , q_f)$

$L(q_1, \dots , q_f, \dot{q}_1, \dots , \dot{q}_f, t)$

Hogyan állítjuk elő az új Lagrange-függvényt? Megmutatjuk, hogy

$$L'(Q_1, \dots, Q_f, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_f, t) \overset{\text{áll.}}{=} L(q_1(Q_1, \dots, Q_f), \dots, \dot{q}_1(Q_1, \dots, Q_f, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_f), \dots, t)$$

Tétel:

Valahányszor a γ extrémálisa $L \rightarrow S$-nek, mindannyiszor extrémálisa $L' \rightarrow S'$-nek is, vagyis az L-hez, ill. L'-höz tartozó mozgások megegyeznek: a két mechanikai rendszer ekvivalens.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}-\frac{\partial L}{\partial q_\nu}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_\nu}-\frac{\partial L'}{\partial Q_\nu}=0$$

Bizonyítás:

$$\dot{Q}_\nu=\sum_{\mu=1}^{f}\frac{\partial Q_\nu}{\partial q_\mu}\cdot\dot{q}_\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{Q}_\nu}{\partial \dot{q}_\mu}=\frac{\partial Q_\nu}{\partial q_\mu}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial Q_\nu}{\partial q_\mu}=\frac{\partial \dot{Q}_\nu}{\partial q_\mu}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_\nu}-\frac{\partial L'}{\partial Q_\nu}}_{B_\nu}=\frac{d}{dt}\sum_{\mu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\cdot\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{Q}_\nu}-\sum_{\mu=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu}\cdot\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\nu}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\cdot\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial Q_\nu}\right)=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{f}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\right)\cdot\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{Q}_\nu}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial \dot{Q}_\nu}-\sum_{\mu=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\mu}\cdot\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\nu}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\cdot\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial Q_\nu}\right)=$$

$$=\sum_{\mu=1}^{f}\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}-\frac{\partial L}{\partial q_\mu}\right)}_{b_\mu}\cdot\frac{\partial q_\mu}{\partial Q_\nu}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu}\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial Q_\nu}-\frac{\partial \dot{q}_\mu}{\partial Q_\nu}\right)}_{=0}$$

$B_\nu=M_{\nu\mu}\cdot b_\mu$

Vagyis ha az összes $B_\nu=0$, akkor és csak akkor az összes $b_\mu=0$.

Ezzel az állítást bizonyítottuk.

10.2. Szimmetriák és megmaradási tételek (Noether-tétel)

Tekintsük az s paramétertől folytonosan differenciálható módon függő $Q_\nu^s = Q_\nu^s(q_1, \ldots, q_f)$ koordináta transzformációkat $\left(\text{például: } \vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i^{\,s} = \vec{r}_i + s\cdot\vec{a}\right)$, és tegyük fel, hogy $s=0$-hoz az egység tartozik: $q = Q^{s=0}$.

Legyen $I(q, \dot{q}) \overset{def.}{=} \sum_{\nu=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \cdot \left[\frac{dQ_\nu^s}{ds}\right]_{s=0}$.

Tétel: ha L invariáns a $q \rightarrow Q^s$ egyparaméteres diffeomorfizmusokkal szemben, akkor $I(q, \dot{q})$ mozgásállandó.

Például ha L invariáns a tízparaméteres Galilei-csoport műveleteivel szemben, akkor tíz mozgásállandó létezik (a mozgásegyenletek tíz első integrálja).

10.2.1. Impulzus megmaradási tétel

Ha a Lagrange-függvény invariáns az $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i{}' = \vec{r}_i + \vec{a}$ térbeli eltolásokkal szemben ($\vec{a}$ tetszőleges vektor), akkor egy mozgás során a rendszer (össz)impulzusa állandó.
(a tér homogén $\Rightarrow$ impulzus-megmaradás)

Bizonyítás: $\vec{a} = s\cdot\hat{a}$ $\quad$ $(s$ tetszőlegesen kicsi$)$

L megváltozása $= 0 = \delta L =$

$$= L(\vec{r}_1+\vec{a}, \ldots, \vec{r}_n+\vec{a}, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_n, t) - L(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_n, t) =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_1}\cdot\vec{a} + \ldots + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_n}\cdot\vec{a} + O(2) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\right)\cdot s\cdot\hat{a} = 0$$

A mozgás folyamán $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \quad (i=1, \ldots, n) \quad \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\right)\cdot\hat{a} = 0$$

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}; \quad \vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \quad \text{összimpulzus}$$

$\vec{P}\cdot\hat{a} = \textit{állandó}$ (Az impulzus $\vec{a}$ irányú vetülete állandó.)
Ha a tér homogén, vagyis $\vec{a}$ tetszőleges, akkor $\vec{P}$-nek állandó vektornak kell lennie.

Például: mozgás homogén nehézségi erőtérben:

$L = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - m\cdot g\cdot z$ $\quad$ invariáns a vízszintes irányú eltolásokkal szemben.

$\vec{a} = (a_x, a_y, 0)$

$x \rightarrow x + a_x$

$y \rightarrow y + a_y$

$z \rightarrow z$

Az impulzus vízszintes vetülete állandó $\left(p_x = p_{x0} \text{ és } p_y = p_{y0}\right)$.

10.2.2. Impulzusmomentum megmaradás

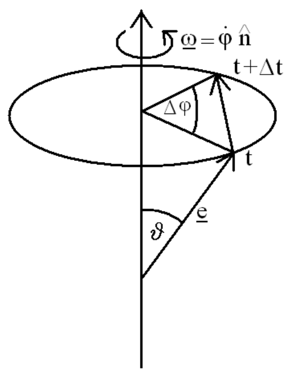
Ha L invariáns a térbeli forgatásokkal szemben (vagyis ha a tér izotrop), akkor a mechanikai rendszer impulzusmomentuma mozgásállandó.
(a tér izotrop $\Rightarrow$ impulzusmomentum megmaradás)
Bizonyítás: térbeli forgatások: $(\hat{n}$ tengely körüli $s=\delta\varphi$ szögű forgatás$)$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{r}\ \rightarrow\ \vec{r}+\delta\vec{r}\\ \vec{v}\ \rightarrow\ \vec{v}+\delta\vec{v}\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\delta\vec{r}=\delta\varphi\cdot\hat{n}\times\vec{r}\\ \delta\vec{v}=\delta\varphi\cdot\hat{n}\times\vec{v}\end{array}}$$

$$L=L(\vec{r}_1,\ \ldots,\ \vec{r}_n,\ \vec{v}_1,\ \ldots,\ \vec{v}_n,\ t)$$

$$\delta L=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_i}\cdot\delta\vec{r}_i+\frac{\partial L}{\partial\vec{v}_i}\cdot\delta\vec{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_i}\cdot\delta\vec{r}_i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\right)\cdot\delta\vec{r}_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\right)}_{\substack{=0\\ \text{a mozgás során}}}\cdot\delta\vec{r}_i+\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}}_{\vec{p}_i}\cdot\delta\vec{r}_i\right)=0$$



$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i\cdot(\delta\varphi\,\hat{n}\times\vec{r}_i)=0 \qquad (\delta\varphi\ \text{tetszőleges})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\hat{n}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)=\mathit{állandó}\quad \text{egy mozgás folyamán}$$

$$\hat{n}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\vec{r}_i\times\vec{p}_i}_{\vec{l}_i}}_{\vec{L}}=\boxed{\hat{n}\cdot\vec{L}=\mathit{állandó}}$$

Az impulzusnyomaték vetülete a forgástengelyre mozgásállandó.
Ha $\hat{n}$ tetszőleges, akkor $\vec{L}$ állandó vektor.

10.2.3. Időeltolás invariancia

Ha L invariáns a $t\ \rightarrow\ t+\delta t$ időeltolással szemben, akkor a $h(q,\ \dot{q})=\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\nu}\cdot\dot{q}_\nu-L$ mennyiség (általában energia) mozgásállandó.
(az idő homogén $\Rightarrow$ energia-megmaradás)
Bizonyítás: $L(\vec{r}_1,\ \ldots,\ \vec{r}_n,\ \dot{\vec{r}}_1,\ \ldots,\ \dot{\vec{r}}_n,\ t)$

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial\vec{r}_1}\cdot\delta\vec{r}_1+\ldots+\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_1}\cdot\delta\dot{\vec{r}}_1}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\cdot\delta\vec{r}_1\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_i}\right)\cdot\delta\vec{r}_1}+\ldots+\frac{\partial L}{\partial t}\cdot\delta t=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{r}}_1}\cdot\delta\vec{r}_1+\ldots\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\cdot\delta t$$

A mozgás mentén:

$$\frac{\delta L}{\delta t}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_1}\cdot\underbrace{\frac{\delta \vec{r}_1}{\delta t}}_{\dot{\vec{r}}_1}+\ldots\right)=\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(L-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}\cdot\dot{\vec{r}}_i\right)=\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

Ha az L invariáns egy $t \rightarrow t+\delta t$ transzformációval szemben, akkor L nem függhet explicite az időtől: $\frac{\partial L}{\partial t}=0,$ vagyis h mozgásállandó.

Egy másik bizonyítás:

$$\frac{dh}{dt}=\sum_{\nu=1}^{f}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\cdot\dot{q}_\nu\right)-\frac{dL}{dt}=\sum_{\nu=1}^{f}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\right)\cdot\dot{q}_\nu+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\cdot\ddot{q}_\nu-\left(\sum_{\nu=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial q_\nu}\cdot\dot{q}_\nu+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\cdot\ddot{q}_\nu+\frac{\partial L}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}=0 \quad\Rightarrow\quad h \text{ mozgásállandó}$$

10.3. Feladatok

10.3.1. Mutassuk meg, hogy a földi nehézségi erőtérben mozgó tömegpont impulzusának bármely vízszintes vetülete mozgásállandó!

10.3.2. Mutassuk meg, hogy egy magára hagyott súlyzó (két tömegpont súlytalan merev rúddal összekötve) impulzusnyomatékának vetülete a súlytalan rúd irányára mozgásállandó!

10.3.3. Álljon a mechanikai rendszer két rugóval összekötött tömegpontból, amelyek egy súlytalan rúd mentén mozoghatnak. A rúd szabadon mozoghat egy űrhajó belsejében. Mutassuk meg, hogy a teljes impulzusnyomaték rúd irányú vetülete mozgásállandó!

10.3.4. Mutassuk meg, hogy a $V(r)=-\frac{\alpha}{r}$ $(\alpha=\gamma\cdot m\cdot M)$ potenciáltérben mozgó m tömegpont $\vec{L}$ impulzusnyomatéka, továbbá ún. Laplace-Runge-Lenz vektora $\left(\vec{A}=\vec{p}\times\vec{L}-m\cdot\alpha\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)$ mozgásállandó $(\vec{p}$ a tömegpont impulzusa$)$!