11. Merev testek mechanikája

11.1. Merev test definíciója

Olyan test, melynek bármely két pontja közti távolság a mozgás folyamán állandó.

Modell:
Merev pontrendszer: $m_1, \ldots, m_n, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$

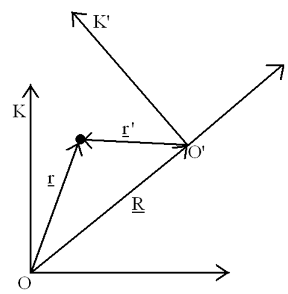
A tömegpontokat kössük össze súlytalan merev rudakkal.
$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = d_{ij}$ a mozgás során állandó $(i, j = 1, \ldots, n)$

Ez a merev test egy holonom, szkleronom pontrendszer.

A szabad merev test helyzetének megadásához 6 független adat szükséges. (Kivétel a lineáris merev testet, ahol 5 független adat is elegendő.)

A merev test 6 szabadsági fokkal rendelkezik (6 független adat)

Bizonyítás:
a) A merev test egy tetszőleges pontjának megadása (O) és az irányultság megadása összesen 6 adat.
Legyen K inerciarendszer (laboratóriumi rendszer): $O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$
Legyen K' a merev testhez rögzített rendszer: $O', \hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'$
Ahány adat a K' helyzetének meghatározásához szükséges, annyi adattal tudom leírni a merev test helyzetét.



$m_i(\vec{r}_i')$ K'-ben nyugszik

$O': \vec{R}$ (3 adat), $\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'$ (szimmetria 3 adat), mert

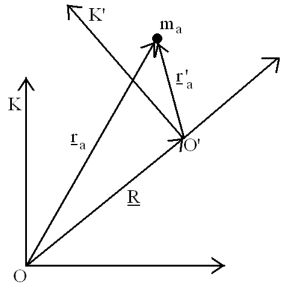
$$\left.\begin{cases} \hat{e}_1' \text{ 2 adat} \\ \hat{e}_2' \text{ 1 adat} \\ \hat{e}_3' = \hat{e}_1' \times \hat{e}_2' \end{cases}\right\} \text{például: Euler-szögek}$$

b) Egy merev test helyzetének megadásához elég 3 nem egy egyenesbe eső pontjának megadása $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$: 9 adat, amelyek közül csak 6 független, mivel 3 egyenletnek fenn kell állnia$)$

$$d_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|; \quad d_{13} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|; \quad d_{23} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|$$

11.2. Kinematika alaptétele

Egy merev test tetszőleges elmozdulása felbontható egy transzlációra (eltolásra) és egy rotációra (forgatásra).
A bizonyítást infinitezimális (végtelenül) kicsiny elmozdulásra végezzük el. Felhasználjuk a forgó vonatkoztatási rendszerre vonatkozó összefüggéseket (ld.:4. Fejezet). K' az együttforgó rendszer.



$$\vec{r}_a, \; m_a \quad (a=1, \dots, n)$$

$$\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{r}_a{}' \qquad \left(\dot{\hat{e}}_i{}' = \vec{\omega} \times \hat{e}_i{}'; \quad i=1, 2, 3\right)$$

$\dot{\vec{r}}_a^{(K)} = \dot{\vec{R}}^{(K)} + \dot{\vec{r}}_a{}'^{(K)} = \vec{V}_{O'} + \underbrace{\vec{v}_a{}'}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{r}_a{}'$, mivel a merev testhez rögzített rendszerben a merev test pontjai nyugalomban vannak.

A merev test egy tetszőleges a pontjának sebessége:

$\boxed{\vec{v}_a = \underbrace{\vec{V}_{O'}}_{transzláció} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_a{}'}_{rotáció},}$ illetőleg elmozdulása dt idő alatt:

$$\vec{v}_a\, dt = d\vec{r}_a = \underbrace{\vec{V}_{O'} dt}_{d\vec{R}} + \underbrace{\vec{\omega}\, dt \times \vec{r}_a{}'}_{d\vec{\varphi} \times \vec{r}_a{}'} \;\Rightarrow\; d\vec{r}_a = d\vec{R} + d\vec{\varphi} \times \vec{r}_a{}'$$

Az első tag a transzláció, a második pedig a rotáció.

11.3. Dinamika

A merev test fázistere 12 dimenziós (f=6), a dinamikai egyenlet 12-edrendű közönséges differenciálegyenlet rendszer, amelyet az impulzustétel és az impulzusnyomaték-tétel szolgáltat:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{külső}; \; \dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{külső}, \;\text{ ahol }\; \vec{P} = \sum_{a=1}^{n} m_a \cdot \dot{\vec{r}}_a; \; \vec{L}_O = \sum_{a=1}^{n} \vec{r}_a \times m_a \cdot \dot{\vec{r}}_a$$

Írjuk fel a merev test impulzusát:

$$\vec{P} = \sum_{a=1}^{n} m_a \cdot \dot{\vec{r}}_a = \sum_{a=1}^{n} m_a \cdot \left(\vec{V}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_a{}'\right) = \left(\sum_{a=1}^{n} m_a\right) \cdot \left[\vec{V}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'_{tkp}\right] = \left(\sum_{a=1}^{n} m_a\right) \cdot \vec{v}_{tkp}$$

$$\left(\vec{r}_{tkp}; \; \vec{r}\,'_{tkp} \text{ az } O \text{ illetve } O'\text{-ből a tömegközéppontba húzott vektor}\right)$$

$$\left[\text{a tömegközéppont definíciója:} \left(\sum_{a=1}^{n} m_a\right) \cdot \vec{r}_{tkp} = \sum_{a=1}^{n} m_a \cdot \vec{r}_a\right]$$

Írjuk fel a merev test impulzusnyomatékát is:

$$\vec{L} = \sum_{a=1}^{n} m_a \cdot \vec{r}_a \times \left(\vec{V}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_a{}'\right) = \left(\sum_{a=1}^{n} m_a\right) \cdot \vec{r}_{tkp} \times \vec{V}_{O'} + \sum_{a=1}^{n} m_a \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_a{}'\right) =$$

$$= \left(\sum_{a=1}^{n} m_a\right) \cdot \vec{r}_{tkp} \times \vec{V}_{O'} + \sum_{a=1}^{n} m_a \cdot \vec{R} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_a{}'\right) + \underbrace{\sum_{a=1}^{n} m_a \cdot \vec{r}_a{}' \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_a{}'\right)}_{\vec{J}}$$

$$\vec{L}=\left(\sum_{a=1}^{n} m_a\right)\cdot\left\{\underbrace{\vec{r}_{tkp}}_{\vec{R}+\vec{r}\,'_{tkp}}\times\vec{V}_{O'}+\vec{R}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'_{tkp}\right)\right\}+\vec{J}=$$

$$=\left(\sum_{a=1}^{n} m_a\right)\cdot\vec{R}\times\underbrace{\left(\vec{V}_{O'}+\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,'_{tkp}\right)\right)}_{\vec{v}_{tkp}}+\left(\sum_{a=1}^{n} m_a\right)\cdot\vec{r}\,'_{tkp}\times\vec{V}_{O'}+\vec{J}=$$

$$=\vec{R}\times\vec{P}+\left(\sum_{a=1}^{n} m_a\right)\cdot\vec{r}\,'_{tkp}\times\vec{V}_{O'}+\vec{J}$$

Ha O'-t a tömegközéppontba helyezzük, akkor $\boxed{\vec{L}_O=\underbrace{\vec{r}_{tkp}\times\vec{P}}_{\text{pályaimpulzus-nyomaték}}+\vec{J}}$

Mintha a test teljes tömege bele lenne sűrítve a tömegközéppontba és az mozogna.

A $\vec{J}=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\vec{r}_a\,'\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_a\,'\right)$ mennyiség a merev test perdülete.

A formulából látszik, hogy a perdület a szögsebesség homogén lineáris függvénye.

$\vec{\omega}\;\rightarrow\;\vec{J}=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\vec{r}_a\,'\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_a\,'\right)=\Theta\cdot\vec{\omega}$, ahol a Θ homogén lineáris transzformáció az ún. **tehetetlenségi tenzor**.

A tehetetlenségi tenzor komponensei K-ban illetve K'-ben:

$$J_i=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\left(\left(\vec{r}_a\,'\cdot\vec{r}_a\,'\right)\cdot\vec{\omega}-\left(\vec{r}_a\,'\cdot\vec{\omega}\right)\cdot\vec{r}_a\,'\right)_i=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\left((\vec{r}_a\,')^2\cdot\omega_i-\sum_j\left(x'_{aj}\cdot\omega_j\right)\cdot x'_{ai}\right)$$

$\vec{r}_a\,'=\sum_{j=1}^{3} x'_{ai}\cdot\hat{e}_i\,;\;\;\omega_i=\sum_{j=1}^{3}\omega_j\cdot\delta_{ij}$ (a szumma jeleket kényelmi okokból nem mindig írjuk ki)

$$J_i=\sum_{j=1}^{3}\boxed{\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\left((\vec{r}_a\,')^2\cdot\delta_{ij}-x'_{ai}\cdot x'_{aj}\right)\cdot\omega_j}=\sum_{j=1}^{3}\Theta_{ij}\cdot\omega_j\quad\Rightarrow$$

Mátrix jelöléssel:

$$\begin{pmatrix}J_1\\J_2\\J_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\Theta_{11}&\Theta_{12}&\Theta_{13}\\\Theta_{21}&\Theta_{22}&\Theta_{23}\\\Theta_{31}&\Theta_{32}&\Theta_{33}\end{pmatrix}}_{\text{tehetetlenségi tenzor}}\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}$$

Itt bevezettük a **tehetetlenségi tenzor komponenseire** a $\Theta_{ij}=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\left((\vec{r}_a\,')^2\cdot\delta_{ij}-x'_{ai}\cdot x'_{aj}\right)$ jelölést. Ebből közvetlenül leolvasható, hogy **a tehetetlenségi tenzor szimmetrikus**: $\Theta_{ji}=\Theta_{ij}$

A diagonális komponensek a tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékok:

Az 1-es tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_{11}=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\left((\vec{r}_a\,')^2-(x'_{a1})^2\right)=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\left((x'_{a2})^2+(x'_{a3})^2\right)$$

A 2-es tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_{22}=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\left((\vec{r}_a\,')^2-(x\,'_{a2})^2\right)=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\left((x\,'_{a3})^2+(x\,'_{a1})^2\right)$$

A 3-as tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_{33}=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\left((\vec{r}_a\,')^2-(x\,'_{a3})^2\right)=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\left((x\,'_{a1})^2+(x\,'_{a2})^2\right)$$

A nem-diagonális elemek az ún. deviációs nyomatékok:

$$\Theta_{12}=\Theta_{21}=-\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot x\,'_{a1}\cdot x\,'_{a2}$$

$$\Theta_{ij}=\Theta_{ji}=-\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot x\,'_{ai}\cdot x\,'_{aj}\,; \qquad i\neq j$$

Ha folytonos tömegeloszlást tételezünk fel, akkor a tömegpontokra vett összegzés helyett a test térfogatára vett integrálásokat kell használni:

$$\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot(\ldots) \;\rightarrow\; \int_V \rho(\ldots)\,dV$$

Például:

$$\Theta_{11}=\Theta_{xx}=\sum_{a=1}^{n} m_a\cdot\left(y_a^2+z_a^2\right)=\int_V \rho(x\,,\,y\,,\,z)(y^2+z^2)\,dV$$

11.4. Merev test mozgási energiája

$$T=\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_a\cdot\vec{v}_a^2=\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_a\cdot\left(\vec{V}_{O'}+\vec{\omega}\times\vec{r}_a{}'\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{a=1}^{n}m_a\right)\cdot\vec{V}_{O'}^2+\vec{V}_{O'}\cdot\left(\vec{\omega}\times\left(\sum_{a=1}^{n}m_a\right)\cdot\vec{r}\,'_{tkp}\right)+T_{rot}$$

Az első tag a transzlációs, vagy haladási energia, a második tag az ún. kölcsönös energia, a harmadik pedig a rotációs, vagy forgási energia:

$$T_{rot}=\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_a\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_a{}'\right)^2=\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_a\cdot\vec{\omega}^2\cdot(\vec{r}_a{}')^2\cdot\left(1-\cos^2\sphericalangle(\vec{\omega};\ \vec{r}_a{}')\right)=$$

$$=\sum_{a=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot m_a\cdot\left((\vec{r}_a{}')^2\cdot\omega^2-\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_a{}'\right)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\boxed{\sum_{a=1}^{n}m_a\cdot\left((\vec{r}_a{}')^2\cdot\delta_{ij}-x'_{ai}\cdot x'_{aj}\right)}\cdot\omega_i\cdot\omega_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\Theta_{ij}\cdot\omega_i\cdot\omega_j$$

$$T_{rot}=\frac{1}{2}\cdot\vec{\omega}\cdot\Theta\cdot\vec{\omega}=\frac{1}{2}\left(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\right)\begin{pmatrix}\Theta_{11}&\Theta_{12}&\Theta_{13}\\ \Theta_{21}&\Theta_{22}&\Theta_{23}\\ \Theta_{31}&\Theta_{32}&\Theta_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}$$

$$T=T_{transzlációs}+T_{kölcsönös}+T_{rotációs}$$

Ha az O'-t a tömegközéppontba tesszük, akkor $\vec{r}\,'_{tkp}=0$ és így a mozgási energiát az össztömeg haladási és forgási energiája adja.

11.5. A tehetetlenségi tenzor tulajdonságai

$\vec{\omega}\ \rightarrow\ \vec{J}=\Theta\cdot\vec{\omega}$ a tehetetlenségi tenzor definíciója, komponensei a K-ban:

$K:\ O;\ \vec{e}_1;\ \vec{e}_2;\ \vec{e}_3:\ \ \Theta_{ij}^{O}=\sum_{a=1}^{n}m_a\cdot\left[(r_a{}')^2\cdot\delta_{ij}-x'_{ai'}\cdot x'_{aj'}\right]$ (időben változó).

Ha a komponenseket a K'-ben írjuk fel, akkor:

$K':\ O';\ \vec{e}_1{}';\ \vec{e}_2{}';\ \vec{e}_3{}':\ \ \boxed{\Theta_{i'j'}^{O'}=\sum_{a=1}^{n}m_a\cdot\left[(r_a{}')^2\cdot\delta_{i'j'}-x'_{ai'}\cdot x'_{aj'}\right]}$ a komponensek időben állandók. Emiatt, ha mást nem mondunk, a tehetetlenségi tenzor komponenseit az együttforgó rendszerben adjuk meg.

$$\vec{r}_a{}'=\sum_{i}x'_{ai}\cdot\vec{e}_i=\sum_{i'=1}^{3}x'_{ai'}\cdot\vec{e}_{i'}{}'$$

Az együttforgó rendszerre vonatkoztatott komponenseket a tömegeloszlás és a geometria határozza meg.

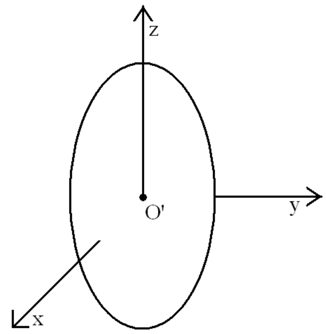
Pl.: $a\,;\,b\,;\,c\,;$ féltengelyű homogén ellipszoidra
(Az integráláshoz használjunk gömbi polárkoordinátát!)

$$\rho = állandó = \frac{m}{V}, \qquad V = \frac{4\cdot\pi}{3}\cdot a\cdot b\cdot c$$

$$\Theta_{xx} = \frac{m}{5}\cdot(b^2+c^2)$$

Tulajdonságok:

- szimmetrikus: $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$
- pozitív $\left(T_{rot} = \frac{1}{2}\cdot\vec{\omega}\cdot\Theta\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}\cdot\vec{\omega}\cdot\vec{J} = \sum_a \frac{1}{2}\cdot m_a\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_a{}'\right)^2 \geq 0\right)$
- $\frac{\partial T_{rot}}{\partial\vec{\omega}} = \Theta\cdot\vec{\omega} = \vec{J}$



Következmények:

- Sajátértékei valósak és pozitívak (kivéve lineáris merev test)
- Mindig van olyan K', melyben Θ_{ij} diagonális (ún. főtehetetlenségi rendszer), amelyben a diagonálisban a tehetetlenségi tenzor sajátértékei: $\left(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 > 0\right)$ állnak.
- $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$-ból háromszög szerkeszthető $\left(\Theta_i \leq \Theta_j + \Theta_k\right)$

$$\Theta_1 = \sum_a m_a\cdot(y_a^2+z_a^2) \overset{?}{\leq} \sum_a m_a\cdot(z_a^2+x_a^2) + \sum_a m_a\cdot(x_a^2+y_a^2)$$

- Szimmetriák:
  - Ha a merev testnek van tükörsíkja, akkor az egyik főtengely merőleges a tükörsíkra,
  - ha a merev testnek van forgástengelye (szimmetriatengelye), akkor az főtengely.
- Steiner-tétel:

  $$\Theta_{ij}^{O'} = \Theta_{ij}^{tkp} + \left(\sum m\right)\cdot\left[(r_{tkp}{}')^2\cdot\delta_{ij} - x'_{tkp\,i}\cdot x'_{tkp\,j}\right]$$

  Bizonyítás:

  $$\left(\vec{r}_a{}' = \vec{r}\,'_{tkp} + \vec{r}_a{}''\right)$$

  $$\Theta_{ij}{}' = \sum_a m_a\cdot\left[(r_a{}')^2\cdot\delta_{ij} - x'_{a\,i}\cdot x'_{a\,j}\right] =$$
  $$= \sum_a m_a\cdot\left[(\vec{r}\,'_{tkp}+\vec{r}_a{}'')^2\cdot\delta_{ij} - \left(x'_{tkp\,i}+x_{a\,i}{}''\right)\cdot\left(x'_{tkp\,j}+x_{a\,j}{}''\right)\right] =$$
  $$= \sum_a m_a\cdot\left[(r_a{}'')^2\cdot\delta_{ij} - x_{a\,i}{}''\cdot x_{a\,j}{}''\right] + \sum_a m_a\cdot\left[(r_{tkp})^2\cdot\delta_{ij} - x'_{tkp\,i}\cdot x'_{tkp\,j}\right] +$$
  $$+ \sum_a m_a\cdot\left[2\cdot\vec{r}_{tkp}{}'\cdot\vec{r}_a{}''\cdot\delta_{ij} - x'_{tkp\,i}\cdot x_{a\,j}{}'' - x_{a\,i}{}''\cdot x'_{tkp\,j}\right]$$

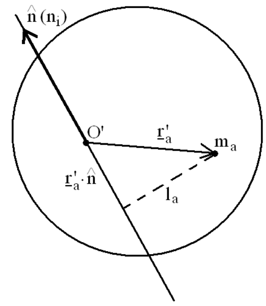
  De $\sum_a m_a\cdot\vec{r}_a{}'' = 0$, így az utolsó szumma nullát ad.

- A és B testek legyenek diszjunktak (különállók) és legyenek mereven összecsatolva: van egy $A+B$ testünk: $\left(\Theta_{A+B}^{O'} = \Theta_A^{O'} + \Theta_B^{O'}\right)$
  vagyis **a tehetetlenségi tenzor additív**

– **Tehetetlenségi nyomaték definíciója**:
A merev testnek O'-n átmenő $\hat{n}$ tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékán a $\Theta_n = \hat{n} \cdot \Theta^{O'} \cdot \hat{n}$ kvadratikus alakot értjük. Ez megegyezik a szokásos definícióval:

$$\Theta_{\hat{n}} = \sum_{i,j=1}^{3} n_i \cdot \Theta_{ij} \cdot n_j = \sum_{i,j} n_i \cdot \sum_a m_a \cdot \left[(\vec{r}_a{}')^2 \cdot \delta_{ij} - x'_{ai} \cdot x_{aj} \right] \cdot n_j =$$
$$= \sum_a m_a \cdot \left[\underbrace{\sum_{i,j} (\vec{r}_a{}')^2 \cdot n_i \cdot \delta_{ij} \cdot n_j}_{(\vec{r}\,'_a)^2} - \underbrace{(n_i \cdot x_{ai}{}')}_{\hat{n} \cdot \vec{r}_a{}'} \cdot \underbrace{(x_{aj}{}' \cdot n_j)}_{\vec{r}_a{}' \cdot \hat{n}} \right] =$$
$$= \sum_a m_a \cdot \underbrace{\left[(\vec{r}_a{}')^2 - (\hat{n} \cdot \vec{r}_a{}')^2 \right]}_{l_a^2}$$

ahol l_a az m_a távolsága a forgástengelytől.



Ha ismerjük a tehetetlenségi tenzort, akkor könnyen kiszámolhatjuk egy tetszőleges irányú tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot:

$$\hat{n}(\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$$

$$\Theta_{\alpha,\beta,\gamma} = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)) \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} =$$

$$= (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)) \begin{pmatrix} \Theta_{xx} \cdot \cos(\alpha) + \Theta_{xy} \cdot \cos(\beta) + \Theta_{xz} \cdot \cos(\gamma) \\ \Theta_{yx} \cdot \cos(\alpha) + \Theta_{yy} \cdot \cos(\beta) + \Theta_{yz} \cdot \cos(\gamma) \\ \Theta_{zx} \cdot \cos(\alpha) + \Theta_{zy} \cdot \cos(\beta) + \Theta_{zz} \cdot \cos(\gamma) \end{pmatrix} =$$

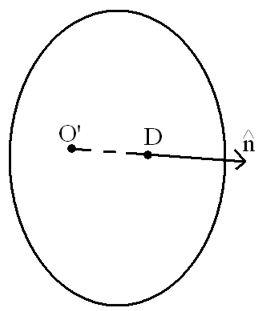
$$= \Theta_{xx} \cdot \cos^2(\alpha) + \Theta_{yy} \cdot \cos^2(\beta) + \Theta_{zz} \cdot \cos^2(\gamma) + 2 \cdot \Theta_{xy} \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + 2 \cdot \Theta_{xz} \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) +$$
$$+ 2 \cdot \Theta_{yz} \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma)$$

A Steiner-tétel szokásos alakja pedig:

$$\Theta_n^{O'} \stackrel{?}{=} \Theta_n^{tkp} + \left(\sum m \right) \cdot s^2 = \sum_{i,j} n_i \cdot \Theta_{ij}^{O'} \cdot n_j = n_i \cdot \left[\Theta_{ij}^{tkp} + \left(\sum m \right) \cdot \left((\vec{r}_{tkp}{}')^2 \cdot \delta_{ij} - x_{tkp\,i}{}' \cdot x_{tkp\,j}{}' \right) \right] \cdot n_j =$$
$$= \Theta_n^{tkp} + \left(\sum m \right) \cdot \underbrace{\left[(\vec{r}_{tkp}{}')^2 - (\vec{r}_{tkp}{}' \cdot \hat{n})^2 \right]}_{s^2}$$

O'-höz tartozó **tehetetlenségi ellipszoid**:
$\vec{x} \cdot \Theta^{O'} \cdot \vec{x} = 1$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \Theta_1 \cdot x^2 + \Theta_2 \cdot y^2 + \Theta_3 \cdot z^2 = 1$$



K' főtehetetlenségi rendszerben: $\Theta \sim \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$

$$(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix}\Theta_1 & 0 & 0\\ 0 & \Theta_2 & 0\\ 0 & 0 & \Theta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=1$$

$$\vec{x}_D\cdot\Theta^{O'}\cdot\vec{x}_D=1\,;\ \ \vec{x}_D=d\cdot\hat{n}\ \Rightarrow\ d^2\cdot\underbrace{\hat{n}\cdot\Theta^{O'}\cdot\hat{n}}_{\Theta_n}=1\ \Rightarrow\ \boxed{d=\frac{1}{\sqrt{\Theta_n}}}$$

11.6. Egy pontjában rögzített merev test (pörgettyű) mozgásegyenletei

Helyezzük K és K' origóját egyaránt a rögzített pontba, és írjuk fel az O-ra vonatkozó impulzusnyomatékot (perdületet) és az impulzusnyomaték-tételt!

$$f=3$$

$$K,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$$

$$K',\ \vec{e}_1',\ \vec{e}_2',\ \vec{e}_3'$$

$$\dot{\vec{e}}_i'=\vec{\omega}\times\vec{e}_i'$$

$$\vec{L}_O=\vec{J}=\Theta\cdot\vec{\omega}$$

$$\dot{\vec{L}}_O=\vec{M}_O^{\text{külső szbad+kényszer}}=\vec{M}_O^{\text{külső szabad}}$$

A kényszererők forgatónyomatéka nulla, mivel a kényszererők a rögzítési pontban hatnak, így forgatónyomatékuk a rögzítési pontra vonatkozóan nulla.
A kényszererők az O-ban támadnak $\left(\vec{M}_O^{\text{kényszer}}=0\right)$

$$\boxed{\dot{\vec{J}}^{(K)}=\vec{M}_O^{\text{szabad}}}$$

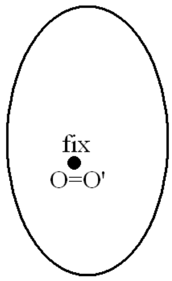
Térjünk át az együttforgó K' rendszerre: $\dot{\vec{J}}^{(K)}=\boxed{\dot{\vec{J}}^{(K')}+\vec{\omega}\times\vec{J}=\vec{M}_O^{\text{külső szabad}}}$

K' legyen főtehetetlenségi rendszer: $\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3$

$J_1=\Theta_1\cdot\omega_1;\ \ J_2=\Theta_2\cdot\omega_2;\ \ J_3=\Theta_3\cdot\omega_3$ (a vesszőket elhagyjuk)

$$\dot{J}_1=\Theta_1\cdot\dot{\omega}_1;\ \ \dot{J}_2=\Theta_2\cdot\dot{\omega}_2;\ \ \dot{J}_3=\Theta_3\cdot\dot{\omega}_3$$

$$(\vec{\omega}\times\vec{J})_1=\omega_2\cdot J_3-\omega_3\cdot J_2=\omega_2\cdot\Theta_3\cdot\omega_3-\omega_3\cdot\Theta_2\cdot\omega_2=(\Theta_3-\Theta_2)\cdot\omega_2\cdot\omega_3$$



A pörgettyűk Euler-egyenlete:

$$\boxed{\begin{aligned}\Theta_1\cdot\dot{\omega}_1+(\Theta_3-\Theta_2)\cdot\omega_2\cdot\omega_3&=M_1\\ \Theta_2\cdot\dot{\omega}_2+(\Theta_1-\Theta_3)\cdot\omega_3\cdot\omega_1&=M_2\\ \Theta_3\cdot\dot{\omega}_3+(\Theta_2-\Theta_1)\cdot\omega_1\cdot\omega_2&=M_3\end{aligned}}$$

Az ω_1, ω_2, ω_3 szögsebesség komponensek kifejezhetők az Euler-szögekkel (általános koordináták), valamint azok időderiváltjaival (általános sebességek).
Az Euler-egyenletek megoldása segítségével az Euler-szögek időfüggésére tudunk felírni 3 elsőrendű differenciálegyenletet.
A következőkben a pörgettyűk legegyszerűbb esetét tárgyaljuk.

11.7. Erőmentes szimmetrikus pörgettyű

Animáció: a http://www.youtube.com/watch?v=WUkUL3Hp67A&feature=related oldalon.
Nincsenek külső szabaderők, a (külső) kényszererők $O=O'$-ben támadnak $\Rightarrow$ $\vec{M}_O^{kényszer}=0$

$$\dot{\vec{J}}^{(K)}=\vec{M}=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{J}=állandó$$

K-ban: $\vec{e}_3 \| \vec{J}$ (A harmadik tengelyt irányítsuk $\vec{J}$-vel párhuzamosan!)

Térjünk vissza a K' rendszerre:
$\Theta_1 \cdot \dot{\omega}_1 = -(\Theta_3-\Theta_2)\cdot\omega_2\cdot\omega_3$ (a megfelelő Θ-kal átosztunk)

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\omega}_1&=\frac{\Theta_2-\Theta_3}{\Theta_1}\cdot\omega_2\cdot\omega_3\\ \dot{\omega}_2&=\frac{\Theta_3-\Theta_1}{\Theta_2}\cdot\omega_1\cdot\omega_3\\ \dot{\omega}_3&=\frac{\Theta_1-\Theta_2}{\Theta_3}\cdot\omega_2\cdot\omega_1\end{aligned}}$$

Animáció: a http://www.youtube.com/watch?v=WUkUL3Hp67A&feature=related oldalon.
Szimmetrikus: van egy szimmetriatengelye (forgatásra): főtengely $(\vec{e}\,'_3)$
$\vec{e}\,'_3$ sajátvektora a tehetetlenségi tenzornak, a hozzátartozó sajátértéke a Θ_3

$$\Theta \sim \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & 0 \\ \Theta_{12} & \Theta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\Theta_1=\Theta_2}_{\substack{\text{szimmetrikus}\\ \text{pörgettyű}}}\ (\neq\Theta_3)$$

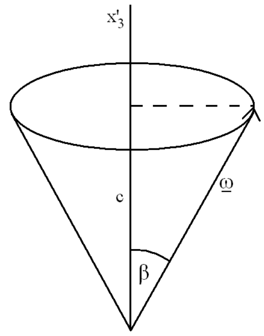
(Még speciálisabb esetek:
a) $\Theta_1=\Theta_2=\Theta_3$: gömbi pörgettyű,
b) lineáris test: a test tömege az $\vec{e}_3\,'$ mentén helyezkedik el, $\Theta_3=0$ (rúd))

Mivel $\Theta_1=\Theta_2$, ezért $\dot{\omega}_3=0$: az $\vec{\omega}$ vetülete a szimmetriatengelyre állandó: $\omega_3=c$

Jelölés: $\Omega\equiv\frac{\Theta_3-\Theta_2}{\Theta_2}\cdot\omega_3=állandó$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= -\Omega\cdot\omega_2\\ \dot{\omega}_2 &= \Omega\cdot\omega_1\end{aligned}}$$

$\ddot{\omega} = -\Omega\cdot\dot{\omega}_2 = -\Omega^2\cdot\omega_1$; Megoldás: $\omega_1 = a\cdot\cos(\Omega\cdot t)$



$$\omega_2 = \frac{\dot{\omega}_1}{-\Omega} = -\frac{a}{\Omega}\cdot\left(-\sin(\Omega\cdot t)\right)\cdot\Omega = a\cdot\sin(\Omega\cdot t)$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = a^2 + c^2 = \textit{állandó}$$

$$\boxed{|\vec{\omega}| = \sqrt{a^2 + c^2} = \textit{állandó}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\vec{\omega} = a\cdot\cos(\Omega\cdot t)\cdot\vec{e}_1\,' + a\cdot\sin(\Omega\cdot t)\cdot\vec{e}_2\,' + c\cdot\vec{e}_3\,'$$

1. Állítás:

$\vec{\omega}$ és $x_3\,'$ szöge állandó: $\vec{\omega}$ egy β félnyílásszögű kúpon forog a szimmetriatengely körül.

A forgás szögsebessége: $\Omega = \dfrac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_2}\cdot\omega_3$

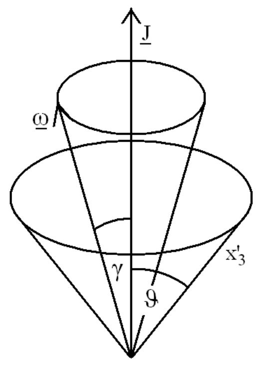
$$J_{1'} = \Theta_{1'}\cdot\omega_{1'} = \Theta_1\cdot a\cdot\cos(\Omega\cdot t)$$

$$J_{2'} = \Theta_2\cdot a\cdot\sin(\Omega\cdot t) = \Theta_1\cdot a\cdot\sin(\Omega\cdot t)$$

$$J_{3'} = \Theta_3\cdot c$$

$$\vec{J} = J_{1'}\cdot\vec{e}_1\,' + J_{2'}\cdot\vec{e}_2\,' + J_{3'}\cdot\vec{e}_3\,' = \Theta_1\cdot a\cdot\cos(\Omega\cdot t)\cdot\vec{e}_1\,' + \Theta_1\cdot a\cdot\sin(\Omega\cdot t)\cdot\vec{e}_2\,' + \Theta_3\cdot c\cdot\vec{e}_3\,'$$

$$\boxed{\vec{J} = \Theta_1\cdot\vec{\omega} + (\Theta_3 - \Theta_1)\cdot c\cdot\vec{e}_3\,'} \qquad |\vec{J}| = \sqrt{\Theta_1^2\cdot a^2 + \Theta_3^2\cdot c^2} = \textit{állandó}$$



2. Állítás:

$\vec{J}$, $\vec{\omega}$ és $\vec{e}_3\,'$ egy síkban van minden időpillanatban.

$$\sphericalangle(\vec{J},\ \vec{e}_3\,') = \vartheta$$

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{J}\cdot\vec{e}_3\,'}{|\vec{J}|\cdot|\vec{e}_3\,'|} = \frac{J_3\,'}{|\vec{J}|} = \textit{állandó} \quad \rightarrow \quad \text{nutációs kúp}$$

3. Állítás:

A szimmetriatengely a $\vec{J}$ körül $\omega_{pr} = \dfrac{|\vec{J}|}{\Theta_1}$ szögsebességgel egyenletes precessziót végez (a nutációs kúpon).

Bizonyítás:

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_{pr}+\vec{\omega}_l$$

A szimmetriatengely mekkora szögsebességgel forog a $\vec{J}$ körül?

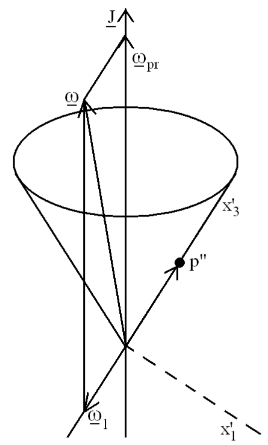
$$\vec{v}_{p''}=\vec{\omega}\times\vec{r}_{p''}=\vec{\omega}_{pr}\times\vec{r}_{p''}$$

A precesszió szögsebessége $\vec{\omega}_{pr}$

$$\omega_1{}'\overset{def.}{=}\vec{\omega}\cdot\vec{e}_1{}'=\vec{\omega}_{pr}\cdot\vec{e}_1{}'=\omega_{pr}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)$$

$$J_1{}'=\Theta_1\cdot\omega_1{}' \quad\Rightarrow\quad \omega_1{}'=\frac{J_1{}'}{\Theta_1}$$

$$\omega_{pr}=\frac{J_1{}'}{\Theta_1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)}=\frac{|\vec{J}|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)}{\Theta_1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\vartheta\right)}=\frac{|\vec{J}|}{\Theta_1}=\acute{a}lland\acute{o}$$



4. Állítás:

$$\sphericalangle(\vec{J}\,,\,\vec{\omega})=\gamma$$

$$T_{rot}=\frac{1}{2}\cdot\vec{\omega}\cdot\underbrace{\Theta\cdot\vec{\omega}}_{\vec{J}}$$

$$\vec{J}\cdot\vec{\omega}=\Theta_1\cdot\omega^2+(\Theta_3-\Theta_1)\cdot c^2=\acute{a}lland\acute{o}=2\cdot T_{rot}$$

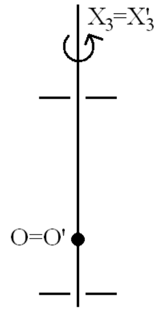
$$\cos\gamma=\frac{\vec{J}\cdot\vec{\omega}}{|\vec{J}|\cdot|\vec{\omega}|}=\frac{2\cdot T_{rot}}{|\vec{J}|\cdot|\vec{\omega}|}=\acute{a}lland\acute{o}$$

5. Állítás: a test a szimmetriatengely körül $\vec{\omega}_l$ szögsebességgel forog.

Animáció: a http://www.youtube.com/watch?v=WUkUL3Hp67A&feature=related oldalon.

11.8. Forgás rögzített tengely körül

Rögzített tengely: van egy fix helyzetű egyenes (ez az egyenes legyen egyenlő $\vec{e}_3=\vec{e}_3{}'$-vel és az $O=O'$ pont legyen rajta). $f=1:\varphi$ az elfordulás szöge az általános koordináta.



$$\dot{\vec{L}}=\vec{M}^{k\ddot{u}ls\H{o}\ (szabad+k\acute{e}nyszer)}$$

$$\vec{\omega}=\omega_3\cdot\vec{e}_3=\omega_3{}'\cdot\vec{e}_3{}' \qquad\qquad \omega_3{}'=\omega_3=\dot{\varphi}$$

A kényszererők a tengely mentén támadnak, ezért forgatónyomatékuk merőleges a tengelyre, vagyis a harmadik komponensük nulla: $M_3^{k\ddot{u}ls\H{o}\ k\acute{e}nyszer}=0$

$$\frac{d}{dt}\left(\Theta\cdot\vec{\omega}\right)_3=M_3^{k\ddot{u}ls\H{o}\ szabad}$$

$$\left(\Theta\cdot\vec{\omega}\right)_3=\underbrace{\Theta_{31}\cdot\overbrace{\omega_1}^{=0}}_{=0}+\underbrace{\Theta_{32}\cdot\overbrace{\omega_2}^{=0}}_{=0}+\Theta_{33}\cdot\omega_3$$

$$\boxed{\Theta_{33}\cdot\dot{\omega}_3=M_3^{szabad}}$$

11.9. Szabadtengelyek

Tétel:
Bármely merev testnek legalább 3 szabadtengelye van, mégpedig a tömegközépponton átmenő főtehetetlenségi tengelyek.

Szabadtengely:
Olyan forgástengely, amely körül a magára hagyott merev test egyenletes forgást végezhet.

Keressük meg annak a feltételét, hogy ne kelljen kényszererőt alkalmazni a forgástengely megtartásához (a forgástengely magától is a helyén maradjon)!
Rögzített tengelynél: $\Theta_{33}\cdot\dot{\omega}_3=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\omega_3=\acute{a}lland\acute{o}}$

$$\vec{J}=\Theta\cdot\vec{\omega}; \quad \omega=\omega_3\cdot\vec{e}_3=\omega_3{}'\cdot\vec{e}_3{}' \quad\Rightarrow\quad \omega_1=\omega_2=0$$

$$J_1=\underbrace{\Theta_{11}\cdot\omega_1}_{=0}+\underbrace{\Theta_{12}\cdot\omega_2}_{=0}+\Theta_{13}\cdot\omega_3=\Theta_{13}\cdot\omega_3$$

$$J_2=\Theta_{23}\cdot\omega_3$$

$$\dot{\vec{J}}^{(K')}+\vec{\omega}\times\vec{J}=\vec{M}^{\,k\acute{e}nyszer}$$

$$\dot{J}_1{}'=\Theta_{13}{}'\cdot\underbrace{\dot{\omega}_3{}'}_{=0}=0$$

$$\dot{\vec{J}}^{(K')}=0$$

Első komponens:
$$(\vec{\omega}\times\vec{J})_1=\underbrace{\omega_2}_{=0}\cdot J_3-\omega_3\cdot J_2=M_1^{k\acute{e}nyszer}$$

$$\boxed{-\omega_3\cdot\Theta_{23}\cdot\omega_3=M_1^{k\acute{e}nyszer}}$$

Második komponens:
$$(\vec{\omega}\times\vec{J})_2=\omega_3\cdot J_1-\underbrace{\omega_1}_{=0}\cdot J_3=M_2^{k\acute{e}nyszer}$$

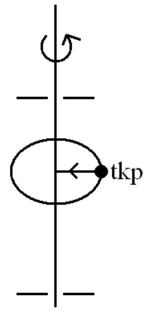
$$\boxed{\Theta_{13}\cdot\omega_3^2=M_2^{k\acute{e}nyszer}}$$

Annak a feltétele, hogy ne kelljen kényszererőt alkalmazni az, hogy a 3-as tengelyre vonatkozó deviációs nyomatékok eltűnjenek:

$$\boxed{\begin{array}{l}\Theta_{23} := 0 \\ \Theta_{13} := 0\end{array}}$$

Annak szükséges feltétele tehát, hogy a 3-as tengely szabadtengely legyen:

$$\Theta \sim \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & 0 \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{33} \end{pmatrix},$$ azaz a 3-as tengelynek főtengelynek kell lennie.



Tömegközéppontont-tétel:

$$\left(\sum m\right) \cdot \ddot{\vec{r}}_{tkp} = \sum \vec{F}^{külső\ szabad + kényszer}$$

Ha a tömegközéppont nincs a forgástengelyen, akkor körpályán mozog, ezért gyorsul, vagyis, hogy ne kelljen erőt alkalmazni, szükséges feltétel, hogy $\vec{r}_{tkp}$ a tengelyen legyen.

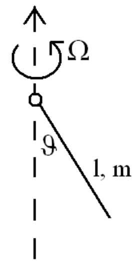
A 3-as tengely tehát szabadtengely, ha átmegy a tömegközépponton és a főtehetetlenségi tengely irányába mutat.

11.10. A gömböc, a pontosan két egyensúlyi helyzettel rendelkező merev test

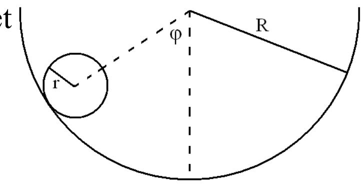
V.I. Arnold sejtése szerint létezik olyan homogén (tehát egy anyagból készült test), amely kizárólag egy stabil és egy instabil helyzettel rendelkezik. Az ismert gyerekjáték, a keljfeljancsi például valóban mindig ugyanabba a helyzetbe tér vissza, azaz egy stabil pontja van, de nem homogén, hisz a visszagurulást a benne lévő nehezék, például ólom biztosítja.
A Gömböc lényegének megértéséhez tisztázni kell az egyensúlyi helyzetek jelentőségét is. Egy kockának például hat stabil egyensúlyi helyzete van – a hat lapja. Ha ezekre fektetve tesszük le, biztos ott marad. Instabil egyensúlyi helyzet alakul ki az élek mentén: ezeken egy ideig megáll a kockánk, de előbb-utóbb eldől, és valamelyik stabil pontjában (lapján) állapodik meg.
Arnold professzor sejtette, hogy van olyan test, amelynek egy stabil és egy instabil pontja van, Domokos Gábor, pedig gondolkodott rajta, és közben keresett ilyen formákat a természetben is. Egy rhodoszi nyaralás alatt például kétezer kavicsot válogatott át feleségével („ez már majdnem válóok" – jegyzi meg viccesen Domokos), de a feltételnek megfelelőt egyet sem találtak.
Gömböc megalkotásához végül Várkonyi Péter adta az ötletet. Minden testnek van lapossága és hosszúsága, e tulajdonságok számszerűsíthetők. A minimális érték természetesen egy mindkét jellemző esetében. A kutatók bebizonyították, hogy a csupán egy stabil és egy instabil ponttal rendelkező test leginkább a gömbhöz hasonlít, tehát lapossága és hosszúsága is minimum, azaz 1-1 értéket kap. Az új forma innen kapta a Gömböc nevet. Gömböc egyébként két egymásra merőleges szimmetriasíkkal rendelkezik.

A gömböcre vonatkozó részleteket megtalálja a http://www.geographic.hu/index.php?act=napi&rov=2&id=8798 honlapon.
A gömböc mozgását a http://www.gomboc.eu/site.php honlapon tekintheti meg.

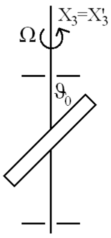
11.11. Feladatok



11.11.1. Az m tömegű, l hosszúságú homogén rúd vízszintes tengelyű csuklóval kapcsolódik az Ω szögsebességgel forgó függőleges tengelyhez.
a) Írja fel a Lagrange-függvényt!
b) Írja fel a mozgásegyenleteket!
c) Határozza meg a ϑ_0 egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések frekvenciájának függését az Ω-tól ($\vartheta-\vartheta_0=a\cdot\cos(\omega\cdot t)$!)



11.11.2. Az r sugarú homogén henger egy R sugarú hengerfelület belsején gördül.
a) Adjuk meg a mozgási energiát!
b) Írjuk fel a Lagrange-függvényt!
c) Határozzuk meg az egyensúlyi helyzet körüli kis rezgések periódusidejét!



11.11.3. Az m tömegű l hosszúságú rúd függőleges tengelyhez van rögzítve fix ϑ_0 szög alatt. Mekkora forgatónyomatékkal kell tartani a függőleges tengelyt, ha a forgás szögsebessége Ω?

11.11.4. Egy a és b oldalú sík téglalapot az átlója, mint tengely körül állandó szögsebességgel forgatunk. Milyen irányú és mekkora forgatónyomatékkal tudjuk a forgástengelyt fixen tartani?

11.11.5. A Föld forgási ellipszoidnak tekinthető, amelynek féltengelyei kb. $a=6370\ km$, ill. $b=6330\ km$. Az erőmentes szimmetrikus pörgettyűre vonatkozó eredmények alapján milyen becslés adható a precesszió periódusidejére? (Mennyi idő alatt fordul körbe a Föld forgástengelye a Föld polártengelye körül?)

11.11.6. Határozzuk meg a H_2, HD és D_2 molekulák tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékainak arányát, feltéve, hogy a kötéstávolság mindhárom esetben azonos!

11.11.7. Mutassuk meg egyszerű megfontolások segítségével, hogy egy szabályos tetraédernek a tömegközéppontjára vonatkozó fő tehetetlenségi nyomatékai egyenlőek!

11.11.8. Egy merev test egy rajta átmenő tengely körül forog. A tengely tartása közben mit érzékelünk a következő esetekben:
a) a tengely nem megy át a test tömegközéppontján, de párhuzamos az egyik fő tehetetlenségi tengellyel;
b) a tengely átmegy a tömegközépponton, de nem esik egybe egyik fő tehetetlenségi tengellyel sem;
c) a tengely átmegy a tömegközépponton és egybeesik valamelyik fő tehetetlenségi tengellyel?

11.11.9. Határozzuk meg az m tömegű, R sugarú, h magasságú kúp tehetetlenségi nyomatékát egyik alkotójára vonatkoztatva!

11.11.10. Egy merev, l hosszúságú és elhanyagolható tömegű rúd végeire M_1 és M_2 tömeget helyeznek.(M_1 és M_2 méretei l-hez képest elhanyagolhatóak.) A rudat reá merőleges tengely körül forgásba hozzák. A rúd mely pontján kell a tengelynek keresztülhaladnia ahhoz, hogy a rúd ω szögsebességgel való megforgatásához szükséges munka minimális legyen?

11.11.11. m tömegű, homogén rudat az egyik végétől x távolságra levő, a rúdra merőleges tengely körül ω szögsebességgel forgatunk. Mekkora x esetén lesz a kinetikus energia minimális?

11.11.12. Elhanyagolható méretű rúd két végére m tömegű testeket erősítünk. Az így kapott súlyzót a súlypontján átmenő, a rúddal α szöget bezáró tengely körül ω szögsebességgel forgatjuk. Számítsa ki
a) a súlyzó impulzusmomentumát;
b) a súlyzóra ható forgatónyomatékot;
c) a centrifugális erő forgatónyomatékát!

11.11.13. Határozza meg az m tömegű, l hosszúságú rúd forgási energiáját, ha
a) a középpontján átmenő, a rúddal α szöget bezáró tengely körül forgatjuk;
b) az előzővel párhuzamos olyan tengely körül forgatjuk, amely a súlyponttól d távolságra metszi a rudat!

11.11.14. m tömegű, R sugarú, elhanyagolható vastagságú homogén körlapot súlypontján átmenő tengelyre rögzítünk úgy, hogy a körlap síkja α szöget zárjon be a tengellyel. Határozzuk meg a körlap kinetikus energiáját, ha ω szögsebességgel forgatjuk a tengelyt!

11.11.15. Egy létra tetejére egy M tömegű, két szárának másik végpontjaihoz egy-egy m tömegű testet erősítünk. (A létra szára elhanyagolható tömegű.) Mekkora sebességgel ér földet az M tömegű test?