

Tartalom I

- 1 Tájékoztató
- 2 Ajánlott irodalom
- 3 A méréselmélet szerepe
 - Az SI egységrendszer
- 4 Bevezetés
- 5 A mérőberendezés felépítése
- 6 A műszerek legfontosabb jellemzői
- 7 Mérési hibák
- 8 A mérési eredmény megadása
- 9 A mérési eredmény megadása

- A méréselmélet, mérés technika általános problémái
- A mérőeszközök felépítése, tulajdonságaik
- Determinisztikus és véletlenszerű hibák
- A mérési eredmény megadása
- A hiba terjedése
- Lineáris regresszió
- Mintavételezéses mérés, mintavételi tétel
- A/D, D/A konverzió, digitális műszerek
- Szenzorok
- LabVIEW

- **Kocsondi András:** „*Tudományelmélet*”, Szeged, 1990, JATE Kiadó
- **Kemény Sándor, Deák András:** „*Mérések tervezése és eredményeik értékelése*”, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1990
- **Schnell szerk.:** „*Jelek és rendszerek mérés technikája*”, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- **Hesselmann, N.:** „*Digitális jelfeldolgozás*”, Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1985.
- **Prékopa András:** „*Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal*”, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.
- **Rényi Alfréd:** „*Valószínűség számítás*”, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

A mérés szerepe a természettudományban

- A tudományos megismerés célja
 - a valóságra vonatkozó új ismeretek szerzése
 - összefüggések keresése
 - ismeretek alkalmazása
- Kutatás: tudományos problémák megoldásának a folyamata
Probléma → hipotézis → elmélet
 - probléma ← új tudás iránti szükséglet (új empirikus tények)
 - hipotézis ← korábbi ismeretek / empirikus tudás
- Hipotézisek + elméletek: elméleti rendszerek egymással versenyeznek
döntés:
 - elméleti ismeretek (ellentmondások, egyszerűség ...)
 - empirikus ismeretek (← mérések)
 - divat

Empirikus megismerés

- Empirikus megismerés:
 - megfigyelés (nem avatkozik be)
 - kísérlet (mesterséges, beavatkozik)
- Részei:
 - Mérés
 - Leírás (rögzítés, rendszerezés)
 - Modellkísérletek
 - fenomenologikus elméletek, empirikus törvények
- Mérés:
 - konkrét paraméterek megállapítása
 - elméletek ellenőrzése, elméletek közötti döntés

A mérés befolyásolja a mért értéket.

A mérés pontossága korlátozott.

Méréselmélet (metrológia)

- Mikor és hogy végezhető el egy mérés
- Mikor lesz megbízható egy mérés
- A mérés pontosságának becslése
- A mérési adatok feldolgozása, kiértékelése
- Mérési módszerek megadása, fejlesztése
 - Technikai problémák kezelése
 - Zajok kezelése
 - Optimalizálás (pl. pontosság / költség)
 - Helyes-e a modell / alkalmazott törvény (Pl. Newton törvények)
 - Van-e pontos érték (vagy csak valószínűségi változó, pl. kockadobás)
 - Ok-okozati kérdések

A mérés definíciója:

- A mért jellemzők leképezése egy szimbólumhalmazra
- Egy (fizikai / kémiai) mennyiség nagyságának jellemzése a választott mértékegységben kifejezett számmértékkel
mennyiség = számmérték · mértékegység
- Egy ismeretlen mennyiséget egy ismert, állandónak gondolt mennyiséggel hasonlítjuk össze.
Ez az állandó (**etalon**) rendelkezésre kell álljon.

Egységrendszerek

- i. e. 4 évezred: Egyiptom, Mezopotámia: hossz, tömeg, idő
- Görögök: tudományos alapok
- Tradicionális egységek: emberi test a mérték (pl. hossz)
- Metrikus rendszer: Francia forradalom (1791.)
- SI: 1960 (az MKS rendszeren alapul)

SI alapegységek

- **Tömeg:** A kilogramm a Franciaországban őrzött 90% platina, 10% irídium ötvözet tömegével definiált egység.
Az etalon másolata több országban is megtalálható.
Ha az etalon tömege bármilyen okból megváltozik, akkor a világon minden test tömege számszerűen megváltozik.
- **Idő:** A másodperc definíciója szerint az az idő, ami a cézium atom pontosan definiált körülmények közötti oszcillációs periódusidejének 9192631770 szerese.
- **Hosszúság:** A méter definíció szerint az hosszúság, melyet a fény vákuumban $1/299792458$ másodperc alatt tesz meg.

SI alapegységek

- **Áram:** Az amper az az állandó áram, mely ha két egyenes, vákuumban levő, végtelen hosszú, egymástól párhuzamosan 1 méterre levő elhanyagolható körkeresztmetszetű vezetőkön át folyik, akkor a fellépő erő méterenként $2 \cdot 10^{-7}$ N.
- **Hőmérséklet:** A kelvin úgy definiált, hogy a víz hármaspontjánál a hőmérséklet értéke 273,16 K. A hármaspontnál a víz három különböző halmazállapota egyensúlyban jelenik meg.
- **Fényintenzitás:** Egy candela fényintenzitás esetén az $540 \cdot 10^{12}$ Hz frekvenciájú monokromatikus fény egy adott irányban egységnyi szteradián térszögbe sugárzott teljesítménye 1/683 W.
- **Anyagmennyiség:** Egy mól anyag definíció szerint annyi azonos elemi részt tartalmaz, mint ahány atom található 0,012 kg szén-12-es izotópban.

SI kiegészítő egységek

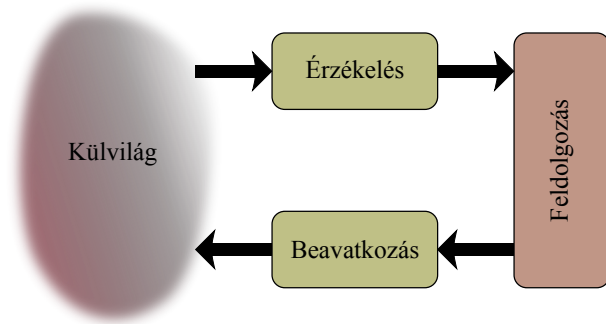
- **Síkszög:** A radián a kör két sugara által bezárt szög, melyek a körből éppen egy sugárnyi ívet jelölnek ki.
- **Térszög:** A szteradian annak a kúpnak a térszöge, melynek a csúcsát a gömb középpontjába helyezve a gömb felületéből éppen a sugár négyzetével egyenlő területet jelöl ki a gömb felszínén.

SI prefixumok

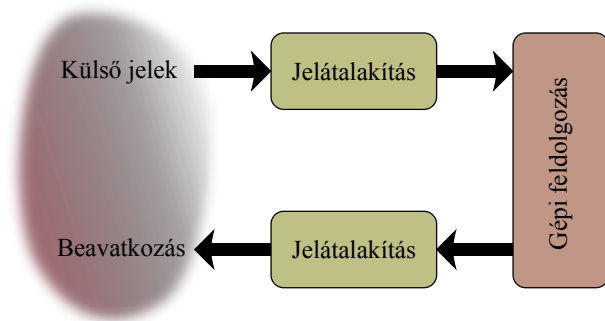
Jele	Szorzó	Név
Y	10^{24}	yotta
Z	10^{21}	zetta
E	10^{18}	exa
P	10^{15}	peta
T	10^{12}	tera
G	10^9	giga
M	10^6	mega
k	10^3	kilo
h	10^2	hekto
da/dk	10^1	deka

Jele	Szorzó	Név
d	10^{-1}	deci
c	10^{-2}	centi
m	10^{-3}	milli
μ	10^{-6}	mikro
n	10^{-9}	nano
p	10^{-12}	piko
f	10^{-15}	femto
a	10^{-18}	atto
z	10^{-21}	zepto
y	10^{-24}	yocto

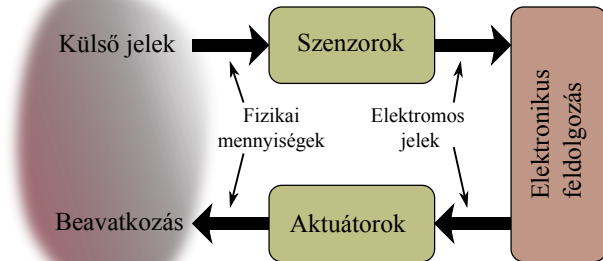
Az ember kapcsolata a külvilággal



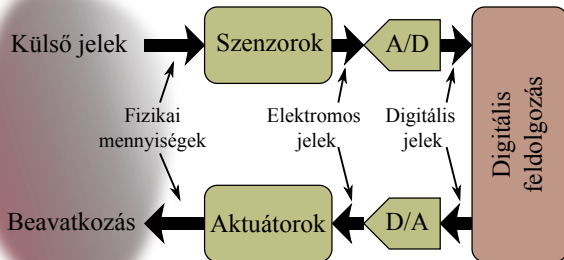
- létfenntartás, komfort
- megismerés (tudomány, oktatás)
- gazdaságosság ...



- A bemenő jeleket át kell alakítani, hogy kezelhetők legyenek
- Vissza kell alakítani őket, hogy hassanak a külvilágra
- Hatékony feldolgozás \Rightarrow hatékony gép

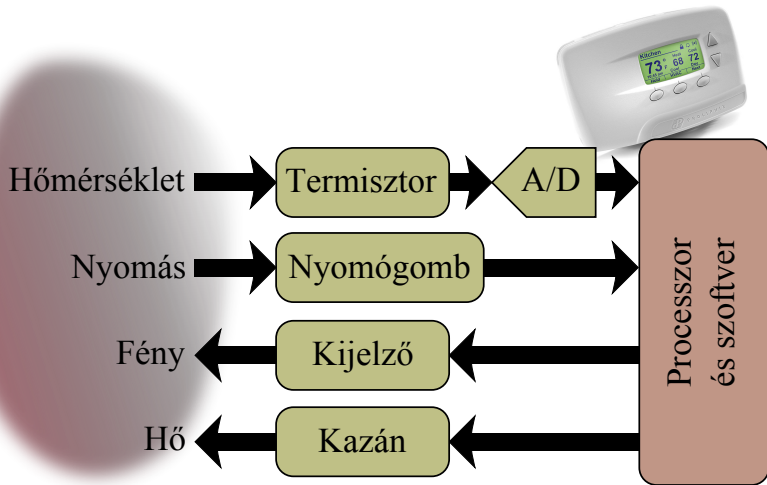


- Feldolgozás: elektromos jelek segítségével
- A fizikai jeleket könnyű elektromos jelekké alakítani
- Tetszőleges matematikai művelet megvalósítható

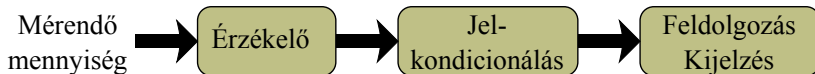


- Fizikai mennyiségek \Leftrightarrow számok
- Rugalmas, hatékony feldolgozás
- Az eszköz működését a szoftver határozza meg (könnyen cserélhető)

Példa: digitális termosztát



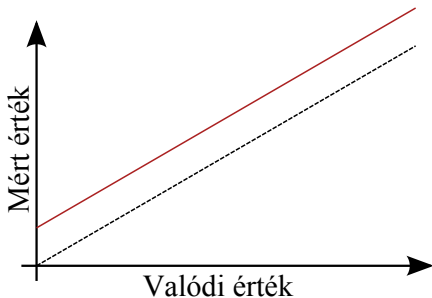
A mérőberendezés felépítése



- **Érzékelő:** fizikai mennyiség → másfajta fizikai mennyiség, amelyet a műszer többi része fel tud dolgozni
Pl. hőmérséklet → elmozdulás; hőmérséklet → feszültség.
- **Jelkondicionálás:** pl. erősítés, zajszűrés, további átalakítások
- **Feldolgozás:** egyszerű számolások, bonyolult számolások, adattárolás...
- **Kijelzés:** pl. mutató, digitális kijelző, számítógépek (grafikonok...)

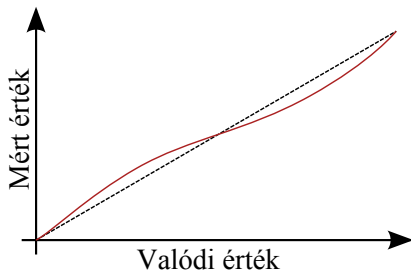
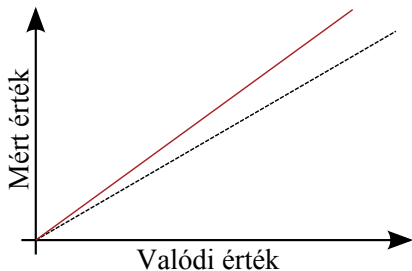
A műszerek legfontosabb jellemzői

- **Pontosság:** az a maximális érték, amivel a kijelzett érték eltérhet a valódi értéktől. (Pl. 1 mm, 1%)
- **Felbontás:** az a legkisebb változás a mérendő mennyiségben, melyet a műszer még követni képes. (Pl. 1 K)
- **Nullponthiba** az a hiba, mely a mért értéktől függetlenül mindig ugyanakkora. Azonos azzal az értékkel, amit a műszer mutat 0 valódi értéknél.



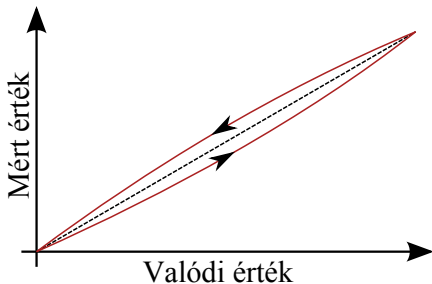
A műszerek legfontosabb jellemzői

- **Skálahiba:** a valós és a mért érték hányadosa nem 1.
A hiba arányos a mért értékkel.
- **Linearitáshiba:** a mért érték nem lineáris függvénye a valós értéknek.



A műszerek legfontosabb jellemzői

- **Hiszterézis.** A hiba függ attól, hogy a mért érték nő vagy csökken. Oka pl. a súrlódás

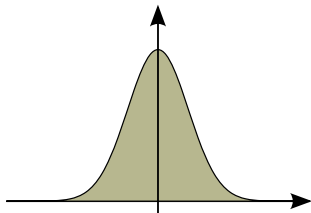


- **Reprodukálhatóság.** A műszer hibái időben változhatnak.
- **Reagálási idő**
- **Sávszélesség**

- A méréseket mindig hiba terheli \Rightarrow a mért érték eltér a valódi értéktől
- **Determinisztikus hibák**
 - pl. nullponthiba, skálahiba; hőmérséklet hatása a mérésre ...
 - előre meghatározott \Rightarrow kompenzálható
(kompenzálni kell)
- **Véletlenszerű hiba**
 - minden egyes mérésnél más és más értékű
 - nem megjósolható \Rightarrow nem kompenzálható
 - okai: a rendszerben fellépő véletlen jelenségek
 - kezelés: statisztikai módszerek

Véletlen hibák kezelése

- Véletlen hiba \Rightarrow minden egyes mérés más és más értéket ad
- **valószínűségi változó:** olyan mennyiség, amelynek számértéke valamilyen véletlen esemény kimenetelétől függ.
 - **Diszkrét valószínűségi változó**
pl. kockadobás
Megszámlálhatóan sok lehetséges érték, minden egyes értékhez egy valószínűséget lehet hozzárendelni.
 - **Folytonos valószínűségi változó**
pl. emberek magassága
Jellemzője: **sűrűségfüggvény**



Valószínűségi változók jellemzői

- **Várható érték** (A valódi értékkel azonosítjuk.)

$$\langle x \rangle = E(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$$

$$E(x) = \sum_{i=1}^k x_i p_i ; E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- **Szórás** (Mennyire térnek el az egyes eredmények az átlagtól)

$$D^2(x) = E((x - E(x))^2)$$

$$D^2(x) = \sum_{i=1}^k (x - E(x))^2 p_i ; D^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx$$

A várható érték és szórás tulajdonságai

- Minden esetben:

$$E(a \cdot x) = a \cdot E(x)$$

$$E(x_1 + x_2 + \dots) = E(x_1) + E(x_2) + \dots$$

- Ha az egyes értékek függetlenek egymástól:

$$D^2(x_1 + x_2 + \dots) = D^2(x_1) + D^2(x_2) + \dots$$

A mérési eredmény megadása

- A mérés során kapott értékek eltérnek a fizikai mennyiség valódi értékétől
 - Determinisztikus hiba ← korrigálni kell, statisztikai módszerrel nem kezelhető
 - Statisztikus hiba
- A mérési eredmény megadása:

$$\langle x \rangle = \bar{x} \pm \Delta x$$

- Valódi érték: $\langle x \rangle$ (\equiv várható érték)
- Mért adat: \bar{x}
- Hiba nagysága: Δx
Konfidencia-intervallum: a valódi érték ezen intervallumon belül van valamekkora valószínűséggel.

Mérési eredmény megadása, ha σ ismert

- Ha a szórás meg van adva:

$$\langle x \rangle = \bar{x} \pm \lambda \sigma$$

- Általános esetben Csebisev-egyenlőtlenség $\Rightarrow \lambda$

$$P(|\langle x \rangle - \bar{x}| < \lambda \sigma) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

- p annak a valószínűsége, hogy a valódi érték a megadott intervallumban van
- $\alpha = 1 - p$: szignifikanciaszint
- Példa: $p = 0,95$, $\alpha = 0,05$

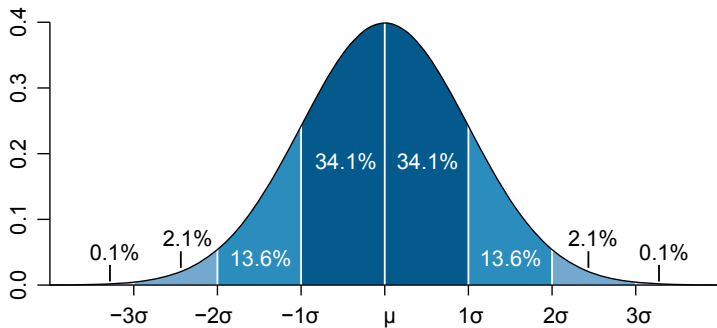
$$p = 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{1-p}} = \sqrt{20} \approx 4,47$$

Normális eloszlás (Gauss-eloszlás)

- A mérési hiba a legtöbb esetben normális eloszlású

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Normális eloszlású hiba

- Normális eloszlás esetén

$$p = P(|\langle x \rangle - \bar{x}| < \lambda \sigma) = P\left(\frac{|\langle x \rangle - \bar{x}|}{\sigma} < \lambda\right) =$$
$$= \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2F(\lambda) - 1$$

ahol F a normális eloszlás eloszlásfüggvénye

- λ értéke:

$$\lambda = F^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

- Pl. $p = 0,95 \Rightarrow \lambda \approx 1,96$

σ ismert, N mérési adat

- Egy mérési adatnál az átlag (középérték) jobb becslése a valódi értéknek

$$\overline{x_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

- A mérési adatok alapján számolt középérték is ingadozik

$$D^2(\overline{x_N}) = D^2\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N D^2(x_i) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N D^2(x) = \frac{1}{N} D^2(x)$$

$$D(\overline{x_N}) = \frac{1}{\sqrt{N}} D(x)$$

- A mérési eredmény megadása:

$$\langle x \rangle = \overline{x_N} \pm \frac{\lambda \sigma}{\sqrt{N}}$$

σ ismeretlen, N mérési adat

- Szükségünk van a szórás becslésére a mérési adatok alapján
⇒ **Korrigált empirikus szórás**

$$\sigma_{N-1}^* = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left(x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

- Ha x normális eloszlású, akkor az

$$\frac{\langle x \rangle - \bar{x}_N}{\sigma_{N-1}^*}$$

mennyiség **t-eloszlású** $\nu = N - 1$ szabadsági fokkal

σ ismeretlen, N mérési adat

- λ helyett t_{N-1} -et használva:

$$\begin{aligned} p &= P\left(\left|\langle x \rangle - \overline{x_N}\right| < t_{N-1} \sigma_{N-1}^*\right) = P\left(\frac{\left|\langle x \rangle - \overline{x_N}\right|}{\sigma_{N-1}^*} < t_{N-1}\right) = \\ &= \int_{-t_{N-1}}^{+t_{N-1}} p_{t,N-1}(x) dx = 2F_{t,N-1}(t_{N-1}) - 1 \end{aligned}$$

ahol $F_{t,N-1}$ az $N-1$ szabadsági fokú t-eloszlás eloszlásfüggvénye

$$t_{N-1} = F_{t,N-1}^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

- A mérési eredmény megadása:

$$\langle x \rangle = \overline{x_N} \pm \frac{t_{N-1} \sigma_{N-1}^*}{\sqrt{N}}$$

λ , t_{N-1} meghatározása

- Statisztikai programcsomag megfelelő függvényével

- Táblázat

- λ

p	0,9	0,95	0,99	0,995	0,999
α	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
λ	1,64521	1,96039	2,57624	2,80739	3,29076

- t_{N-1}

	p	0,9	0,95	0,99	0,995	0,999
N	α	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
2	t_{N-1}	6,31370	12,70615	63,65672	127,32133	636,61920
3	t_{N-1}	2.91996	4.30264	9.92477	14.08897	31.59903
5	t_{N-1}	2.13183	2.77638	4.60409	5.59755	8.61026
10	t_{N-1}	1.83307	2.26215	3.24979	3.68960	4.78089
100	t_{N-1}	1.66036	1.98416	2.62640	2.87130	3.39150

1. példa

Tömegmérés mérési adata:

$$m = 1,21 \text{ kg}$$

A szórás ismert, értéke:

$$\sigma = 0,017 \text{ kg}$$

Adjuk meg az $\alpha = 0,01$ szignifikanciaszinthez tartozó eredményt!

$$\alpha = 0,01 \Rightarrow \lambda = 2,57624$$

$$\Delta m = \lambda \cdot \sigma = 2,57624 \cdot 0,017 \text{ kg} = 0,043796 \text{ kg} \approx 0,044 \text{ kg}$$

A mérés eredménye:

$$m = 1,210 \text{ kg} \pm 0,044 \text{ kg}$$

2. példa

Az előző feladatban megadott feltételek mellett hány mérési adatot kell gyűjtenünk ahhoz, hogy a mérés hibája 0,01 kg alá csökkenjen?

$$\Delta m < 0,01 \text{ kg}$$

$$\frac{\lambda\sigma}{\sqrt{N}} < 0,01 \text{ kg}$$

$$N > \left(\frac{0,043796}{0,01} \right)^2 \approx 19,18$$

$$N \geq 20$$

3. példa

Egy mérést többször elvégezve, egy ellenállás értékére a következőket kapjuk: 7,20 Ω ; 7,190 Ω ; 7,19 Ω ; 7,22 Ω ; 7,23 Ω .

Adjuk meg az $\alpha = 0,05$ szignifikanciaszinthez tartozó eredményt!

$$\overline{R_N} = 7,206 \Omega$$

$$\sigma_{N-1}^* = 0,018166 \Omega$$

$$\alpha = 0,05, N = 5 \Rightarrow t_{N-1} = 2,77638$$

$$\Delta x = \frac{t_{N-1} \sigma_{N-1}^*}{\sqrt{N}} \approx 0,022556$$

$$R = 7,206 \Omega \pm 0,023 \Omega$$