Fizika mérőmódszerek

1. feladat: Egy analitikai mérlegen egy test tömegét mérjük. A mérés eredménye $3,00132\,\mathrm{g}$.

a) Adjuk meg a mérési eredményt 0,01-es szignifikanciaszinttel, ha tudjuk, hogy a mérés szórása $10^{-4}\,\mathrm{g}$!

b) Adjuk meg a mérési eredményt, ha tudjuk, hogy a véletlen hiba Gauss eloszlású (a többi adat megegyezik).

c) Hány mérést kell végezzünk, hogy a középérték hibája 99%-os biztonsággal $10^{-4}\,\mathrm{g}$-nál kisebb legyen?

Megoldás:

$$\overline{m} = 3,00132\,\mathrm{g} \tag{1}$$

$$\sigma = 0,0001\,\mathrm{g} \tag{2}$$

a) Eredmények megadása, ha egy mérési adatunk van, és ismerjük a szórást:

$$m = \overline{m} \pm \Delta m = \overline{m} \pm \lambda \cdot \sigma \tag{3}$$

$$\alpha = 0,01 \tag{4}$$

Felhasználva a Csebisev-egyenlőtlenséget:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{1-p}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{0,01}} = 10 \tag{5}$$

A végeredmény:

$$m = 3,00132\,\mathrm{g} \pm 10^{-3}\,\mathrm{g} \tag{6}$$

Megjegyzés: α a szignifikanciaszint, Δm pedig a konfidenciaintervallum.

b) Ha tudjuk, hogy a véletlen hiba Gauss eloszlású, λ értékét általában táblázatból leshetjük ki (a szignifikanciaszint függvényében). Néhány statisztikai program képes nekünk kiszámolni λ értékét tetszőleges szignifikanciaszint esetén.

A mellékelt táblázatból kiolvasva: $\lambda = 2,57624$.

A végeredmény:

$$m = 3,00132\,\mathrm{g} \pm 2,57 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{g} \tag{7}$$

c) Eredmények megadása, ha N adatunk van, és ismerjük a szórást:

$$m = \overline{m} \pm \Delta m = \overline{m} \pm \frac{\lambda \cdot \sigma}{\sqrt{N}} \tag{8}$$

Most $\Delta m \leq 10^{-4}$ g, hány mérést kell végezzünk?

$$\Delta m = \frac{\lambda \cdot \sigma}{\sqrt{N}} \leq 10^{-4}\,\mathrm{g} \tag{9}$$

Átrendezve

$$N \geq \left(\frac{\lambda \cdot \sigma}{10^4}\right)^2 \tag{10}$$

Ha nem tudjuk, hogy a mérési hiba Gauss eloszlású ($\lambda = 10$): $N \geq 100$.

Ha tudjuk, hogy a mérési hiba Gauss eloszlású ($\lambda = 2,57$), sokkal levesebb mérés is elég: $N \geq 7$

2. feladat: Egy mérés eredményei:
123,783; 121,846; 122,248; 125,139; 122,569; 124,507; 122,907; 123,142; 124,029; 125,520.

a) Határozzuk meg az empirikus szórást!

b) Adjuk meg a mérési eredményt 0,05; 0,01 és 0,001 szignifikanciaszint mellett. (Tételezzük fel, hogy a mérési hiba Gauss eloszlású)

A feladat megoldásánál ne használjuk az Excel beépített átlag és szórás számolási rutinját!

Megoldás:

A számolások a mellékelt (3-2-01.xls) fájlban találhatók meg.

$$\overline{m} = 123,569 \tag{1}$$

$$\sigma^*_{N-1} = 1,2357 \tag{2}$$

A mérési eredmények megadása N adat esetén, ha ismeretlen a szórás (feltételezve, hogy a véletlen hiba Gauss eloszlású):

$$m = \overline{m} \pm \Delta m = \overline{m} \pm \frac{t_{N-1} \cdot \sigma^*_{N-1}}{\sqrt{N}} \tag{3}$$

ahol t_{N-1} értékét táblázatból kereshetjük ki (α függvényében), σ^*_{N-1} pedig az empirikus szórás.

Ha $\alpha = 0,05$:

$$m = 123,57 \pm 0,88 \tag{4}$$

Ha $\alpha = 0,01$:

$$m = 123,57 \pm 1,27 \tag{5}$$

Ha $\alpha = 0,001$:

$$m = 123,57 \pm 1,87 \tag{6}$$

Azt láthatjuk, hogy minél kisebb szignifikanciaszintet követelünk meg, annál nagyobb konfidenciaintervallumot kell megadjunk.

3. feladat: A következő mérési eredményt 0,01 szignifikanciaszint mellett adták meg: $m = 3{,}21\,\mathrm{kg} \pm 0{,}16\,\mathrm{kg}$ Adjuk meg az $\alpha = 0{,}001$ szignifikanciaszinthez tartozó mérési eredményt!

Megoldás:

A feladatban nincs megadva a mérési adatok száma, ezért azt csak úgy tudjuk megoldani, hogy ha feltételezzük, hogy a mérési eredményt ismert szórás esetén adták meg. Ha ez nem így van, akkor a megoldásunk csak egy közelítés lesz.

Ha a szórás ismert, akkor a mérési eredményt a következő alakban adjuk meg:

$$m = \overline{m} \pm \Delta m = \overline{m} \pm \frac{\lambda \cdot \sigma}{\sqrt{N}}$$

A táblázatból kiolvasható, hogy az $\alpha = 0{,}01$ értékhez tartozó λ 2,57624, az $\alpha = 0{,}001$ értékhez tartozó λ pedig 3,29076. A kezdeti szignifikanciaszinthez tartozó Δx-et ismerjük:

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot \sigma}{\sqrt{N}} \;\Rightarrow\; \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{\Delta x}{\lambda}$$

Az új konfidenciaintervallum:

$$\Delta x' = \frac{\lambda' \cdot \sigma}{\sqrt{N}} = \frac{\lambda'}{\lambda} \cdot \Delta x$$

Behelyettesítve:

$$m = 3{,}21\,\mathrm{kg} \pm 0{,}21\,\mathrm{kg}$$