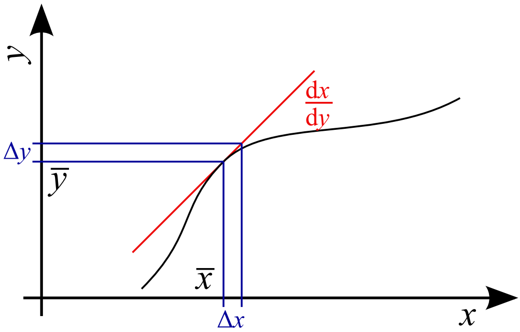
Tartalom I

A mérési hiba terjedése



- Egy *y* mennyiség a mérési hibával terhelt *x* mennyiségtől függ.

$$\Delta y = \left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\overline{x}} \cdot \Delta x$$

A mérési hiba terjedése többváltozós függvények esetén

- A vizsgált q mennyiség több mért mennyiségtől függ.

$$q = q(x, y, \cdots)$$

- Minden egyes mennyiség hibája növeli a végeredmény hibáját a szórásnégyzetek adódnak össze $\Rightarrow$

$$(\Delta q)^2 = (\Delta q_x)^2 + (\Delta q_y)^2 + \cdots$$

$$(\Delta q)^2 = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|^2_{x=\bar{x},\, y=\bar{y}} \cdot (\Delta x)^2 + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|^2_{x=\bar{x},\, y=\bar{y}} \cdot (\Delta y)^2 + \cdots$$

$$\Delta q = \sqrt{\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|^2_{x=\bar{x},\, y=\bar{y}} \cdot (\Delta x)^2 + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|^2_{x=\bar{x},\, y=\bar{y}} \cdot (\Delta y)^2 + \cdots}$$

Példa

$m = 3{,}21\,\mathrm{kg} \pm 0{,}05\,\mathrm{kg}$

$v = 7{,}31\,\mathrm{m/s} \pm 0{,}11\,\mathrm{m/s}$

$E_{\mathrm{mozg}} = \frac{1}{2} m v^2$

$E_{\mathrm{mozg}} = ?$

$$\overline{E_{\mathrm{mozg}}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{m}\,\overline{v}^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}21 \cdot 7{,}31^2\,\mathrm{J} \approx 85{,}7649\,\mathrm{J}$$

Példa

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{v^2}{2} \;,\; \frac{\partial E}{\partial v} = mv$$

$$\Delta E = \sqrt{\left|\frac{\overline{v}^2}{2}\right|^2 (\Delta m)^2 + \left|\overline{mv}\right|^2 (\Delta v)^2}$$

$$\Delta E = \sqrt{\frac{7{,}31^4}{4} \cdot 0{,}05^2 + (3{,}21 \cdot 7{,}31)^2 \cdot 0{,}11^2}\,\mathrm{J} = 2{,}906377\,\mathrm{J}$$

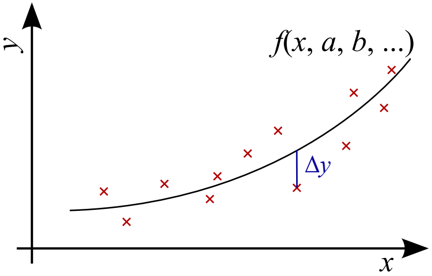
$$E = 85{,}76\,\mathrm{J} \pm 2{,}91\,\mathrm{J}$$

Függvény illesztése

- A mérés során két (vagy több) egymástól függő fizikai mennyiséget mérünk meg:

$$y = f(x, a, b, \cdots)$$

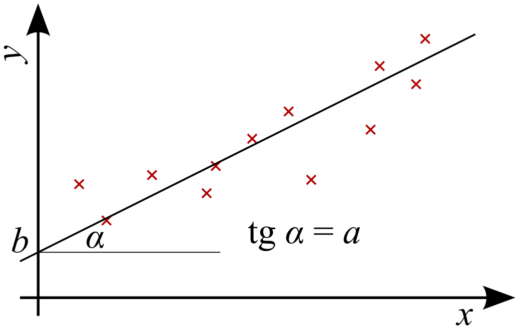
  ahol *a, b, ...* ismeretlen paraméterek.
- Paraméterek meghatározása: függvény illesztése.



Legkisebb négyzetek módszere

- Cél: illesztés hibájának minimalizálása.

$$S(a,b,\cdots) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - f(x_i,a,b,\cdots)\right]^2 = min$$



Legkisebb négyzetek módszere

- Szélsőérték-keresési probléma
  Egyenes esetén ($y = a \cdot x + b$):

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (a \cdot x_i + b)\right]^2 = min$$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{N} 2\left[y_i - (a \cdot x_i + b)\right](-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{N} 2\left[y_i - (a \cdot x_i + b)\right](-1) = 0$$

Egyenes illesztése

- a és b meghatározása:

$$b = \overline{y_N} - a \cdot \overline{x_N}$$

$$a = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i - \overline{x_N} \cdot \overline{y_N}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \overline{x_N}^2}$$

- Az illesztés jóságát megadó mennyiség a korrelációs együttható (R).
  - 0: nincs lineáris összefüggés a mennyiségek között
  - 1: tökéletesen illeszkedik az egyenes

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x_N}) \cdot (y_i - \overline{y_N})\right]}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x_N})^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} (y_i - \overline{y_N})^2}$$

Origón átmenő egyenes illesztése

- $b \equiv 0 \;\Rightarrow y = a \cdot xb$

$$S(a) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (a \cdot x_i) \right]^2 = min$$

$$\frac{\partial S(a)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{N} 2 \left[y_i - (a \cdot x_i) \right] (-x_i) = 0$$

- Az a paraméter értéke:

$$a = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

Nemlineáris illesztés

- A legkisebb négyzetek módszere nemlineáris esetben is működik
  Változó nagyságrendek $\Rightarrow$ célszerű egy súlyfüggvény alkalmazása

$$S(a,b,\cdots) = \sum_{i=1}^{N} w_i \left[y_i - f(x_i,a,b,\cdots)\right]^2 = min$$

Pl.:

$$S(a,b,\cdots) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{y_i^2} \left[y_i - f(x_i,a,b,\cdots)\right]^2 = min$$

- Linearizálás: függvény átalakítása, hogy egyenest kelljen illeszteni

Linearizálás

- Illesztendő függvény:

$$y = a \cdot x^2$$

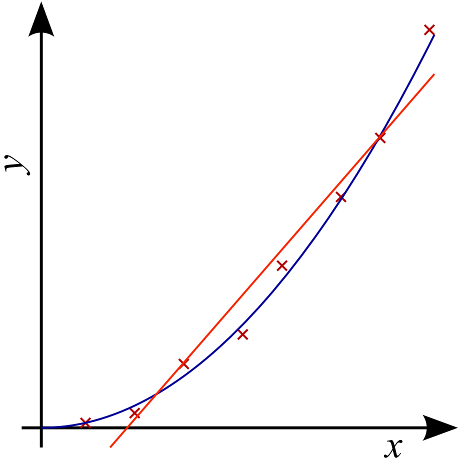
y_i és x_i mérve
a: ismeretlen

- Keresett függvény:

$$Y = A \cdot X + B$$

Ahol Y_i és X_i meghatározható a mért adatokból.
Keressük A és B értékét.

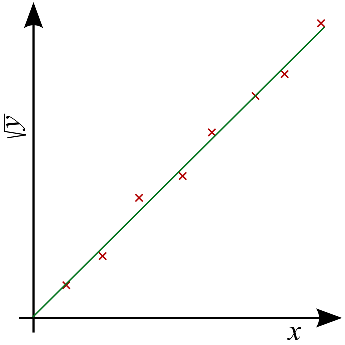
$$Y = ? \ ; \ \ X = ?$$



Linearizálás

$$\sqrt{y} = \sqrt{a} \cdot x$$

$$Y = \sqrt{y} \;;\; X = x \;;\; A = \sqrt{a}$$



$$y = a \cdot x^2$$

$$Y = y \;;\; X = x^2$$