Fizika mérőmódszerek

8. feladat: Egy mennyiség átlaga 3,79, hibája pedig 0,23. Adjuk meg a mennyiség négyzetének átlagát és hibáját!

Megoldás:

$$x = 3{,}79$$

$$\Delta x = 0{,}23$$

(Megjegyzés: a megoldás menete ugyanaz, ha szórásokat adunk meg konfidenciaintervallumok helyett.)

$$f(x) = x^2$$

$$\overline{x} = 3{,}79^2 = 14{,}3641$$

$$\Delta f(x) = \left|\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{\overline{x}} \cdot \Delta x$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot x$$

$$\Delta f(x) = |2 \cdot \overline{x}| \cdot \Delta x = 2 \cdot 3{,}79 \cdot 0{,}23 = 1{,}7434$$

Vagyis:

$$f(x) = 14{,}36 \pm 1{,}75$$

9. feladat: Egy korong átmérőjét tolómérővel megmérve 6,53 cm-t kapunk. Mekkora a korong kerülete, ha a mérések szórása 0,2 mm (0,01-es szignifikanciaszintet használjunk)? Hány mérést kell végeznünk, ha a kerületet legfeljebb 0,2 mm hibával szeretnénk tudni?

Megoldás:

$$d = 6,53\mathrm{cm}$$

$$\sigma = 0,02\mathrm{cm}$$

$\alpha = 0,01$, vagyis táblázatból kiolvasva: $\lambda = 2,58$

$$\Delta d = \lambda \cdot \sigma = 0,0516\mathrm{cm}$$

$$K = \pi \cdot d$$

$$\overline{K} = \pi \cdot \overline{d} = 3,14 \cdot 6,53 = 20,50\text{cm}$$

$$\Delta K = \left|\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}d}\right|_{\overline{d}} \cdot \Delta d$$

$$\Delta f(x) = \pi \cdot \Delta d = 3,14 \cdot 0,0516 = 0,162\text{cm}$$

Vagyis:

$$K = 20,50 \pm 0,162$$

Ha több mérést végzünk:

$$\Delta d = \frac{\lambda \cdot \sigma}{\sqrt{N}}$$

Ebből:

$$\Delta K = \pi \cdot \Delta d = \frac{\pi \cdot \lambda \cdot \sigma}{\sqrt{N}} \leq 0,02$$

Átrendezve:

$$N = \left(\frac{\pi \cdot \lambda \cdot \sigma}{0,02}\right)^2 = \left(\frac{3,14 \cdot 2,58 \cdot 0,02}{0,02}\right)^2 = 65,62 \approx 66$$

Vagyis a megfelelő pontosság eléréséhez legalább 66 mérésre van szükségünk.

10. feladat: Megmérve egy rúd hosszát azt kapjuk, hogy $l = (2534,5 \pm 2,4)$ mm. A mérőeszköz hibás kalibrálása miatt fellépő szisztematikus hibát egy korrekciós tényezővel tudjuk kompenzálni (ennyivel kell növelni a végeredményt: $L = l + x$), ennek értékét csak elég nagy bizonytalansággal tudtuk meghatározni: $x = (0,6 \pm 1,3)$ mm. Adjuk meg a korrigált végeredményt!

Megoldás:

$$\overline{l} = 2534,5\text{mm}$$

$$\Delta l = 2,4\text{mm}$$

$$\overline{x} = 0,6\text{mm}$$

$$\Delta x = 1,3\text{mm}$$

A valódi hossz a mért hossz + a korrekció:

$$L = l + x$$

$$\overline{L} = \bar{l} + \overline{x} = 2534,5 + 0,6 = 2535,1\text{mm}$$

Mivel a végeredmény a két mennyiség összege, ezért a hibák négyzete adódik össze (de a hagyományos hibaterjedési összefüggésből is levezethetjük a végeredményt).

$$(\Delta L)^2 = (\Delta l)^2 + (\Delta x)^2$$

$$\Delta L = \sqrt{(\Delta l)^2 + (\Delta x)^2} = \sqrt{(2,4)^2 + (1,3)^2} = 2,73\text{mm}$$

A végeredmény:

$$L = 2531,1\text{mm} \pm 2,73\text{mm}$$

11. feladat: Adjuk meg egy oldott anyag molekuláris dekadikus extinkciós koefficiensét ($\epsilon(\lambda)$) ha $I/I_0 = 0,56 \pm 0,05$, $c = 10^{-4}$ mol/l, $d = 1$ cm és

$$\epsilon(\lambda) = \frac{log(\frac{I_0}{I})}{c \cdot d}$$

Megoldás:

A feladat legnehezebb része a függvény deriválása. Figyeljük meg, hogy a logaritmus argumentumában nem I/I_0 szerepel, hanem ennek a reciproka.
Legyen: $T = I/I_0$ (Transzmisszió). Ekkor:

$$\epsilon(\lambda) = \frac{log(\frac{1}{T})}{c \cdot d}$$

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}T} = \frac{1}{c \cdot d} \cdot \frac{1}{\frac{1}{T}} \cdot \log(e) \cdot \frac{-1}{T^2} = \frac{-\log(e)}{c \cdot d \cdot T}$$

$$\overline{\epsilon} = \frac{\log(\frac{1}{\overline{T}})}{c \cdot d} = \frac{\log(\frac{1}{0,56})}{10^{-4} \cdot 1} = 2518\,\text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$$

$$\Delta\epsilon = \left|\frac{-\log(e)}{c \cdot d \cdot \overline{T}}\right| \cdot \Delta T = \left|\frac{-\log(e)}{10^{-4} \cdot 1 \cdot 0,56}\right| \cdot 0,05 = 387\,\text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$$

A végeredmény:

$$\epsilon = 2518\,\text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} \pm 387\,\text{mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$$