Gyakorló feladatok 1.

1. feladat: Egy csillagászati távolságmérési módszer szórása 3,5 fényév. Ezzel a módszerrel megmérve egy csillag távolságát 136,9 fényévet kapunk. Adjuk meg a végeredményt 0,005 szignifikanciaszint (α) mellett.

Megoldás:

Eredmények megadása, ha egy mérési adatunk van és ismerjük a szórást:

$$l = l \pm \Delta l = l \pm \lambda \cdot \sigma \tag{1}$$

ahol λ értékét táblázatból kereshetjük ki az α függvényében. Most $\lambda = 2,80739$. Vagyis

$$l = 136,9 \pm 2,8 \cdot 3,5 = 136,9 \pm 9,8 \tag{2}$$

2. feladat: Az e/m mérésekor a következő eredményeket kaptuk:

$1,7 \cdot 10^{11}$
$1,8 \cdot 10^{11}$
$1,76 \cdot 10^{11}$
$1,78 \cdot 10^{11}$
$1,72 \cdot 10^{11}$
$1,61 \cdot 10^{11}$
$1,69 \cdot 10^{11}$
$1,74 \cdot 10^{11}$
$1,74 \cdot 10^{11}$ $[C/kg]$

Adjuk meg a végeredményt 0,01-es szignifikanciaszint (α) mellett!
Tudjuk, hogy az elemi töltés $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,C$, az elektron tömege pedig: $m = 9,1 \cdot 10^{-31}\,kg$.
Adjuk meg a végeredmény irodalmi értékhez képesti abszolút és relatív hibáját!

A feladat megoldásánál ne használjuk az Excel beépített átlag és szórás számolási rutinját!

Megoldás:

A számolások a mellékelt (3-2-02.xls) fájlban találhatóak meg.

A mérési eredmények megadása N adat esetén, ha ismeretlen a szórás (feltételezve, hogy a véletlen hiba Gauss-os eloszlású):

$$m = m \pm \Delta m = m \pm \frac{t_{N-1} \cdot \sigma^*_{N-1}}{\sqrt{N}} \tag{3}$$

ahol t_{N-1} értékeit táblázatból kereshetjük ki az α függvényében, σ^*_{N-1} pedig az empírikus szórás.

$$\overline{e/m} = 1,7267 \cdot 10^{11}\, C/kg \tag{4}$$

$$\sigma^*_{N-1} = 0,0563 \cdot 10^{11}\, C/kg \tag{5}$$

és N=9.

A t_{N-1} táblázatból kikeresve: $t_{9-1} = 3,35537$

$$\Delta(e/m) = 0,0630 \cdot 10^{11}\, C/kg \tag{6}$$

Vagyis a végeredmény:

$$e/m = 1,7267 \cdot 10^{11}\, C/kg \pm 0,0630 \cdot 10^{11}\, C/kg \tag{7}$$

Irodalmi értékkel való összehasonlítás:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19}\, C \tag{8}$$

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31}\, kg \tag{9}$$

$$e/m = 1,76 \cdot 10^{11}\, C/kg \tag{10}$$

$$\frac{\overline{e/m} - e/m}{e/m} = 1,8\% \tag{11}$$

3. feladat: Egy folyó vízszintjét kis időkülönbséggel megmérve a következő eredményeket kapjuk: 1022 cm, 1026 cm, 1020 cm, 1025 cm, 1019 cm. Adjuk meg a folyó vízszintjét 0,01 szignifikanciaszint (α) mellett! (Tételezzük fel, hogy a mérési hiba Gauss-os eloszlású.)

4. feladat: Jégkockák tömegét mérve a következő eredményeket kapjuk: 7,44 g, 7,35 g, 7,56 g, 7,41 g. Mekkora a jégkockák átlagos tömege? Mekkora a jégkockák átlagos térfogata?

5. feladat: Egy téglatest oldalait tolómérővel megmérve a következő eredményt kaptuk:
3,52 cm, 6,98 cm, 4,60 cm. Tudjuk, hogy az adott tolómérővel végzett mérés szórása 0,2 mm. Adjuk meg a téglatest térfogatát 0,01 szignifikanciaszint (α) mellett.

Megoldás:

a = 3,52 cm
b = 6,98 cm
c = 4,60 cm
σ = 0,02 cm

α = 0,01, vagyis táblázatból kiolvasva: λ = 2,58

$$\Delta a = \Delta b = \Delta c = \lambda \cdot \sigma = 0,0516 cm \tag{12}$$

$$V = a \cdot b \cdot c \tag{13}$$

$$\overline{V} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = 3,52 \cdot 6,98 \cdot 4,60 = 113,02016\, cm^3 \tag{14}$$

$$\Delta V = \sqrt{\left|\frac{\partial V}{\partial a}\right|^2_{\overline{a},\overline{b},\overline{c}} \cdot (\Delta a)^2 + \left|\frac{\partial V}{\partial b}\right|^2_{\overline{a},\overline{b},\overline{c}} \cdot (\Delta b)^2 + \left|\frac{\partial V}{\partial c}\right|^2_{\overline{a},\overline{b},\overline{c}} \cdot (\Delta c)^2} \tag{15}$$

$$\Delta V = \sqrt{\left|\overline{b} \cdot \overline{c}\right|^2 \cdot (\Delta a)^2 + \left|\overline{a} \cdot \overline{c}\right|^2 \cdot (\Delta b)^2 + \left|\overline{a} \cdot \overline{b}\right|^2 \cdot (\Delta c)^2} \tag{16}$$

$$\Delta V = \sqrt{|6,98 \cdot 4,60|^2 \cdot 0,0516^2 + |4,60 \cdot 3,52|^2 \cdot 0,0516^2 + |3,52 \cdot 6,98|^2 \cdot 0,0516^2} = 2,25\, cm^3 \tag{17}$$

A végeredmény ezzel: $V = 113,02016\, cm^3 \pm 2,25\, cm^3$.