MÉRÉSI EREDMÉNYEK PONTOSSÁGA, A HIBASZÁMÍTÁS ELEMEI

1. A mérési eredmény megadása

A mérés során kapott értékek eltérnek a mérendő fizikai mennyiség valódi értékétől. Alapvetően kétféle mérési hibát különböztetünk meg: a determinisztikus és a statisztikus hibát. A determinisztikus hiba nagysága és előjele elvileg meghatározható (ezért ezt a hibafajtát sok esetben korrigálhatjuk). Egészen más a helyzet a statisztikus hiba esetén, amikor a hiba véletlenszerű, tehát nagyságát, de még előjelét sem tudjuk megjósolni. A következőkben a statisztikus hiba kezelésével foglalkozunk.

A mérési eredmény a mérési adatok és a hiba nagyságának ismeretében adható meg, a hiba ismerete nélkül a mérési adat önmagában elégtelen információt ad. Statisztikus hiba esetén a mérés hibájához csak valószínűségi értelmezést adhatunk, tehát azt mondjuk, hogy az x valódi érték − amit az $\langle x \rangle$ várhatóértékkel azonosítunk − adott valószínűséggel esik az ún. megbízhatósági (konfidencia) intervallumba:

$$\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x \,, \tag{1}$$

amelynek szokásos rövidebb írásmódja:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \,. \tag{2}$$

Itt $\bar{x}$ a mért adat, Δx pedig a statisztikus hiba. Gyakran használjuk a dimenzió nélküli relatív hibát is, mely a következő formulával adható meg:

$$\frac{\Delta x}{\bar{x}} \,. \tag{3}$$

A relatív hibát százalékban is megadhatjuk, melynek számértéke a fenti mennyiség százszorosa. Laboratóriumi gyakorlatokon sokszor előfordul, hogy egy olyan fizikai mennyiséget mérünk, melynek értékét irodalmi értékkel vetjük össze. Ebben az esetben az irodalmi értéktől való relatív eltérést használhatjuk mérésünk hibájának jellemzésére:

$$\frac{\bar{x} - x_0}{x_0} \,, \tag{4}$$

ahol x_0 az irodalmi érték. Fontos megjegyeznünk, hogy ez a „hiba” nem csak a statisztikus, hanem a determinisztikus hibát is tartalmazza!

A következőkben megmutatjuk, hogyan adhatjuk meg a mérési eredményt a legfontosabb esetekben.

A véletlen ingadozások mértékét a szórással jellemezzük és így a mérési eredmény statisztikus hibájának megadásához is a szórást használjuk fel. A mérési eredmények megadásakor két alapvető esetet különböztetünk meg.

1.1. A σ szórás értéke ismert

Ez az eset gyakran előfordul, amikor a mérőműszer okozza a statisztikus hibát, és a műszer gyártója a szórást az adatlapban megadja. Ilyen esettel találkozhatunk, ha pl. tolómérőt vagy mikrométert használunk. A mérési eredmény megadása ekkor a következő alakú:

$$x = \bar{x} \pm \lambda\sigma \,. \tag{5}$$

Itt $\bar{x}$ a mért adat, λ pedig az előírt valószínűségtől függő szám. Ha tudjuk, hogy a statisztikus ingadozás normális eloszlású, akkor λ értékét a következő összefüggés adja meg:

$$\lambda = F^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right), \tag{6}$$

ahol F^{-1} a [0,1] paraméterű normális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze, p pedig annak a valószínűsége, hogy a $2\Delta x$ szélességű konfidencia intervallumban található a valódi érték. Mivel λ zárt formulával nem adható meg, értékét általában táblázat segítségével kaphatjuk meg (l. I. táblázat). Megjegyezzük, hogy p helyett szokás az $\alpha = 1 - p$ szignifikancia szintet is használni.

Tudjuk, hogy $<x>$ várhatóértéket jobban közelíti a több mért adatból kiszámított $\bar{x}_N$ középérték, amely a következő formulával adható meg:

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \,. \tag{7}$$

Természetesen az N mért adatból számított középérték is egy véletlenszerűen ingadozó mennyiség, melynek várható értéke szintén $<x>$, szórása viszont az eredeti szórás $\sqrt{N}$ -ed része. Ebből következően a mérési eredmény megadása több mért adat esetén a következő alakú:

$$x = \bar{x}_N \pm \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{N}} \,. \tag{8}$$

Látható tehát, hogy azonos szignifikanciaszint mellett több mérési adat középértékének kiszámításával csökkenthető a mérés $\Delta x = \lambda\sigma / \sqrt{N}$ statisztikai hibája.

2. A szórás értéke ismeretlen

Ha a szórás értékét nem ismerjük, akkor az eddigiek szerint nem is adhatnánk meg a mérési eredményt, mivel nem tudjuk megadni a statisztikus hibát. Ebben az esetben a szórás szerepét a korrigált empirikus szórás veszi át, melyet az x_i mért adatokból számítunk ki a következő formulával:

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2}\ , \tag{9}$$

λ helyett most a t-eloszlásra utaló t_{N-1} jelölést használva a mérési eredmény megadása a következő alakú:

$$x = \bar{x}_N \pm \frac{t_{N-1}\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}\ , \tag{10}$$

t_{N-1} szokásos értékeit a II. táblázatban foglaltuk össze.

Vegyük észre, hogy a korrigált empirikus szórás definíciójából következően nem adhatjuk meg a mérési eredményt egyetlen mért adat esetén, mert nullával kellene osztanunk. Ez a tény is jól mutatja, hogyha a szórás ismeretlen, egyetlen mért adattal nem adható meg a mérés eredménye.

A következőkben összefoglaljuk a mérési eredmény megadását az előzőekben tárgyalt esetekre.

– Ha a szórás ismert, és egy mért adatunk van:

$$x = \bar{x} \pm \lambda\sigma\,. \tag{11}$$

– Ha a szórás ismert, és N mérési adatunk van:

$$x = \bar{x}_N \pm \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{N}}\,. \tag{12}$$

– Ha a szórás ismeretlen és $N \geq 2$ mért adatunk van:

$$x = \bar{x}_N \pm \frac{t_{N-1}\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}\,. \tag{13}$$

(Fontos: a kiszámolt hibát két vagy három értékes jegyre kell kerekíteni, és a középértéket is ugyanannyi tizedesjegy pontossággal kell feltüntetni!)

Az I. és II. táblázatok segítséget adnak λ és t_{N-1} értékeinek meghatározásához normális eloszlású, véletlenszerű hiba esetére. Megjegyezzük, hogy laboratóriumi gyakorlatainkon leggyakrabban a 0,95 valószínűségi értéket használjuk.

p α	0,9 0,1	0,95 0,05	0,99 0,01	0,995 0,005	0,999 0,001
λ	1,64521	1,96039	2,57624	2,80739	3,29076

I. táblázat: λ értékei a p valószínűség, illetve $\alpha = 1 - p$ szignifikancia-szint függvényében normális eloszlás esetére

N	ν	$p = 0{,}9$ $\alpha = 0{,}1$	$p = 0{,}95$ $\alpha = 0{,}05$	$p = 0{,}99$ $\alpha = 0{,}01$	$p = 0{,}995$ $\alpha = 0{,}005$	$p = 0{,}999$ $\alpha = 0{,}001$
2	1	6,31370	212,70615	63,65672	127,32133	636,61920
3	2	2,91996	4,30264	9,92477	14,08897	31,59903
4	3	2,35334	3,18244	5,84088	7,45326	12,92393
5	4	2,13183	2,77638	4,60409	5,59755	8,61026
6	5	2,01501	2,57052	4,03211	4,77329	6,86876
7	6	1,94311	2,44685	3,70741	4,31679	5,95875
8	7	1,89453	2,36459	3,49946	4,02927	5,40786
9	8	1,85952	2,30595	3,35537	3,83250	5,04129
10	9	1,83307	2,26215	3,24979	3,68960	4,78089
20	19	1,72913	2,09302	2,86087	3,17372	3,88339
30	29	1,69910	2,04518	2,75634	3,03797	3,65935
40	39	1,68487	2,02268	2,70784	2,97554	3,55810
50	49	1,67653	2,00957	2,67990	2,93970	3,50043
100	99	1,66036	1,98416	2,62640	2,87130	3,39150
150	149	1,65507	1,97597	2,60919	2,84940	3,35701
200	199	1,65254	1,97195	2,60070	2,83867	3,34002

II. táblázat: t_{N-1} értékei a p valószínűség, illetve $\alpha = 1 - p$ szignifikanciaszint és az N mérési adatok száma, illetve $\nu = N - 1$ szabadsági fok függvényében t-eloszlás esetére

Az alábbiakban néhány kidolgozott feladaton keresztül mutatjuk meg a fenti összefüggések alkalmazását.

1. Tömegmérés adata:
   m = 1,21 kg
   A szórás ismert, értéke:
   σ = 0,017 kg
   Adjuk meg az α = 0,01 szignifikanciaszinthez tartozó mérési eredményt!

$$p = 1 - \alpha = 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2{,}57624\,,$$

$$\Delta m = \lambda \cdot \sigma = 2{,}57624 \cdot 0{,}017\ \text{kg} = 0{,}043796\ \text{kg} \sim 0{,}044\ \text{kg}\,,$$

$$\boxed{m = 1{,}210\ \text{kg} \pm 0{,}044\ \text{kg}}\,. \tag{14}$$

2. Az előző feladatban megadott feltételek mellett hány mérési adatot kell gyűjtenünk ahhoz, hogy a mérés hibája 0,01 kg alá csökkenjen?

$$\Delta m < 0{,}01\,\text{kg} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{N}} < 0{,}01\,\text{kg} \quad \Rightarrow \quad N > \left(\frac{0{,}043796}{0{,}01}\right)^2,$$

$$\boxed{N \geq 20}\,. \tag{15}$$

3. Egy mérést többször elvégezve kaptuk:
   R_1 = 7,20 Ω, R_2 = 7,19 Ω, R_3 = 7,19 Ω, R_4 = 7,22 Ω, R_5 = 7,23 Ω.
   Adjuk meg az α = 0,05 szignifikanciaszinthez tartozó mérési eredményt!

Középérték: 7,206 Ω.

Korrigált empirikus szórás: 0,018166 Ω.

$$\alpha = 0{,}05\,,\ N = 5\ (\nu = 4) \quad \Rightarrow \quad t_{N-1} = 2{,}77638\,.$$

$$\text{Hiba:}\ \ \frac{t_{N-1}\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}} \sim 0{,}022556\ \Omega\,.$$

$$\boxed{R = 7{,}206\,\Omega \pm 0{,}023\,\Omega}\,. \tag{16}$$

2. A mérési eredmény megadása közvetett mérés esetén A mérési hiba terjedése

Ha ismert egy fizikai mennyiség más fizikai mennyiségektől való $q = q(x,y,...)$ függése, akkor $x,y,...$ mérésével q mérési eredménye is megadható. Ha az $x,y,...$ mennyiségeket kicsi hibával mértük, akkor jó közelítéssel igaz, hogy

$$\overline{q} = q(\overline{x},\overline{y},...)\,, \tag{17}$$

ahol a felülvonás a középértéket jelöli, és

$$\Delta q = \sqrt{\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|^2_{\overline{x},\overline{y},...} \Delta x^2 + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|^2_{\overline{x},\overline{y},...} \Delta y^2 + \ldots}\ . \tag{18}$$

Ez a képlet alkalmas arra, hogy az $x,y,...$ fizikai mennyiségek középértékének és hibáinak ismeretében meghatározzuk a származtatott q mennyiség középértékét és hibáját.

Egyváltozós függvény esetén a származtatott mennyiség hibáját megadó formula a következőképpen egyszerűsödik:

$$\Delta q = \left|\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}\right|_{\overline{x}} \Delta x\ . \tag{19}$$

Példa:

$m = 3{,}21\ \mathrm{kg} \pm 0{,}05\ \mathrm{kg}$,
$v = 7{,}31\ \mathrm{m/s} \pm 0{,}11\ \mathrm{m/s}$.
$E = \frac{1}{2} m v^2$,
$E = ?$

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\overline{m}\,\overline{v}^2 = \frac{1}{2}\cdot 3{,}21\cdot 7{,}31^2\ \mathrm{J} \approx 85{,}7649\ \mathrm{J}\ . \tag{20}$$

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{v^2}{2},\qquad \frac{\partial E}{\partial v} = m v\ . \tag{21}$$

$$\Delta E = \sqrt{\left|\frac{\overline{v}^2}{2}\right|^2 \Delta m^2 + \left|\overline{m}\,\overline{v}\right|^2 \Delta v^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{7{,}31^4}{4} 0{,}05^2 + (3{,}21 \cdot 7{,}31)^2 \cdot 0{,}11^2} \text{ J} \approx 2{,}906377 \text{ J}.$$

Az E kinetikus energia mérési eredménye tehát:

$$\boxed{E = 85{,}76 \text{ J} \pm 2{,}91 \text{ J}}\,. \qquad (23)$$

Ajánlott irodalom:

1. Kemény S. - Deák A.: Mérések tervezése és eredmények értékelése, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1993.