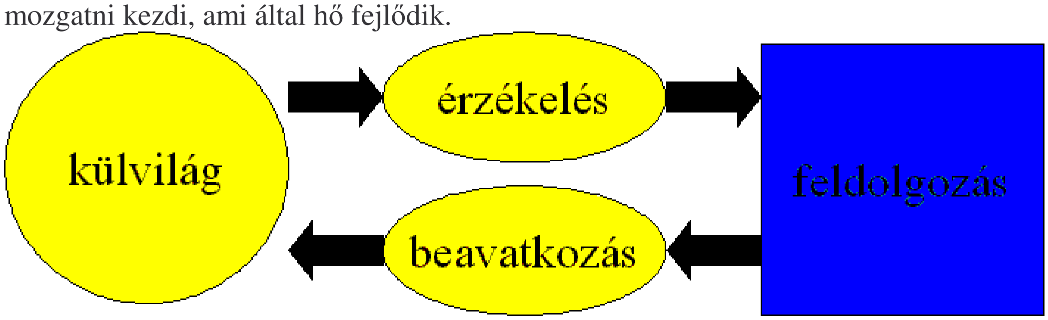
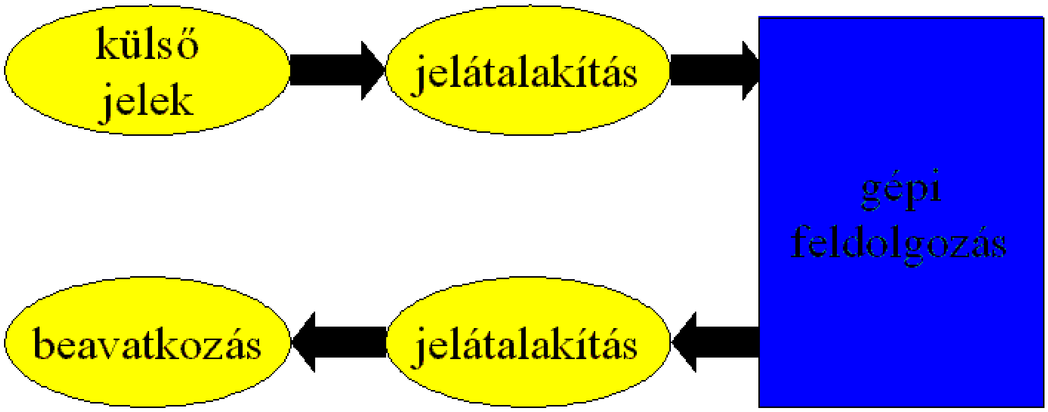
Fizikai mérőmódszerek
jegyzet

1. Bevezetés

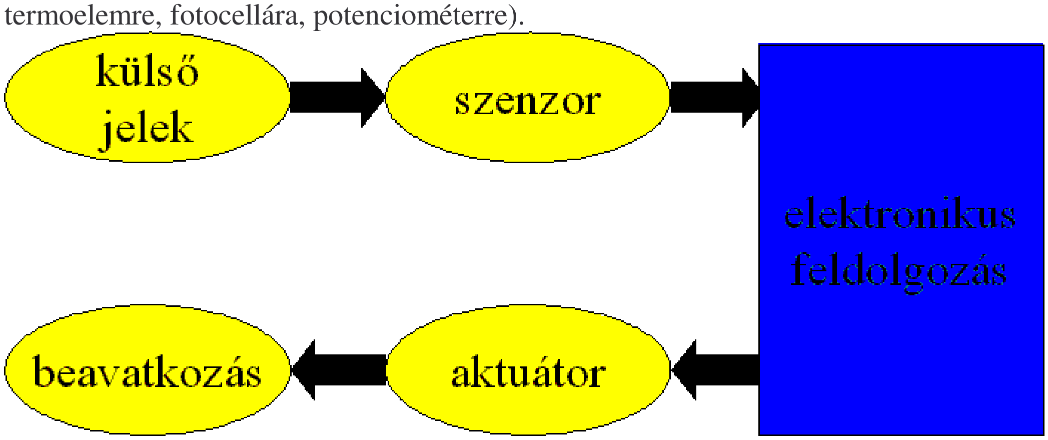
Az emberi léthez szorosan kötődik a környező világ megismerésének, alakításának célja. Az ismeretszerzés tudományos módjai mellett a hétköznapi életben is fontos szerep jut a külvilági jelek érzékelésének, mérésének és feldolgozásának is. Általánosabban is igaz, hogy az élőlények számára nélkülözhetetlen a külvilág jeleinek érzékelése, az így nyert információ feldolgozása és ennek eredménye gyakran a külvilágra gyakorolt hatás is. Érzékszerveinkkel képesek vagyunk fényintenzitás, erő, nyomás és sok más jel egységes, az agy által feldolgozható jellé alakítására. A fordított folyamat is létezik, hiszen az agy mozgást, hőmérsékletváltozást és sok más folyamatot képes irányítani. Ha például fázunk, akkor a hőmérsékletet érzékeljük, mely az idegrendszer számára feldolgozható kémiai és elektromos folyamatokon keresztül válik az agy által is érzékelhető jellé, majd az agy az információ feldolgozásának eredményeképpen az izmokat elektromos impulzusok segítségével mozgatni kezdi, ami által hő fejlődik.



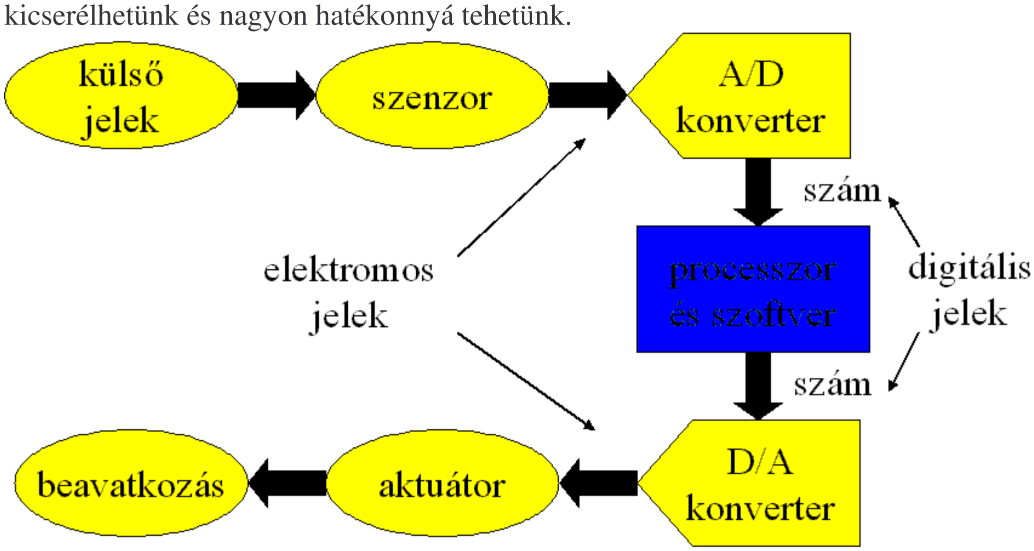
Amikor az ember eszközöket fejleszt ki mérések elvégzésére, gépek készítésére, tulajdonképpen ugyanezt a sémát másolja le. Egy mérőműszernek fontos feladata, hogy a mérendő mennyiséget olyan formába alakítsa, mely számunkra olvasható. Egy hőmérőben például a hőmérséklettel arányos térfogatváltozás, áram mérésekor mechanikai forgatónyomaték jöhet létre. Egy gép esetén gyakran beavatkozó folyamatra is szükség lehet, hiszen a gépeket az ember azért készíti, hogy saját tevékenysége egy részét végeztesse el. Egyszerű példa a fűtésszabályozás, amikor a hőmérséklet elektromos jellé alakul, így a szabályozó központ azt fogadni képes, szükség esetén hő termelésére adhat utasítást, kinyitja a gázszelepet, begyújtja a kazánban a lángot, elindítja a vizet keringető szivattyút.



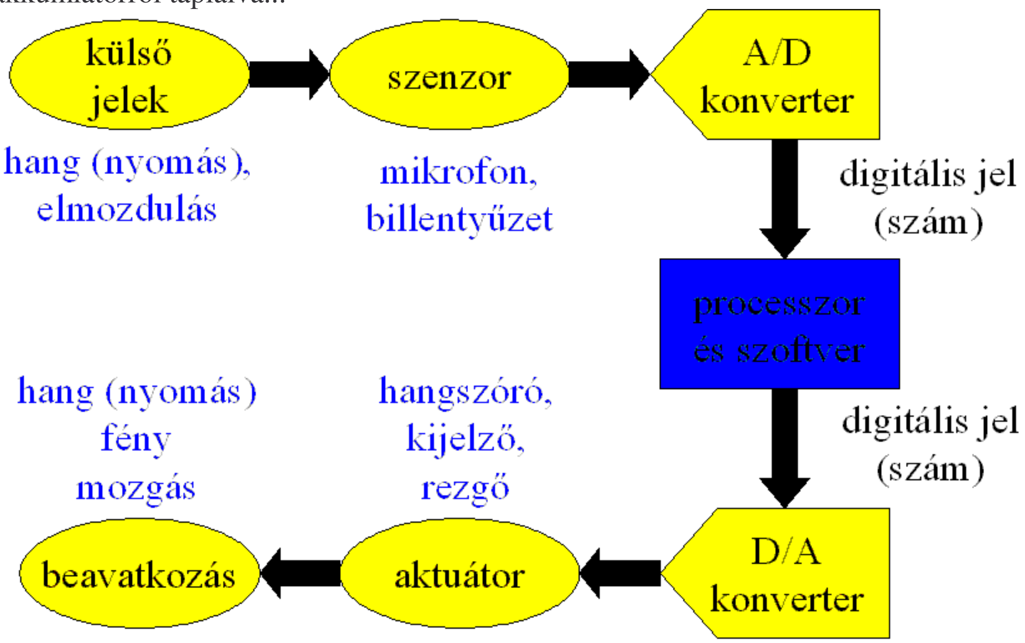
Világosan látható, hogy egy műszer, gép hatékonyságát az érzékelési és beavatkozási mechanizmusok mellett leginkább az szabja meg, hogy a feldolgozó rész mennyire hatékony, azaz az eszköz milyen „intelligens". A fejlődés során először igen ötletes megoldásokkal, mechanikai módszerekkel készítettek gépeket, de igazán nagy lépést az elektronika megjelenése jelentett, mivel elektronikával sokféle művelet és számítás elvégezhetővé vált. Az elektronikus eszközök további előnye volt, hogy a különböző fizikai jeleket elég könnyen elektromos jelekké lehetett alakítani (gondoljunk csak a termoelemre, fotocellára, potenciométerre).



A digitális elektronika, és különösen a szoftvereket futtatni képes programozható digitális elektronika hihetetlen lendületet adott a méréstechnikának és a gépek fejlődésének. Ma már az eszközök jelentős része szoftver, melyet igen egyszerűen kicserélhetünk és nagyon hatékonnyá tehetünk.



Ennek érzékeltetéseként nézzük meg, mit is tud a zsebünkben levő mobiltelefon! Képes mérni hangot (levegő nyomását), elmozdulást (billentyű lenyomása), elektromágneses hullámokat, fényintenzitást (fényképezhetünk is vele). A telefonba szerelt processzor felismerheti hangunkat, információt tárol, számolni képes, időt mér, és még rengeteg, a számunkra nem is látható műveletet végez, másodpercenként több milliót. De a telefonunk jeleket is kelt: információt jelenít meg a képernyőn, fényt generál, hangot (azaz légnyomásváltozást) hoz létre, mechanika rezgést produkál, és elektromágneses hullámokat is kibocsát. Mindezt egy elenyészően kis tömegű akkumlátorról táplálva...



2. A méréselmélet szerepe, legfontosabb feladatai

A fentebb vázolt érzékelési, beavatkozási folyamatok tudományos módjaival foglalkozik a méréselmélet. A mérés lényegében olyan információszerzés, mely a valóságban zajló folyamatokról ad képet. Ennek célja sokrétű lehet, a létfenntartás, komfort, technikai és műszaki alkalmazások mellett természetesen a tudományos megismerés is. A természettudományok, de sok humán tudomány sem létezhetne mérések nélkül. A mérés – ami az „objektív valóság” és szubjektív világunk között teremt hidat – általános jellege miatt igen sok alapvető kérdéssel hozható kapcsolatba, a technikai jellegű feladatoktól a filozófiai problémák érintéséig. A következőkben a méréselmélet legfontosabb feladatai közül sorolunk fel néhányat.

2.1. A mérés feltételrendszere

A méréselmélet fontos feladata tisztázni, hogy a mérés milyen körülmények között ad megbízható eredményt. Ha megvizsgáljuk a fizikai és természettudományos törvények érvényességét, igen gyakran azt találjuk, hogy a törvény korlátozott érvényességű és korlátozott pontossággal teljesül. Gondolhatunk például a klasszikus Newton-féle törvényekre, melyekről kiderült, hogy nagyobb sebességek mellett már relativisztikus korrekcióra szorulnak. Ugyanakkor senkinek sem jut eszébe, hogy például egy jármű mozgásának leírásánál relativisztikus korrekciókat használjon. Ez szorosan kötődik a méréselmélethez is, hiszen a mérést egy fizikai modell, fizikai törvény alapján végezzük el, ami tehát az érvényességi kört korlátozhatja. Tegyük fel például, hogy ellenállást szeretnénk mérni. Ehhez felhasználhatjuk az Ohm-törvényt, így megfelelő áramot átvezetve a mintán feszültséget mérhetünk, majd az ellenállást a feszültség és áram hányadosából kiszámítjuk. A mérési eredmény erősen épül egy fizikai törvényre, melynek érvényessége kérdéses lehet, hiszen az áram az ellenálláson Joule-hőt fejleszt, ami a mintát melegíti, az ellenállás pedig valamennyire mindig hőmérsékletfüggő. A méréselmélet az ilyen jellegű problémák esetén igen szorosan kapcsolódik más természettudományokhoz, melyek feladata modelleket megadni, fejleszteni és érvényességi köröket tisztázni.

Gyakran előfordulhat az is, hogy egy kísérlet során egy bizonyos vizsgálandó q mennyiség függ az x,y,z más mennyiségektől. Ha az x-től való függést szeretnénk vizsgálni, akkor az y,z mennyiségeket állandó értéken kell tartanunk. A legtöbb fizikai mennyiség például függ a hőmérséklettől, ezért ha nem a hőmérsékletfüggést mérjük, akkor a hőmérsékletet állandó értéken kell tartanunk. Emellett a kísérlet kimenetele függhet az időtől, anyagi minőség változásaitól (kémiai folyamatok, öregedés), a földrajzi helytől, és még sok mástól is.

2.2. A mérési pontosság becslése

A mérési pontosságot számos tényező befolyásolja. Egyrészt kérdéses, hogy a mérés alapjául szolgáló fizikai törvény milyen pontossággal teljesül, és általában persze nem éles a törvény érvényességi határa sem. Emellett azt is vizsgálnunk kell, hogy mennyire tudjuk garantálni a nem kívánt hatások kiszűrését, például a hőmérséklet- vagy időfüggés hatását. A pontosság becslése technikai problémákat is felvet, a mérőműszer tulajdonságai természetesen alapvetően fontosak ebből a szempontból.

2.3. Állandók, etalonok definiálása

Egy mérés során az ismeretlen mennyiséget mindig egy jól ismert, állandónak gondolt mennyiséggel hasonlítjuk össze. Természetesen a mérés során ennek az állandónak valamilyen formában jelen kell lennie, hiszen a műszer másképp nem tudná meghatározni a kérdéses arányt. A méréshez használt referenciának ideálisan időtől, hőmérséklettől, földrajzi helytől függetlenül állandónak és ugyanolyannak kell lennie. Mivel több mérőműszerre van szükségünk, a könnyen és megbízhatóan reprodulkálható referencia alapkövetelmény. A mérésekhez használt, nemzetközileg elfogadott alapvető etalonok, állandók hét különböző részre bonthatók és két kiegészítő állandót is definiálhatunk. Ezek a következők

- **Tömeg.** A kilogramm a Franciaországban őrzött 90% platina, 10% iridium ötvözet tömegével definiált egység. Az etalon másolata több országban is megtalálható.
- **Hosszúság.** A méter definíció szerint az hosszúság, melyet a fény vákuumban 1/299792458 másodperc alatt tesz meg.
- **Idő.** A másodperc definíciója szerint az az idő, ami a cézium atom pontosan definiált körülmények közötti oszcillációs periódusidejének 9192631770 szerese.
- **Áram.** Az amper az az állandó áram, mely ha két egyenes, vákuumban levő, végtelen hosszú, egymástól párhuzamosan 1 méterre levő elhanyagolható körkeresztmetszetű vezetőn át folyik, akkor a fellépő erő méterenként $2 \cdot 10^{-7}$N.
- **Hőmérséklet.** A kelvin úgy definiált, hogy a víz hármaspontjánál a hőmérséklet értéke 273.16K. A hármaspontnál a víz három különböző halmazállapota egyensúlyban jelenik meg.
- **Fényintenzitás.** Egy candela fényintenzitás esetén az 540•1012 Hz frekvenciájú monokromatikus fény egy adott irányban egységnyi szteradián térszögbe sugárzott teljesítménye 1/683 Watt.
- **Anyagmennyiség.** Egy mól anyag definíció szerint annyi azonos elemi részt tartalmaz, mint ahány atom található 0.012kg szén 12-es izotópban.

A kiegészítő állandók:

- **Síkszög.** A radián a kör két sugara által bezárt szög, melyek a körből éppen egy sugárnyi ívet jelölnek ki.
- **Térszög.** A szteradián annak a kúpnak a térszöge, melynek a csúcsát a gömb középpontjába helyezve a gömb felületéből éppen a sugár négyzetével egyenlő területet jelöl ki a gömb felszínén.

A többi fizikai mennyiség egysége visszavezethető ezekre az egységekre. Az ellenállás etalonjaként használt mangán tekercsnél használjuk például a hosszúság, tömeg, idő és áram alapvető etalonokat.

2.4. Mérési módszerek megadása, fejlesztése

Egy mérés konkrét kivitelezésének gyakorlati és elméleti kérdései is felmerülnek. A teljessé igénye nélkül felsorolunk néhányat ezek közül.

Technikai problémák közé tartozik a méréshez szükséges idő és ráfordítások csökkentése, a pontosság gazdaságos növelése, a műszer realizálásának egyszerűsítése. Fontos a zajok, zavarok szűrése, melyek a véletlenszerű külső és belső folyamatok hatására óhatatlanul megjelennek. Megjegyezzük, hogy a véletlenszerű jelek információforrást is jelenthetnek, például ha a vizsgált rendszer működésével függenek össze. Szintén gyakorlatias probléma megtalálni az optimális mérési

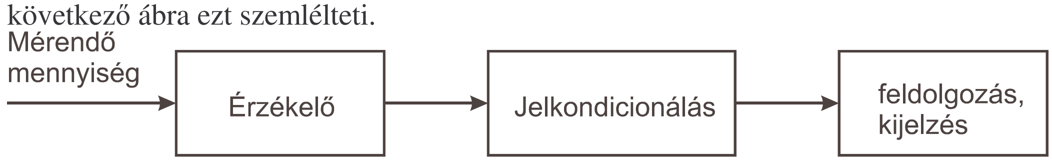
eljárást, ami a mérési pontosság, gazdaságosság és más szempontok megfelelő kompromisszuma alapján adható meg.
Elvi probléma annak tisztázása, hogy a használt fizikai modell érvényes-e a vizsgált esetben. Használhatjuk-e például az Ohm-törvényt ellenállásmérésre bizonyos áramok, bizonyos anyagok esetén? Van-e a fizikai mennyiségnek úgynevezett egzakt értéke? Elég, ha csak a határozatlansági relációra gondolunk, mely kimondja, hogy elvileg sem mérhető tetszőleges pontossággal egy részecske impulzusa és helye egyszerre. Ez is aláhúzza, hogy a véletlenszerűség a természet folyamatainak alapvető sajátossága, mellyel mindig számolnunk kell, méréseinket mindig fogja valamilyen véletlenszerű hiba terhelni.

2.5. Mérési adatok, információ feldolgozása, kiértékelése, értelmezése

A mérés során nyert adatok feldolgozása szintén fontos feladat, hiszen az információ ez alapján jut el a felhasználóhoz. A feldolgozásnak lényeges alapja az elméleti modell, melynek érvényessége befolyásolja

3. A mérőberendezés felépítése

A mérőberendezés általános felépítése – bár sokszor nehezen húzható meg éles határ – három fő részre bontható, melyek sok további komponenst is tartalmazhatnak. A következő ábra ezt szemlélteti.



Az érzékelő elem a mérendő jelet olyan formába – általában egy másfajta fizikai jellé – alakítja, mely lehetőséget ad arra, hogy a mérőláncban szereplő további egységek kezelni tudják. Például hőmérséklet mérésekor a műszerben a hőmérséklettől függően gyakran hosszváltozás, térfogatváltozás esetleg elektromos ellenállás változás jön létre, melyet már a műszer képes felhasználni a kijelzésre.

Az érzékelés utáni fázis a jelkondicionálás, mely a jelet tulajdonképpen minőségileg minőségileg javítja és előkészíti kijelzésre vagy feldolgozásra. A jel további konverziója is szükséges lehet, gondoljunk például arra az esetre, amikor az érzékelő elem kimeneti jele elektromos ellenállás, amit célszerű rajta átbocsátott áram segítségével feszültséggé alakítani, melyet már könnyű kezelni. Jelfeldolgozási funkciók közé tartozik a jel erősítése, szűrése is, hiszen az érzékelő elem után a jel kicsi lehet és tartalmazhat számos zavaró komponenst is. Digitális mérőműszereknél a jeleket emellett számokká kell alakítani, melyet a további digitális elektronika kezelni tud – ezt a feladatot végzi el az úgynevezett analóg-digitál konverter (röviden A/D konverter).

A kijelzési és feldolgozási rész rendkívül sokféle, nagyon egyszerű és nagyon bonyolult is lehet. Példaként vehetjük a higanyos hőmérőt, ahol a kijelző egy egyszerű skála, a Deprez-műszert, ahol a kijelzést egy skála és egy vékony mutató végzi el, ugyanakkor gondolhatunk egy digitális bolti mérlegre, aminek kijelzőjén a mért tömeg mellett a kiszámított ár és a vonalkód is megjelenik, vagy az ultrahangos orvosi műszerre is, ahol egy komoly számítógépes feldolgozás eredményeképp a monitoron idő függvényében nyomon követhetjük a szervezetben zajló folyamatokat grafikus formában. A modern digitális műszereknél a jelfeldolgozási és kijelzési funkciók gyakran nem is választhatók szét élesen. A feldolgozó egység a kijelzésen, megjelenítésen kívül rendkívül sok matematikai számítást, konverziót végezhet el, a mérési kiértékelés funkcióit is tartalmazhatja – gondoljunk csak az utóbb említett ultrahangos műszerre.

Egy mérőműszer minőségét természetesen az egyes funkciókat végző részegységek teljesítménye együttesen határozza meg, de a hatékonyságot leginkább a feldolgozó egység szabja meg, ami ma már a legtöbb esetben digitális, sőt, programozható – azaz szoftvereket futtató – intelligens egységekből épül fel.

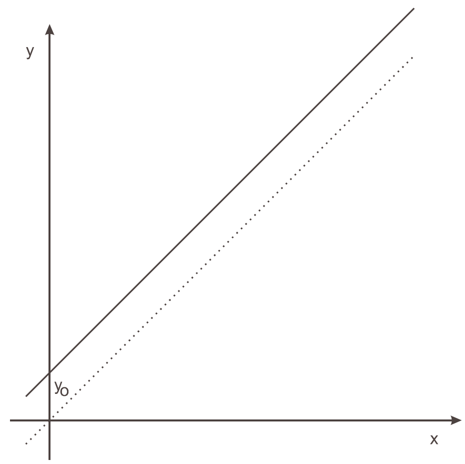
4. A mérőműszerek, mérőrendszerek legfontosabb jellemzői

A következőkben a mérőműszerek és mérőrendszerek néhány fontos tulajdonságát tekintjük át, melyek a mérés pontosságát, a reális működésből fakadó különböző lehetséges hibákat és más paramétereket érintik.

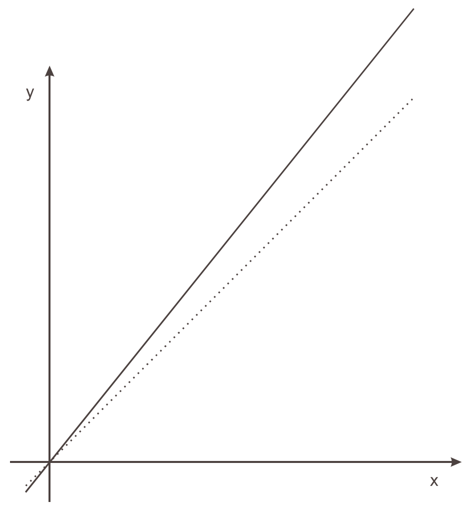
Pontosság. A mérőműszer pontossága az maximális érték, amennyivel a kijelzett érték eltérhet a valódi értéktől. Ez az érték függhet magától az értéktől is, néha abszolút, néha relatív módon adjuk meg. Például a hosszúságmérés pontossága 1m-es méréshatár esetén megadható 1mm-el, de 0,01 vagy 1% formában is.

Felbontás. A felbontás az a legkisebb változás a mérendő mennyiségben, melyet a műszer még követni képes. Fontos, hogy ne keverjük össze a felbontást a pontossággal, különösen azért, mivel a gyakorlatban eléggé elterjedt az a helytelen szokás, hogy a pontosság szót használják a felbontás helyett. Például egy digitális hőmérő kijelezheti a mért adatot 0,1K felbontással, ez azonban nem jelenti azt, hogy a mérés pontossága is 0,1K.

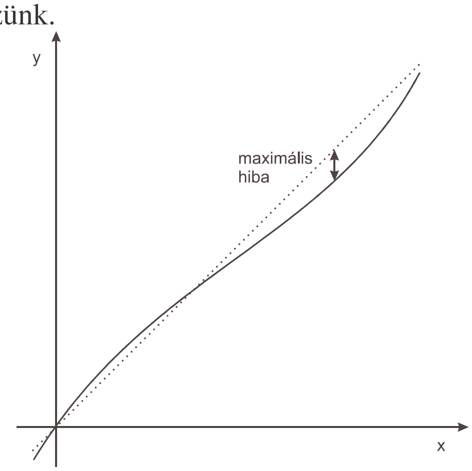
Nullponthiba. Az a hiba (a valódi és mért érték különbsége) mely a mért értéktől függetlenül mindig ugyanakkora. Ez azonos azzal az értékkel, amit a műszer jelez 0 valódi értéknél.



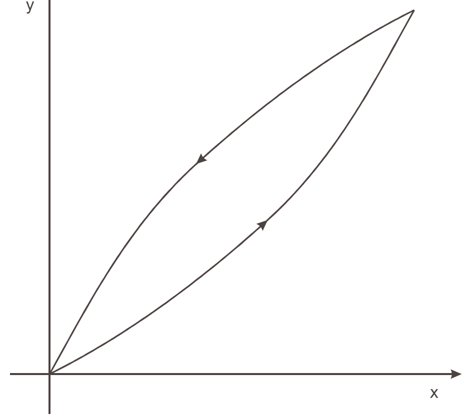
Skálahiba. Ideális esetben a valós és mért érték hányadosa éppen 1 lenne. A gyakorlatban ez az érték kicsit különbözik 1-től, ezt a hibát nevezzük skálahibának. Ez a hiba annál nagyobb, minél nagyobb a mért érték.



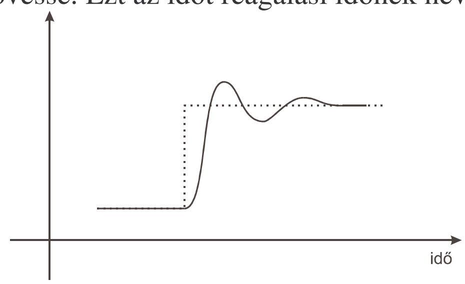
Linearitáshiba. Ideális esetben a valódi és mért érték egymás lineáris függvénye. Reális esetekben ettől eltérő összefüggés igaz, amit linearitáshibának, vagy nemlinearitásnak nevezünk.



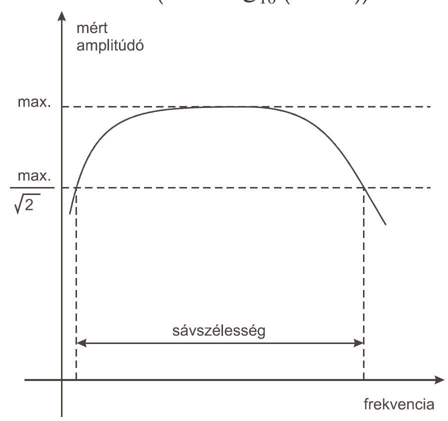
Hiszterézis. Ha a mérendő mennyiség a növekszik, majd csökken, a műszernek ugyanolyan értékeket kellene mutatnia mindkét irány esetén. Reális esetekben a mérési hiba függhet attól, hogy a mért mennyiség a mérés során növekedett vagy csökkent, ezt hiszterézishibának nevezzük. Mechanikus kijelzésű műszerben ilyen jellegű hibát okoz a súrlódás.



Reprodukálhatóság. A mérőműszernek azonos értékre mindig azonos értéket kellene mutatnia. Az műszer hibája (nullhiba, skálahiba, stb.) azonban időben változhat, aminek következtében ez nem pontosan teljesül.
Reagálási idő. Ha a mért mennyiség megváltozik, egy bizonyos idő szükséges ahhoz, hogy a mért érték ezt kövesse. Ezt az időt reagálási időnek nevezzük.



Sávszélesség. A sávszélesség definiálásához szinuszosan változó mérendő jelet feltételezünk. A sávszélesség az a frekvenciasáv, amin belül a mért jel amplitudója a maximális mért amplitúdóhoz képes nem kisebb, mint a maximális amplitúdó $\sqrt{2}$ -ed része, azaz a változás mértéke -3dB $\left(\approx 20\log_{10}\left(1/\sqrt{2}\right)\right)$.



A fentiekben megadott jellemzők mellett még sok más paraméter is megadható, melyeket a megadott szakirodalmak részletesebben tárgyalnak.

5. Determinisztikus és véletlenszerű mérési hibák

A méréseket mindig hiba terheli, azaz a mért érték eltér a valódi értéktől. A mérési hibákat két csoportba soroljuk, a determinisztikus és véletlenszerű vagy statisztikus hibák csoportjába.

A determinisztikus hibák közé tartozik például az előzőekben tárgyalt nullponthiba, skálahiba is. A determinisztikus hiba elvileg mindig meghatározott, nagysága és előjele is meghatározható, így ez a hiba kompenzálható is – ezt az eljárást kalibrálásnak hívják. A hiba oka a mérőműszer tökéletlenségében keresendő.

A véletlenszerű hiba teljesen más természetű. Ez a hiba minden egyes mérésnél más és más értékű, sem a nagyságát sem az előjelét nem lehet előre kiszámítani, így ez a hiba nem kompenzálható semmilyen módon. A véletlenszerű hibák egyik fő oka az időben véletlenszerűen változó külső zavarjelek jelenléte, melyek a mérőműszer működését befolyásolják, elsősorban elektromágneses vagy mechanikus hatásuk útján. Egy másik lehetséges ok magában a műszerben levő számos komponens működése során fellépő véletlen jelek keletkezése. Szinte minden fizikai folyamat során számolnunk kell a véletlenszerű viselkedéssel, melynek legjobb példája talán a kvantummechanika, ahol eleve csak valószínűségi kijelentéseket szokás tenni.

A fentiekből is látszik, hogy a véletlenszerű hibák kezelése igen fontos, mivel alapvetően befolyásolhatják a mérés pontosságát. A hiba nagyságának becsléséhez a valószínűségszámítás ad segítséget, melynek néhány fontosabb elemét áttekintjük a következőkben.

Ha egy mennyiség véletlenszerűen ingadozik, akkor értékét többször mérve különböző adatokat kapunk.

6. A mérési eredmény megadása

A mérés során kapott értékek eltérnek a mérendő fizikai mennyiség valódi értékétől. Alapvetően kétféle mérési hibát különböztetünk meg: a determinisztikus és a véletlenszerű hibát. A determinisztikus hiba – melyet általában a mérőműszer torzítása okoz - nagysága elvileg meghatározható, ezért ezt a hibafajtát sok esetben korrigálhatjuk. Egészen más a helyzet a statisztikus hiba esetén, amikor a hiba véletlenszerű, tehát nagyságát, de még előjelét sem tudjuk megjósolni. Mivel a determinisztikus hiba kompenzálható, ezért a következőkben a statisztikus hiba kezelésével foglalkozunk.

A mérési eredmény a mérési adatok és a hiba nagyságának ismeretében adható meg, a hiba ismerete nélkül a mérési adat önmagában elégtelen információt ad. Statisztikus hiba esetén a mérés hibájához csak valószínűségi értelmezést adhatunk, tehát azt mondjuk, hogy a valódi érték - amit az <x> várhatóértékkel azonosítunk - adott valószínűséggel esik az úgynevezett megbízhatósági, úgynevezett konfidencia intervallumba:

$$< x >= \bar{x} \pm \Delta x \qquad (1.)$$

Itt $\bar{x}$ a mért adat, Δx pedig a statisztikus hiba. Megjegyezzük, hogy Δx értéke természetesen függ attól, hogy mekkora valószínűséggel tartalmazza a valódi értéket a fenti intervallum. A következőkben megmutatjuk, hogyan adhatjuk meg a mérési eredményt a legfontosabb esetekben.

A véletlenszerű ingadozások mértékét a szórással jellemezzük és így a mérési eredmény statisztikus hibájának megadásához is a szórást használjuk fel. A mérési eredmények megadásakor két alapvető esetet különböztetünk meg.

6.1. 1. A σ szórás értéke ismert

Ez az eset gyakran előfordul, amikor a mérőműszer okozza a statisztikus hibát, és a műszer gyártója a σ szórást az adatlapban megadja. A mérési eredmény megadása ekkor a következő alakú:

$$< x >= \bar{x} \pm \lambda\sigma \qquad (2.)$$

Itt $\bar{x}$ a mért adat, λ pedig az előírt valószínűségtől függő szám. λ értékét általános esetben a Csebisev-egyenlőtlenségből adjuk meg, mely szerint annak a valószínűsége, hogy $|<x>-x|<\lambda\sigma$, nagyobb mint $1-1/\lambda^2$. Tehát annak a valószínűsége, hogy az <x> várható érték a mért érték körüli $\lambda\sigma$ sugarú intervallumban helyezkedik el nagyobb, mint $1-1/\lambda^2$:

$$P\left(\left|< x > -\bar{x}\right| < \lambda\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2} \qquad (3.)$$

Általában természetesen a p valószínűség, vagy az $\alpha=1-p$ szignifikanciaszint értékét adjuk meg előre és ebből számítjuk ki λ-t. Például:

$$p = 0.95$$
$$p = 1 - \frac{1}{\lambda^2} \qquad (4.)$$
$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{1-p}} = \sqrt{20}$$

Ha tudjuk, hogy a statisztikus ingadozás normális eloszlású, akkor λ értékét a következő összefüggés adja meg:

$$\lambda = F^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) \qquad (5.)$$

ahol F^{-1} a [0,1] paraméterű normális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze. Egyszerűen juthatunk ehhez az összefüggéshez, ha észrevesszük, hogy

$$p = P\left(\left|< x > - \bar{x}\right| < \lambda\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2} = P\left(\frac{\left|< x > - \bar{x}\right|}{\sigma} < \lambda\right) =$$
$$= \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2F(\lambda) - 1 \qquad (6.)$$

Tudjuk, hogy az <x> várhatóértéket jobban közelíti a több mért adatból kiszámított N középérték, mely a következő formulával adható meg:

$$\overline{x_N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (7.)$$

Természetesen az N mért adatból számított középérték is egy véletlenszerűen ingadozó mennyiség, melynek várható értéke szintén <x>, szórása viszont az eredeti szórás $\sqrt{N}$ -ed része. Ebből következően a mérési eredmény megadása több mért adat esetén a következő alakú:

$$< x > = \overline{x_N} \pm \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{N}} \qquad (8.)$$

Látható tehát, hogy azonos szignifikanciaszint mellett több mérési adat középértékének kiszámításával csökkenthető a mérés statisztikai hibája.

6.2. 2. A szórás értéke ismeretlen

Ha a szórás értékét nem ismerjük, akkor az eddigiek szerint nem is adhatnánk meg a mérési eredményt, mivel nem tudjuk megadni a statisztikus hibát. Ebben az esetben a szórás szerepét a korrigált empirikus szórás veszi át, melyet az x_i mért adatokból számítunk ki a következő formulával:

$$\sigma^*_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x_N}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \qquad (9.)$$

Ha az x fizikai mennyiség normális eloszlású, akkor az

$$\frac{< x > - \overline{x_N}}{\sigma^*_{N-1}} \qquad (10.)$$

mennyiség t-eloszlású ν =N-1 szabadsági fokkal. Ekkor λ helyett t_{N-1}-et használva kapjuk, hogy:

$$p = P\left(\left|<x> - \overline{x}\right| < t_{N-1}\sigma^*_{N-1}\right) = P\left(\frac{\left|<x> - \overline{x}\right|}{\sigma^*_{N-1}} < t_{N-1}\right) = \int_{-t_{N-1}}^{t_{N-1}} p_{t,N-1}(x)dx = 2F_{t,N-1}(t_{N-1}) - 1 \tag{11.}$$

ahol $p_{t,N-1}(x)$ és $F_{t,N-1}(x)$ az N-1 szabadsági fokú t-eloszlás valószínűségi sűrűség- illetve eloszlásfüggvénye.
Innen kapjuk t_{N-1} értékét:

$$t_{N-1} = F^{-1}_{t,N-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) \tag{12.}$$

A mérési eredmény megadása tehát:

$$x = \overline{x_N} \pm \frac{t_{N-1}\sigma^*_{N-1}}{\sqrt{N}} \tag{13.}$$

Vegyük észre, hogy a korrigált empirikus szórás definíciójából következően nem adhatjuk meg a mérési eredményt egyetlen mért adat esetén, mert nullával kellene osztanunk. Ez a tény is jól mutatja, hogy ha a szórás ismeretlen, egyetlen mért adattal nem adható meg a mérés eredménye.

A következőkben összefoglaljuk a mérési eredmény megadását az előzőekben tárgyalt esetekre.

Ha a szórás ismert, és egy mért adatunk van:

$$<x> = \overline{x} \pm \lambda\sigma \tag{14.}$$

Ha a szórás ismert, és N mért adatunk van:

$$<x> = \overline{x_N} \pm \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{N}} \tag{15.}$$

Ha a szórás ismeretlen és N>1 mért adatunk van:

$$<x> = \overline{x_N} \pm \frac{t_{N-1}\sigma^*_{N-1}}{\sqrt{N}} \tag{16.}$$

Megjegyzés: a kiszámolt hibát két vagy három értékes jegyre kell kerekíteni, és a középértéket is ugyanannyi tizedes jegy pontossággal kell feltüntetni.

A következő táblázatok segítséget adnak λ és t_{N-1} értékeinek meghatározásához normális eloszlású, véletlenszerű mérési hiba esetére.

I. Táblázat: λ értékei a p valószínűség illetve α=1-p szignifikanciaszint függvényében normális eloszlás esetére

p α	0.9 0.1	0.95 0.05	0.99 0.01	0.995 0.005	0.999 0.001
λ	1.64521	1.96039	2.57624	2.80739	3.29076

II. Táblázat: t_{N-1} értékei a p valószínűség illetve α=1-p szignifikanciaszint és az N mérési adatok száma, illetve ν =N-1 szabadsági fok függvényében t-eloszlás esetére

N	ν	p=0.9 α=0.1	p=0.95 α=0.05	p=0.99 α=0.01	p=0.995 α=0.005	p=0.999 α=0.001
2	1	6.31370	12.70615	63.65672	127.32133	636.61920
3	2	2.91996	4.30264	9.92477	14.08897	31.59903
4	3	2.35334	3.18244	5.84088	7.45326	12.92393
5	4	2.13183	2.77638	4.60409	5.59755	8.61026
6	5	2.01501	2.57052	4.03211	4.77329	6.86876
7	6	1.94311	2.44685	3.70741	4.31679	5.95875
8	7	1.89453	2.36459	3.49946	4.02927	5.40786
9	8	1.85952	2.30595	3.35537	3.83250	5.04129
10	9	1.83307	2.26215	3.24979	3.68960	4.78089
20	19	1.72913	2.09302	2.86087	3.17372	3.88339
30	29	1.69910	2.04518	2.75634	3.03797	3.65935
40	39	1.68487	2.02268	2.70784	2.97554	3.55810
50	49	1.67653	2.00957	2.67990	2.93970	3.50043
100	99	1.66036	1.98416	2.62640	2.87130	3.39150
150	149	1.65507	1.97597	2.60919	2.84940	3.35701
200	199	1.65254	1.97195	2.60070	2.83867	3.34002

6.3. Példák

1. Tömegmérés mérési adata:

   m=1.21kg

   A szórás ismert, értéke

   σ=0.017kg

   Adjuk meg az α=0.01 szignifikanciaszinthez tartozó mérési eredményt!

p=1-α=0.99
λ=2.57624

Δm=λ*σ=2.57624*0.017kg=0.043796kg≈0.044kg

$$m = \overline{1.2100kg} \pm 0.044kg \qquad (17.)$$

2. Az előző feladatban megadott feltételek mellett hány mérési adatot kell gyűjtenünk ahhoz, hogy a mérés hibája 0.01kg alá csökkenjen?

Δm<0.01kg
$\lambda\sigma/\sqrt{N}$ <0.01kg
N>$(0.043796/0.01)^2$≈19.18

$$N \geq 20 \qquad (18.)$$

3. Egy mérést többször elvégezve kaptuk:

R_1=7.20Ω
R_2=7.19Ω
R_3=7.19Ω
R_4=7.22Ω

$R_5=7.23\Omega$.

Adjuk meg az $\alpha=0.05$ szignifikanciaszinthez tartozó mérési eredményt!

A középérték: $\overline{R_N} = 7.206\Omega$

A korrigált empirikus szórás: $\sigma^*_{N-1} = 0.018166\Omega$

$\alpha=0.05$, $N=5$ ($\nu=4$), így $t_{N-1}=2.77638$

A hiba értéke $\frac{t_{N-1}\sigma^*_{N-1}}{\sqrt{N}} \approx 0.022556\Omega$

$$R = 7.206 \pm 0.023\Omega \qquad (19.)$$

7. A mérési eredmény megadása közvetett mérés esetén. A mérési hiba terjedése

Ha egy fizikai mennyiség függ más fizikai mennyiségektől, azaz q=q(x,y,...), akkor x,y,... mérésével q mérési eredménye is megadható. Ha az x,y,... mennyiségeket kicsi hibával mértük, akkor jó közelítéssel igaz, hogy

$$\Delta q = \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},\, y=\bar{y},\ldots} \Delta x + \left.\frac{\partial q}{\partial y}\right|_{x=\bar{x},\, y=\bar{y},\ldots} \Delta y + \ldots \tag{20.}$$

és

$$\bar{q} = q(\bar{x}, \bar{y}, \ldots) \tag{21.}$$

ahol a felülvonás a középértéket jelöli.

Mivel a szórásnégyzetekre teljesül, hogy

$$\sigma_q^2 = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|^2_{x=\bar{x},\, y=\bar{y},\ldots} \sigma_x^2 + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|^2_{x=\bar{x},\, y=\bar{y},\ldots} \sigma_y^2 + \ldots \tag{22.}$$

így a mérési hibára adódik, hogy

$$\Delta q = \sqrt{\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|^2_{x=\bar{x},\, y=\bar{y},\ldots} \Delta x^2 + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|^2_{x=\bar{x},\, y=\bar{y},\ldots} \Delta y^2 + \ldots} \tag{23.}$$

Ez a képlet alkalmas arra, hogy az x,y,... fizikai mennyiségek középértékének és hibáinak ismeretében meghatározzuk a származtatott q mennyiség középértékét és hibáját.

Egyváltozós függvény esetén a származtatott mennyiség hibáját megadó formula a következőképpen egyszerűsödik:

$$\Delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \Delta x \tag{24.}$$

Példa:

m=3.21kg±0.05kg
v=7.31m/s±0.11m/s

$E=\frac{1}{2}mv^2$

E=?

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\bar{m}\bar{v}^2 = \frac{1}{2}3.21 \cdot 7.31^2\, J \approx 85.7649 J \tag{25.}$$

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{v^2}{2} \qquad \frac{\partial E}{\partial v} = mv \tag{26.}$$

$$\Delta E = \sqrt{\left|\frac{\bar{v}^2}{2}\right|^2 \Delta m^2 + \left|\bar{m}\,\bar{v}\right|^2 \Delta v^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{7.31^4}{4} 0.05^2 + (3.21 \cdot 7.31)^2\, 0.11^2}\; J = \tag{27.}$$

$$\approx 2.906377\; J$$

Az E kinetikus energia mérési eredménye tehát:

$$E = 85.76J \pm 2.91J \tag{28.}$$

8. A legkisebb négyzetek módszere

A mérések elvégzése során gyakran előfordul, hogy két vagy több egymástól függő fizikai mennyiséget mérünk meg. Tegyük fel például, hogy megmértük az y és x mennyiségeket, amelyek között a következő függvénykapcsolat van:

$$y = f(x,a,b,...) \quad , \tag{29.}$$

ahol a,b,... ismeretlen paraméterek. Hogyan határozhatók meg ezek a paraméterek? Mivel az yi és xi mérések során kapott értékek mérési hibával terheltek, ezért nem tudunk olyan a,b,... paramétereket választani, hogy a kapott függvény tökéletesen illeszkedjen a mérési pontokra. Találnunk kell tehát egy feltételt, aminek teljesülése esetén kapott paraméterekkel a legjobbnak ítéljük meg a görbe mérési pontokra való illeszkedését. A paraméterek meghatározására az egyik legegyszerűbb és leggyakrabban alkalmazott eljárás a legkisebb négyzetek módszere.

A legkisebb négyzetek módszere szerint az illeszkedés akkor a legjobb, ha

$$S(a,b,...) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - f(\,x_i\,,a,b,...) \right]^2 = \min . \tag{30.}$$

Itt N a mérési adatpárok száma, xi és yi a mérések során kapott értékek. A paramétereket tehát úgy kell meghatároznunk, hogy a (23) egyenletben szereplő négyzetösszeg minimális legyen.

A (23) egyenlet megoldása általános esetben igen bonyolult szélsőérték keresési problémához vezet. Sok esetre léteznek kidolgozott elméleti és numerikus módszerek. Ezek közül az egyik legegyszerűbb és legfontosabb esetet, az egyenes illesztést ismertetjük. Ebben az esetben az f függvény alakja a következő:

$$y = a \cdot x + b \tag{31.}$$

így tehát olyan a és b paramétereket kell keresnünk, hogy a

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (a \cdot x_i + b) \right]^2 \tag{32.}$$

négyzetösszeg minimális legyen. A szélsőérték helyén az S(a,b) összeg a és b szerinti parciális differenciálhányadosa nulla értéket vesz fel, így jutunk a következő egyenletekhez:

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{N} 2\left[y_i - (a \cdot x_i + b) \right](-x_i) \tag{33.}$$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{N} 2\left[y_i - (a \cdot x_i + b) \right](-1) \tag{34.}$$

Ebből a két egyenletből már kifejezhető a és b értéke:

$$b = \overline{y_N} - a \cdot \overline{x_N} \tag{35.}$$

$$a = \frac{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \overline{x_N} \cdot \overline{y_N}}{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \overline{x_N}^{\,2}} \tag{36.}$$

ahol a felülvonás a középértéket jelöli. Az illeszkedés minőségét szokás az úgynevezett korrelációs együtthatóval vagy annak négyzetével jellemezni, melynek definíciója a következő:

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x_N}\right)\cdot\left(y_i - \overline{y_N}\right)\right]^2}{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x_N}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \overline{y_N}\right)^2} \qquad (37.)$$

R értéke 0 és 1 között található. Tökéletes illeszkedés esetén értéke 1, és minél kisebb a pontok szórása, értéke annál közelebb esik 1-hez.

Fontos megkülönböztetnünk azt az esetet, amikor tudjuk, hogy az egyenesnek át kell mennie az origón - ilyen például az Ohm-törvény esete. A b paraméter értéke ekkor azonosan zérus, és elvi hibát követünk el, ha illesztési paraméterként kezeljük. A legjobb illeszkedés feltétele a következő alakú:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i - a\cdot x_i\right]^2 \qquad (38.)$$

Ebből kapjuk:

$$\frac{dS(a)}{da} = \sum_{i=1}^{N} 2\left(y_i - a\cdot x_i\right)\left(-x_i\right) \qquad (39.)$$

tehát a értéke így adható meg:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \qquad (40.)$$

Az egyenes illesztését ma már célszerűen számítógépen elérhető adatfeldolgozó programok segítségével végezzük el. Ekkor is legyünk figyelemmel arra, hogy az origón átmenő illesztésnél a b paraméter azonosan nulla legyen.

A legkisebb négyzetek módszere alapján nemlineáris illesztés is megvalósítható. Ebben az esetben gyakran súlyozott illesztés végzünk, azaz a következő mennyiség minimumát keressük:

$$S(a,b,\ldots) = \sum_{i=1}^{N} w_i\left[y_i - f(x_i, a, b, \ldots)\right]^2 \qquad (41.)$$

A w_i súlyfaktorok bevezetésére általában azért van szükség, mert nemlineáris görbe széles dinamikatartománnyal rendelkezhet, így a nagyobb értékeknél néhány pont is sokkal nagyobb súllyal szerepel a négyzetösszegben, mint kisebb y_i értékek esetén, így kis értékekre az illeszkedés nem lesz megfelelő. Egyszerű példa erre az exponenciális függvény, ami igen gyakran fordul elő görbeillesztési feladatok során. A w_i súlyfaktorok megválasztása függ az illesztendő görbe alakjától, általában gyakran alkalmazzák a $w_i = 1/y_i^2$ alakot, így tehát a következő mennyiség minimuma keresendő:

$$S(a,b,\ldots) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{y_i^2}\left[y_i - f(x_i, a, b, \ldots)\right]^2 \qquad (42.)$$

Sajnos a nemlineáris illesztéseknél nem kapunk analitikus összefüggést a paraméterekre, így az illesztést numerikus, iterációk segítségével végezzük el. Az iterációhoz meg kell adnunk a paraméterek becsült, kiindulási értékét, a szükséges pontosságot, és néha még más feltételeket is, melyek segítségével elkerülhető, hogy az iteráció divergáljon.