A mérési eredmény megadása

A mérés során kapott értékek eltérnek a mérendő fizikai mennyiség valódi értékétől. Alapvetően kétféle mérési hibát különböztetünk meg: a determinisztikus és a véletlenszerű hibát. A determinisztikus hiba nagysága elvileg meghatározható, ezért ezt a hibafajtát sok esetben korrigálhatjuk. Egészen más a helyzet a statisztikus hiba esetén, amikor a hiba véletlenszerű, tehát nagyságát, de még előjelét sem tudjuk megjósolni. Mivel a determinisztikus hiba kompenzálható, ezért a következőkben a statisztikus hiba kezelésével foglalkozunk.

A mérési eredmény a mérési adatok és a hiba nagyságának ismeretében adható meg, a hiba ismerete nélkül a mérési adat önmagában elégtelen információt ad. Statisztikus hiba esetén a mérés hibájához csak valószínűségi értelmezést adhatunk, tehát azt mondjuk, hogy a valódi érték - amit az $\langle x \rangle$ várhatóértékkel azonosítunk - nagy valószínűséggel esik az úgynevezett megbízhatósági (konfidencia) intervallumba:

$$\bar{x} \pm \Delta x \qquad \textbf{(1)}$$

Itt $\bar{x}$ a mért adat, Δx pedig a statisztikus hiba. Megjegyezzük, hogy Δx értéke természetesen függ attól, hogy mekkora valószínűséggel tartalmazza a valódi értéket a fenti intervallum. A következőkben megmutatjuk, hogyan adhatjuk meg a mérési erdeményt a legfontosabb esetekben.

A véletlenszerű ingadozások mértékét a szórással jellemezzük és így a mérési eredmény statisztikus hibájának megadásához is a szórást használjuk fel. A mérési eredmények megadásakor két alapvető esetet különböztetünk meg.

1. A σ szórás értéke ismert

Ez az eset gyakran előfordul, amikor a mérőműszer okozza a statisztikus hibát, és a műszer gyártója a szórást az adatlapban megadja. A mérési eredmény megadása ekkor a következő alakú:

$$\langle x \rangle = \bar{x} \pm \lambda\sigma \qquad \textbf{(2)}$$

Itt $\bar{x}$ a mért adat, λ pedig az előírt valószínűségtől függő szám. λ értékét általános esetben a Csebisev-egyenlőtlenségből adjuk meg, mely szerint annak a valószinusége, hogy $|\langle x \rangle - \bar{x}| < \lambda\sigma$, nagyobb mint $1-1/\lambda^2$. Tehát annak a valószínűsége, hogy az $\langle x \rangle$ várható érték a mért érték körüli $\lambda\sigma$ sugarú intervallumban helyezkedik el nagyobb, mint $1-1/\lambda^2$:

$$P(|\langle x \rangle - x| < \lambda\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Általában természetesen a p valószínűség, vagy az $\alpha=1-p$ **szignifikanciaszint** értékét adjuk meg előre és ebből számítjuk ki λ-t. Például:

$$p=0.95$$
$$p=1-\frac{1}{\lambda^2}$$
$$\lambda=\sqrt{\frac{1}{1-p}}=\sqrt{20} \tag{4}$$

Ha tudjuk, hogy a statisztikus ingadozás **normális eloszlású**, akkor λ értékét a következő összefüggés adja meg:

$$\lambda = F^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) \tag{5}$$

ahol F^{-1} a [0,1] paraméterű normális eloszlás eloszlásfüggvényének inverze. Egyszerűen juthatunk ehhez az összefüggéshez, ha észrevesszük, hogy

$$p = P(|\langle x\rangle-\overline{x}|<\lambda\sigma) = P\left(\frac{|\langle x\rangle-\overline{x}|}{\sigma}<\lambda\right) = \\ =\int_{-\lambda}^{\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2F(\lambda)-1 \tag{6}$$

Tudjuk, hogy az <x> várhatóértéket jobban közelíti a több mért adatból kiszámított $\overline{x}_N$ középérték, mely a következő formulával adható meg:

$$\overline{x_N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{7}$$

Természetesen az N mért adatból számított középérték is egy véletlenszerűen ingadozó mennyiség, melynek várható értéke szintén <x>, szórása viszont az eredeti szórás $\sqrt{N}$-ed része. Ebből következően a mérési eredmény megadása több mért adat esetén a következő alakú:

$$\langle x\rangle = \overline{x_N}\pm\frac{\lambda\sigma}{\sqrt{N}} \tag{8}$$

Látható tehát, hogy azonos szignifikanciaszint mellett több mérési adat középértékének kiszámításával csökkenthető a mérés statisztikai hibája.

2. A szórás értéke ismeretlen

Ha a szórás értékét nem ismerjük, akkor az eddigiek szerint nem is adhatnánk meg a mérési eredményt, mivel nem tudjuk megadni a statisztikus hibát. Ebben az esetben a szórás szerepét a korrigált empirikus szórás veszi át, melyet az x_i mért adatokból számítunk ki a következő formulával:

$$\sigma^*_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x}_N\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2} \qquad \textbf{(9)}$$

Ha az x fizikai mennyiség normális eloszlású, akkor az

$$\frac{\langle x\rangle-\overline{x}_N}{\sigma^*_{N-1}} \qquad \textbf{(10)}$$

mennyiség t-eloszlású ν=N-1 szbadsági fokkal. Ekkor λ helyett t_{N-1}-et használva kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} p &= P\left(\left|\langle x\rangle-\overline{x}\right|<t_{N-1}\sigma^*_{N-1}\right) = P\left(\frac{\left|\langle x\rangle-\overline{x}\right|}{\sigma^*_{N-1}}<t_{N-1}\right) = \\ &= \int_{-t_{N-1}}^{t_{N-1}} p_{t,N-1}(x)\,dx = 2F_{t,N-1}(t_{N-1})-1 \end{aligned} \qquad \textbf{(11)}$$

ahol $p_{t,N-1}(x)$ és $F_{t,N-1}(x)$ az N-1 szabadsági fokú t-eloszlás valószínűségi sűrűség- illetve eloszlásfüggvénye.
Innen kapjuk t_{N-1} értékét:

$$t_{N-1} = F^{-1}_{t,N-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) \qquad \textbf{(12)}$$

A mérési eredmény megadása tehát:

$$\langle x\rangle = \overline{x_N}\pm\frac{t_{N-1}\sigma^*_{N-1}}{\sqrt{N}} \qquad \textbf{(13)}$$

Vegyük észre, hogy a korrigált empirikus szórás definíciójából következően nem adhatjuk meg a mérési eredményt egyetlen mért adat esetén, mert nullával kellene osztanunk. Ez a tény is jól mutatja, hogy ha a szórás ismeretlen, egyetlen mért adattal nem adható meg a mérés eredménye.

A következőkben összefoglaljuk a mérési eredmény megadását az előzőekben tárgyalt esetekre.

Ha a szórás ismert, és egy mért adatunk van:

$$\langle x \rangle = \bar{x} \pm \lambda\sigma \qquad \textbf{(14)}$$

Ha a szórás ismert, és N mért adatunk van:

$$\langle x \rangle = \overline{x_N} \pm \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{N}} \qquad \textbf{(15)}$$

Ha a szórás ismeretlen és N≥2 mért adatunk van:

$$\langle x \rangle = \overline{x_N} \pm \frac{t_{N-1}\sigma^{*}_{N-1}}{\sqrt{N}} \qquad \textbf{(16)}$$

Megjegyzés: *a kiszámolt hibát két vagy három értékes jegyre kell kerekíteni, és a középértéket is ugyanannyi tizedesjegy pontossággal kell feltüntetni.*

A következő táblázatok segítséget adnak λ és t_{N-1} értékeinek meghatározásához normális eloszlású, véletlenszerű mérési hiba esetére.

I. Táblázat: λ értékei a p valószínűség illetve α=1-p szignifikanciaszint függvényében normális eloszlás esetére

p α	0.9 0.1	0.95 0.05	0.99 0.01	0.995 0.005	0.999 0.001
λ	1.64521	1.96039	2.57624	2.80739	3.29076

II. Táblázat: t_{N-1} értékei a p valószínűség illetve α=1-p szignifikanciaszint és az N mérési adatok száma, illetve ν=N-1 szabadsági fok függvényében t-eloszlás esetére

N	ν	p=0.9 α=0.1	p=0.95 α=0.05	p=0.99 α=0.01	p=0.995 α=0.005	p=0.999 α=0.001
2	1	6.31370	12.70615	63.65672	127.32133	636.61920
3	2	2.91996	4.30264	9.92477	14.08897	31.59903
4	3	2.35334	3.18244	5.84088	7.45326	12.92393
5	4	2.13183	2.77638	4.60409	5.59755	8.61026
6	5	2.01501	2.57052	4.03211	4.77329	6.86876
7	6	1.94311	2.44685	3.70741	4.31679	5.95875
8	7	1.89453	2.36459	3.49946	4.02927	5.40786
9	8	1.85952	2.30595	3.35537	3.83250	5.04129
10	9	1.83307	2.26215	3.24979	3.68960	4.78089
20	19	1.72913	2.09302	2.86087	3.17372	3.88339
30	29	1.69910	2.04518	2.75634	3.03797	3.65935
40	39	1.68487	2.02268	2.70784	2.97554	3.55810
50	49	1.67653	2.00957	2.67990	2.93970	3.50043
100	99	1.66036	1.98416	2.62640	2.87130	3.39150
150	149	1.65507	1.97597	2.60919	2.84940	3.35701
200	199	1.65254	1.97195	2.60070	2.83867	3.34002

Példák

1. Tömegmérés mérési adata:
   $m=1.21kg$
   A szórás ismert, értéke
   $\sigma=0.017kg$
   Adjuk meg az $\alpha=0.01$ szignifikanciaszinthez tartozó mérési eredményt!

$p=1-\alpha=0.99 \Rightarrow \lambda=2.57624$

$\Delta m=\lambda*\sigma=2.57624*0.017kg=0.043796kg \sim 0.044kg$

$$m = 1.2100kg \pm 0.044kg \tag{17}$$

---

2. Az előző feladatban megadott feltételek mellett hány mérési adatot kell gyűjtenünk ahhoz, hogy a mérés hibája 0.01kg alá csökkenjen?

$\Delta m<0.01kg \Rightarrow \lambda\sigma/\sqrt{N}<0.01kg \Rightarrow N>(0.043796/0.01)^2$

$$N \geq 20 \tag{18}$$

---

3. Egy mérést többször elvégezve kaptuk:
   $R_1=7.20\Omega$, $R_2=7.19\Omega$, $R_3=7.19\Omega$, $R_4=7.22\Omega$, $R_5=7.23\Omega$.
   Adjuk meg az $\alpha=0.05$ szignifikanciaszinthez tartozó mérési eredményt!

Középérték: 7.206Ω

Korrigált empirikus szórás: 0.018166Ω

$\alpha=0.05$, $N=5$ $(\nu=4)$ $\Rightarrow$ $t_{N-1}=2.77638$

Hiba: $t_{N-1}*\sigma^*_{N-1}/\sqrt{N} \sim 0.022556\Omega$

$$R = 7.206\Omega \pm 0.023\Omega \tag{19}$$

A mérési eredmény megadása közvetett mérés esetén
A mérési hiba terjedése

Ha egy fizikai mennyiség függ más fizikai mennyiségektől, azaz q=q(x,y,...), akkor x,y,... mérésével q mérési eredménye is megadható. Ha az x,y,... mennyiségeket kicsi hibával mértük, akkor jó közelítéssel igaz, hogy

$$\Delta q = \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{y},...} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial q}{\partial y}\right|_{\bar{x},\bar{y},...} \cdot \Delta y + ... \qquad \textbf{(20)}$$

és

$$\bar{q} = q(\bar{x},\bar{y},...) \qquad \textbf{(21)}$$

ahol a felülvonás a középértéket jelöli.

Mivel a szórásnégyzetekre teljesül, hogy

$$\sigma_q^2 = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|^2_{\bar{x},\bar{y},...} \sigma_x^2 + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|^2_{\bar{x},\bar{y},...} \sigma_y^2 + ... \qquad \textbf{(22)}$$

így a mérési hibára adódik, hogy

$$\Delta q = \sqrt{\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|^2_{\bar{x},\bar{y},...} \Delta x^2 + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|^2_{\bar{x},\bar{y},...} \Delta y^2 + ...} \qquad \textbf{(23)}$$

Ez a képlet alkalmas arra, hogy az x,y,... fizikai mennyiségek középértékének és hibáinak ismeretében meghatározzuk a származtatott q mennyiség középértékét és hibáját.

Egyváltozós függvény esetén a szárármaztatott mennyiség hibáját megadó formula a következőképpen egyszerűsödik:

$$\Delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right|_{\bar{x}} \Delta x \qquad \textbf{(24)}$$

Példa:

m=3.21kg±0.05kg
v=7.31m/s±0.11m/s

E=1/2mv^2
E=?

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\overline{m}\overline{v}^2 = \frac{1}{2}3.21 \cdot 7.31^2\ J \approx 85.7649\,J \qquad \textbf{(25)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{v^2}{2} \qquad \frac{\partial E}{\partial v} = mv \qquad \textbf{(26)}$$

$$\Delta E = \sqrt{\left|\frac{\overline{v}^2}{2}\right|^2 \Delta m^2 + |\overline{m}\overline{v}|^2 \Delta v^2} = \sqrt{\frac{7.31^4}{4}0.05^2 + (3.21 \cdot 7.31)^2 0.11^2}\,J = \approx 2.906377\,J \qquad \textbf{(27)}$$

Az E kinetikus energia mérési eredménye tehát:

$$\boxed{E = 85.76\,J \pm 2.91\,J} \qquad \textbf{(28)}$$

A legkisebb négyzetek módszere

A mérések elvégzése során gyakran előfordul, hogy két vagy több egymástól függő fizikai mennyiséget mérünk meg. Tegyük fel például, hogy megmértük az y és x mennyiségeket, amelyek között a következő függvénykapcsolat van:

$$y = f(x, a, b, ...) \quad , \tag{29}$$

ahol a,b,... ismeretlen paraméterek. Hogyan határozhatók meg ezek a paraméterek? Mivel az y_i és x_i mérések során kapott értékek mérési hibával terheltek, ezért nem tudunk olyan a,b,... paramétereket választani, hogy a kapott függvény tökéletesen illeszkedjen a mérési pontokra. Találnunk kell tehát egy feltételt, aminek teljesülése esetén kapott paraméterekkel a legjobbnak ítéljük meg a görbe mérési pontokra való illeszkedését. A paraméterek meghatározására az egyik legegyszerűbb és leggyakrabban alkalmazott eljárás a legkisebb négyzetek módszere.

A legkisebb négyzetek módszere szerint az illeszkedés akkor a legjobb, ha

$$S(a, b, ...) = \sum_{i=1}^{N} [y_i - f(x_i, a, b, ...)]^2 = \min. \tag{30}$$

Itt N a mérési adatpárok száma, x_i és y_i a mérések során kapott értékek. A paramétereket tehát úgy kell meghatároznunk, hogy a (23) egyenletben szereplő négyzetösszeg minimális legyen.

A (23) egyenlet megoldása általános esetben igen bonyolult szélsőértékkeresési problémához vezet. Sok esetre léteznek kidolgozott elméleti és numerikus módszerek. Ezek közül az egyik legegyszerűbb és legfontosabb esetet, az egyenesillesztést ismertetjük. Ebben az esetben az f függvény alaja a következő:

$$y = a \cdot x + b \tag{31}$$

így tehát olyan a és b paramétereket kell keresnünk, hogy a

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (a \cdot x_i + b)]^2 \tag{32}$$

négyzetösszeg minimális legyen. A szélsőérték helyén az S(a,b) összeg a és b szerinti parciális differenciálhányadosa nulla értéket vesz fel, így jutunk a következő egyenletekhez:

$$\frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{N} 2 \cdot [y_i - (a \cdot x_i + b)] \cdot (-x_i) = 0 \tag{33}$$

$$\frac{\partial S(a,b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{N} 2\cdot [y_i-(a\cdot x_i+b)]\cdot(-1) = 0 \qquad \textbf{(34)}$$

Ebből a két egyenletből már kifejezhető a és b értéke:

$$a = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot y_i-\overline{x_N}\cdot\overline{y_N}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2-\overline{x_N}^2} \qquad \textbf{(35)}$$

$$b=\overline{y_N}-a\cdot\overline{x_N} \qquad \textbf{(36)}$$

ahol a felülvonás a középértéket jelöli. Az illeszkedés minőségét szokás az úgynevezett korrelációs együtthatóval vagy annak négyzetével jellemezni, melynek definíciója a következő:

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N}(x-\overline{x_N})(y-\overline{y_n})\right]^2}{\sum_{i=1}^{N}(x-\overline{x_N})^2\sum_{i=1}^{N}(y-\overline{y_N})^2}$$

R értéke 0 és 1 között található. Tökéletes illeszkedés esetén értéke 1, és minél kisebb a pontok szorása, értéke annál közelebb esik 1-hez.

Fontos megkülönböztetnünk azt az esetet, amikor tudjuk, hogy az egyenesnek át kell mennie az origón - ilyen például az Ohm-törvény esete. A b parameter értéke ekkor azonosan zérus, és elvi hibát követünk el, ha illesztési paraméterként kezeljük. A legjobb illeszkedés feltétele a következő alakú:

$$S(a) = \sum_{i=1}^{N}[y_i-a\cdot x_i]^2 \qquad \textbf{(38)}$$

Ebből kapjuk:

$$\frac{dS(a)}{da} = \sum_{i=1}^{N} 2\cdot(y_i-a\cdot x_i)\cdot(-x_i) = 0 \qquad \textbf{(39)}$$

tehát a értéke így adható meg:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \qquad \textbf{(40)}$$

Az egyenes illesztését ma már célszerűen számítógépen elérhető adatfeldolgozó programok segítségével végezzük el. Ekkor is legyünk figyelemmel arra, hogy az origon atmenő illesztésnél a b paraméter azonosan nulla legyen.