A mintavételezéses mérések alapjai

Sok mérési feladat során egy fizikai mennyiség időbeli változását kell meghatároznunk. Ha a folyamat lassan változik, akkor adott időpillanatokban elvégzett méréssel kapjuk meg az időfüggést. Ha a folyamat gyorsan változik, akkor olyan eszközre van szükség, ami rövid idő alatt sok elemi mérés elvégzésére és a mért adatok tárolására alkalmas.

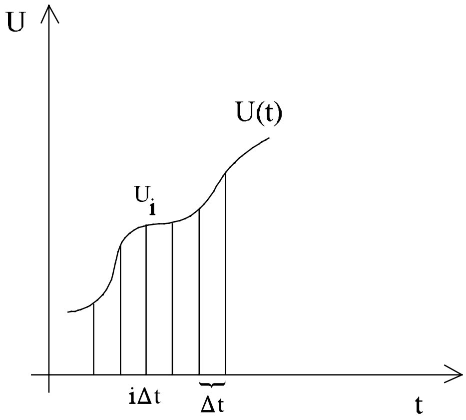
Ha a folyamat periodikusan változik, akkor a mérést katódsugár oszcilloszkóppal végezhetjük el. Sok esetben azonban a jel nem periodikus, ekkor tároló oszcilloszkópra van szükség.

A gyakorlatban sokféle tároló oszcilloszkóp létezik. A tároló oszcilloszkóp analóg-digitál konverter felhasználásával is megvalósítható. A következőkben az időfüggő jelek mérésének alapelveit tekintjük át.

Tegyük fel, hogy egy U(t) feszültség időfüggését úgy rögzítjük, hogy Δt időközönként megmérjük a jelet. Az így kapott, időben diszkrét jelet mintavételezett jelnek nevezzük, és a következő formulával adjuk meg

$$U_M(t) = \Delta t \sum_i U_i \cdot \delta(t - i \cdot \Delta t) \qquad \textbf{(1)}$$

ahol $U_i=U(t_o+i\Delta t)$, t_o a mérés kezdetének időpontja, δ a Dirac-függvény. A mérés során tehát az U_i feszültégsorozatot kapjuk, amik az U(t) feszültség $t_o+i\Delta t$ időpillanatokban felvett értékeinek felelnek meg.



Mikor reprezentálja $U_M(t)$ megfelelően az U(t) feszültséget? Ha Δt elegendően kicsi, akkor az U(t) jel Δt idő alatt keveset változik, és ekkor U_M láthatóan jól közelítheti U-t, de két mérési időpontbeli értékről ekkor is keveset tudunk. Mekkorának válasszuk Δt értékét egy adott U(t) jel mérése során? Van-e lehetőség arra, hogy két időpillanat közötti értéket is pontosan megkaphassuk a mintavételezett adatsor felhasználásával? Ezekre a kérdésekre a információelmélet egyik fontos tétele, a mintavételi tétel ad választ.

A tétel ismertetése előtt vizsgáljuk meg az U(t) jelre vonatkozó Fourier-transzformációs párt

$$U(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \qquad \textbf{(2)}$$

A képletekben szeperlő U(ω) függvényt az U(t) függvény Fourier-transzformáltjának nevezzük. Ha az U(t) jel periodikus T periódusidővel, akkor az integrál helyett összeget kapunk

$$U(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{i\omega_k t}, \qquad \textit{ahol} \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T} \tag{3}$$

A (2) formulában szereplő folytonos U(ω) függvény szerepét itt az a k-adik körfrekvenciához tartozó U_k Fourier-komponens veszi át.

A (2) és (3) formulák azt jelentik, hogy az U(t) jelet periodikus, szinuszos jelek összegeként fogjuk fel. Az összegben olyan ω és ω_k körfrekvenciáju periodikus tagok vannak, melyek amplitúdóját és fázisát a komplex U(ω) és U_k mennyiségek határozzák meg.

A mintavételi tétel szerint, ha U(t) Fourier-felbontásában egy f_o frekvenciánál nagyobb frekvenciákhoz tartozó tagok amplitúdója nulla, akkor a jel *információvesztés nélkül* repzenetálható $\Delta t=1/2f_o$ időközönként vett mintáival. A tétel szerint tehát ebben az esetben az $U_M(t)$ mintavételezett jel egyértelműen meghatározza az U(t) függvényt, még azon t időpontokban is, ahol nem történt mintavételezés. Az U(t) jelet az alábbi formulával kapjuk

$$U(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} U\left(\frac{i}{2f_o}\right) \frac{\sin\, \pi 2f_o\left(t-\frac{i}{2f_o}\right)}{\pi 2f_o\left(t-\frac{i}{2f_o}\right)} \tag{4}$$

Legegyszerűbb azt szemléltetni, hogy hiba történik akkor, ha nem tartjuk be a mintavételi tételt. Tegyük fel például, hogy egy f frekvenciájú szinuszos jelet mérünk f_m mintatételi frekvenciával, tehát $1/f_m$ időközönként, amire teljesül a tétel feltétele, tehát $f<f_m/2$. Ekkor a mintavételezés során a következő Ui adatokat kapjuk

$$U_i = \sin(2\pi f t_i) = \sin\left(2\pi f \frac{i}{f_m}\right)$$

Mit kapunk akkor ha például f+fm frekvenciájú jelet mérünk? Erre már biztosan nem teljesül a mintavételi tétel, hiszen $f+f_m > f_m/2$. Egyszerűen behelyettesítve az előbbi formulába

$$U_i=\sin(2\pi(f+f_m)\frac{i}{f_m})=\sin(2\pi f\frac{i}{f_m}+2\pi i)$$

Ez viszont teljesen azonos az előző adatsorral. Ugyanígy az összes f+k*fm (k egész szám) frekvenciájú jelre is azonos adatsort kapunk. Ebből következően például 10kHz mintavételi frekvencia esetén nem tudunk különbséget tenni az 1kHz, 11kHz, 21kHz frekvenciájú jelek között.

Hasonlóan megállapíthatjuk, hogy az $f+(k+1/2)f_m$ (k=0,1,2,..) frekvenciájú jeleket mind $f_m/2-f$ frekvenciájúnak mérjük. Az is következik az elmondottakból, hogy az $f_m/2$-nél nagyobb frekvenciájú tagok amplitúdója hozzáadódik az $f_m/2$-nél kisebb frekvenciájú tagok amplitúdójához. Az előbb említett példánál a 11kHz-es komponens amplitúdója hozzá fog adódni az 1kHz-es jel amplitúdójához.

A mintavételi tétel ad lehetőséget arra, hogy A/D konverterrel végzett mintavételezéses méréssel határozzuk meg egy jel időfüggését. Ahhoz, hogy Δt értékét meghatározhassuk, ismernünk kellene a mérendő jelben található legnagyobb frekvenciát. Ha nem tudjuk biztosan ezt a frekvenciát, akkor egy olyan aluláteresztő szűrőt (antialiasing filter) kell használnunk, ami egy adott f_o-nál nagyobb frekvenciájú tagokat a jelből kiszűri. Egy ideális szűrő az f_o-nál nagyobb frekvenciájú komponenseket tökéletesen átengedi, a nagyobbakat pedig tökéletesen kiszűri. A valóságban ilyen szűrő nem létezik, de elég nagy pontossággal közelíthető. Egy további probléma, hogy a szűrő az áteresztő tartományban valamennyire módosítja a jelek fázisát is, tehát egy adott frekvenciájű szinuszos jel a szűrő után valamennyi fáziskéséssel jelenik meg, ráadásul ez a késés függ a frekvenciától is. Tudnunk kell, hogy a szűrés befolyásolja a jelalakot akkor, ha az eredeti jel tartalmaz f_o-nál nagyobb frekvenciájú komponenseket, tehát csak a kisebb frekvenciájú komponensekről kaphatunk csak információt a mérés során. Ez természetesen információvesztést jelent, de csak a nagyobb frekvenciájú komponensekre vonatkozóan.

Egyszerű példát lehet hozni az emlitettekre egy periodikus négyszögjel mérésével. Ha nem használunk szűrőt, akkor megsértjük a mintavételi tételt, mivel a négyszögjel tartalmaz nagyfrekvenciás tagokat is, a mérés során mégis szép szabályos négyszögalakot kapunk. Ha azonban spektrális analízist végzünk, nem kapunk helyes eredményt. Ha használunk szűrőt, akkor viszont valamennyire torzulni fog a jelalak, és így helytelen eredményt kapnánk például egy amplitúdo-eloszlás vizsgálatra. Ha tehát egy jel tartalmaz olyan frekvenciájű komponenseket, amelyekre már nem tudjuk teljesíteni a mintavételi tételt a mintavételi idő megválasztásával (mert nem tdunk rövidebb időt választani), akkor szükségszerűen információt vesztünk. Természetesen az szükséges, hogy az információvesztés kicsi mértékű legyen a számunkra érdekes mennyiség mérésének szempontjából. Jó példa erre a hangfrekvenciás jelek digitalizálása. Itt egy igen nagy szelektivitású szűrőt használnak a mérés során, kb. 44kHz mintavételi frekvencia mellett. Igy csak a 20kHz feletti komponenseket veszítjük el, ami nem probléma, mivel a fül ezeket a frekveciákat már nem hallja, ezért nem okoz problémát az információvesztés. A hang visszaállítása szempontjából elenyészően kevés információ veszik csak el.

Egy másik probléma az hogy a jel egy időpillanatbeli értékének A/D konverterrel végzett digitalizálása időt vesz igénybe. A konverzió ideje alatt a jelnek nem szabad jelentősen valtozni, mert ekkor hiba történhet a konverzió során. Ezt a problémát az úgynevezett mintavevő-tartó oldja meg, azáltal, hogy a konverzió befejezéséig tárolja azt az U értéket, ami a konverzió kezdeti időpontjához tartozik.