Sugárzási folyamatok az asztrofizikában

Dr. Vinkó József
SZTE Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék

1. Bevezetés

2. Sugárzási folyamatok atomfizikája

2.1. Alapfogalmak

2.2. Hőmérsékleti sugárzás, Planck-formula

3. Termikus sugárzási folyamatok

3.1. Kötött-kötött átmenetek, NLTE

3.2. Kötött-szabad átmenetek, fotoionizáció, radiatív rekombináció

3.3. Szabad-szabad átmenetek, fékezési sugárzás, Thompson-szórás

4. Nem termikus sugárzási folyamatok

4.1. Fékezési sugárzás (Bremsstrahlung)

4.2. Szinkrotron-sugárzás

4.3. Compton-szórás, inverz Compton-effektus

5. A sugárzás terjedése asztrofizikai közegekben

5.1. Alapfogalmak

5.2. A transzferegyenlet

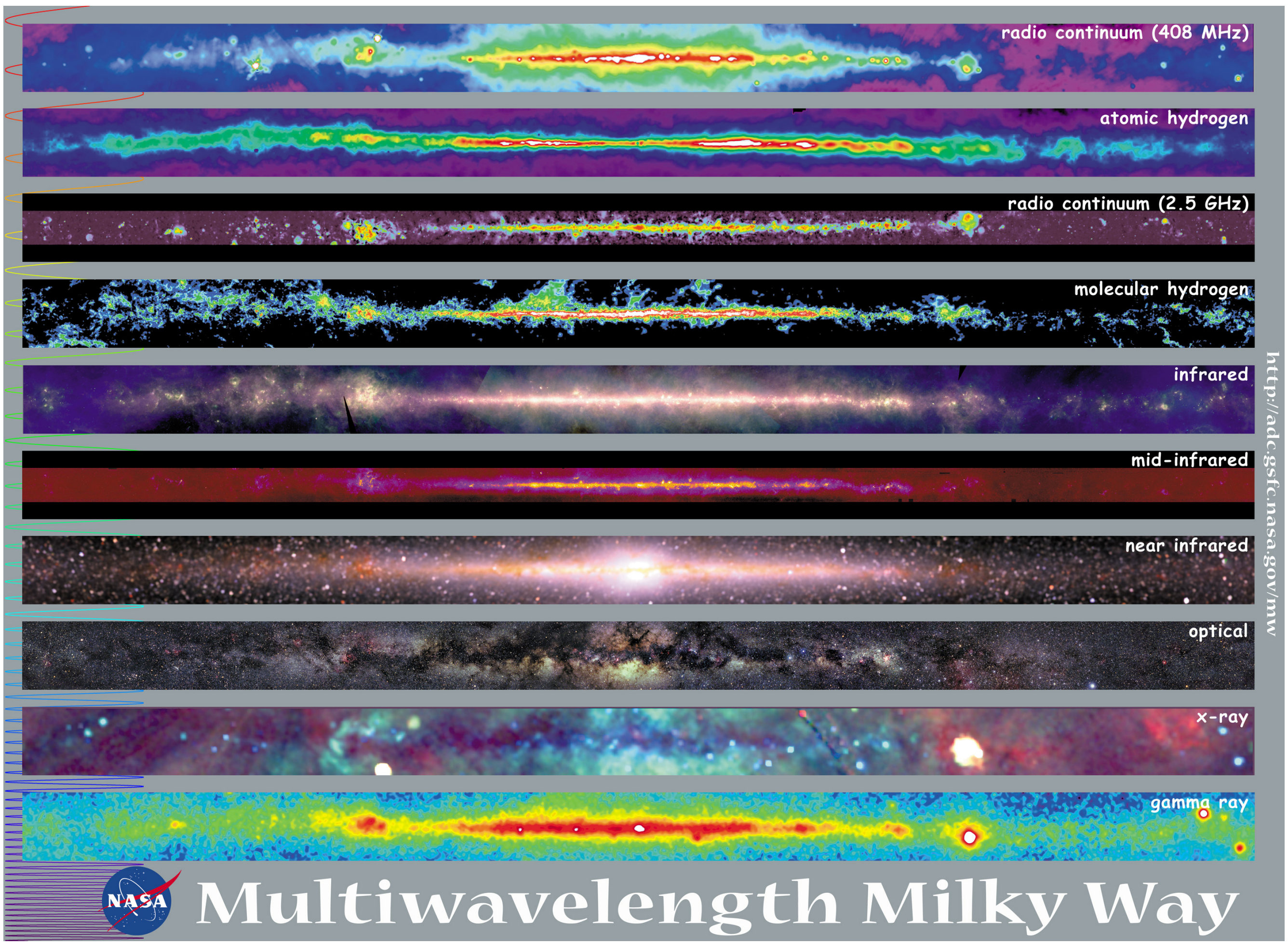
5.3. A transzferegyenlet megoldásai

5.4. A szórás szerepe

5.5. A csillagközi por hatása a megfigyelésekre

1. Bevezetés

Az Naprendszer határain kívüli univerzum felépítéséről, a benne zajló fizikai folyamatokról szinte kizárólag elektromágneses sugárzás megfigyelésével szerezhetünk információt. A kevés kivétel közé tartozik a kozmikus sugárzás, amely nagy energiájú töltött részecskék formájában érkezik a Földre, illetve a neutrínósugárzás, amely ugyan igen jelentős mennyiségű, viszont detektálása rendkívül nehéz és körülményes. Ezekhez képest az elektromágneses hullámok (fotonok) detektálása lényegesen könnyebb. A 20. század második felében kifejlesztett földfelszíni távcsőhálózat, valamint az űrbe helyezett távcsövek és detektorok segítségével az emberiség képessé vált az Univerzum távoli vidékeinek megfigyelésére a teljes elektromágneses színképtartományban, a gammasugárzástól kezdve a röntgen-, ultraibolya-, látható- és infravörös tartományokon át egészen a rádióhullámokig (1. ábra).



1. ábra: A Tejútrendszer különböző hullámhosszakon (forrás: http://mwmw.gsfc.nasa.gov/mmw_images.html, Copyright: NASA)

Elektromágneses sugárzás sokféle különböző fizikai folyamatban jöhet létre. Emellett a kisugárzott fotonok a földi megfigyelő műszerekig megtett hosszú út során számos hatásnak vannak kitéve: szóródhatnak, elnyelődhetnek, újra kisugárzódhatnak. Ezért annak megértéséhez, hogy tulajdonképpen mit is látunk, a sugárzást keltő és befolyásoló fizikai folyamatok minél pontosabb megismerésére van szükség. A jelen tananyag ezt a célt szolgálja.

2. Sugárzási folyamatok asztrofizikája

2.1. Alapfogalmak

Atomokból álló közegben a sugárzás keltésének egyik fő forrása az atomok elektronátmenete. A kvantummechanika értelmében sugárzás keltésével járó átmenet csakis olyan elektron-sajátállapotok között jöhet létre, melyek kvantummechanikai paraméterei (kvantumszámai) között sajátos kapcsolat áll fent: ezek a kiválasztási szabályok. A kiválasztási szabályoknak megfelelő átmeneteket *megengedett átmenet*eknek nevezzük -- ilyen átmenet esetén dipólsugárzás keletkezik. A kiválasztási szabályoknak nem megfelelő átmenet is létrejöhet, de az előzőhöz képes sokkal kisebb valószínűséggel: az ilyen *tiltott átmenet*ek során keletkező sugárzásnak nincs dipól komponense, csupán a multipól-sorfejtés magasabb rendű tényezői jelennek meg benne. A tiltott átmenetek olyan kis valószínűségűek, hogy laboratóriumi körülmények között gyakorlatilag sosem mennek végbe. A csillagközi tér igen kis sűrűségű, de rendkívül nagy méretű közegeiben azonban lejátszódhatnak: jó példa erre a semleges H-atom 21 cm-es hullámhosszú rádiósugárzása, amely az alapállapotú H-atomban az elektron két spinállapota közti átmenet során jön létre.

Összefoglaló néven az atomi elektronátmenetek során létrejövő sugárzást *kötött-kötött emisszió*nak (bound-bound emission) nevezzük, utalva az elektron kötött állapotára. Emisszió esetén a kiinduló állapot a magasabb energiájú, és a keletkező foton energiája a két energiaszint különbsége lesz:

$$E_\gamma = h \cdot \nu = E_f - E_a \qquad (2.1)$$

ahol E_f a felső E_a az alsó szint energiája, ν a sugárzás frekvenciája, h a Planck állandó. Természetesen a folyamat fordítottja is végbemehet, ekkor *kötött-kötött abszorpció*ról beszélünk. Ezen folyamatok további részleteiről a 3.1. fejezetben olvashatunk.

Amikor az átmenet során az egyik állapot nem kötött, akkor *kötött-szabad* (bound-free), ill. *szabad-kötött átmenetek* (free-bound transitions) mennek végbe. Ilyenek tipikusan a fonon elnyelésével járó fotoionizáció, és a fotont keltő radiatív rekombináció. Ezeket a folyamatokat tárgyalja a 3.2. fejezet.

A szabad töltések, általában elektronok által keltett sugárzások a *szabad-szabad átmenetek* során jönnek létre. Ilyenek pl. a fékezési sugárzás, vagy a Thompson-szórás, melyeket a 3.3 fejezet mutat be részletesebben. A szabad, gyorsuló töltésekből származó sugárzás egyéb folyamatai a 4. fejezetben találhatóak.

2.2. Hőmérsékleti sugárzás, Planck-formula

Hőmérsékleti sugárzásról akkor beszélünk, ha egy adott T hőmérsékletű közegben időegység alatt keletkező sugárzási energia pont egyenlő az elnyelődő energiával. Ekkor a sugárzás és az atomokból álló közeg dinamikus egyensúlyba kerül, és mindkettő ugyanazon T hőmérséklettel jellemezhető.

Tekintsük azt az egyszerűsített esetet, amikor az atomok csupán két energiaszinttel rendelkeznek (ez a *kétszintű atommodell*, amit gyakran alkalmaznak a sugárzás és az anyag kölcsönhatásának egyszerűsített tárgyalásában)! Legyen az alsó szint (alapállapot) energiája Ei, a felsőé (gerjesztett állapot) Ej, és jelölje a ν = Ej - Ei / h frekvenciájú fotonok energiasűrűségét u_ν . Az alsó szinten lévő atomok koncentrációjának (populációjának) megváltozása háromféle módon történhet: abszorpció, spontán emisszió, vagy indukált emisszió révén:

$$\frac{dN_i}{dt} = -N_i u_\nu B_{ij} + N_j A_{ji} + N_j u_\nu B_{ji} \tag{2.2}$$

ahol Ni az alsó, Nj a felső energiaszinten lévő atomok koncentrációja, az A és B együtthatók pedig az egyes folyamatok Einstein-féle valószínűségét jelölik: Aji a spontán emisszió, Bij az abszorpció, Bji az indukált emisszió valószínűsége. Látható, hogy ez utóbbi két folyamat függ a beeső sugárzás energiasűrűségétől is, míg a spontán emisszió természetszerűen nem. Egyszerűen belátható, hogy ugyanez a differenciálegyenlet írja le a felső szint populációjának időfüggését is egy -1 szorzóval a jobb oldalon.

Egyensúlyban $dN_i/dt=0$. Ebben az esetben a következő egyenletet kapjuk:

$$A_{ji} = u_\nu \left(\frac{N_i}{N_j} B_{ij} - B_{ji} \right) \tag{2.3}$$

Mivel termodinamikai egyensúlyban az atomi energiaszintek betöltöttségét (populációját) jó közelítéssel a Boltzmann-formula írja le, ezért $N_i/N_j = (g_i/g_j)\exp[h\nu/kT]$, ahol gi és gj az alsó-, ill. a felső energiaszint statisztikus súlya. Ezt beírva, a következő összefüggéshez jutunk:

$$g_j A_{ji} = u_\nu \left(g_i B_{ij} e^{h\nu/kT} - g_j B_{ji} \right) \tag{2.4}$$

Kellően magas hőmérsékleten, amikor $h\nu \ll kT$, at exponenciális függvény Taylor-sorából $\exp[h\nu/kT] \approx 1 + h\nu/kT$. Másrészt, ilyen körülmények között a sugárzás energiasűrűségét a tapasztalati úton is meghatározható *Rayleigh-Jeans formula* írja le: $u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$. A kettő kombinációjából adódik:

$$g_j A_{ji} = u_\nu \left(g_i B_{ij} + g_i B_{ij} h\nu/kT - g_j B_{ji} \right) \tag{2.5}$$

Mivel (2.5) bal oldala független T-től. a jobb oldalnak is annak kell lennie. Ez csakis akkor lehetséges, ha

$$g_i B_{ij} = g_j B_{ji} \tag{2.6}$$

vagyis az abszorpció és az indukált emisszió Einstein-valószínűsége egyenlő. Ezt kihasználva, (2.4) a következő alakba írható:

$$u_\nu = \frac{A_{ji}/B_{ji}}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{2.7}$$

A Rayleigh-Jeans közelítést újra alkalmazva $u_\nu \approx \frac{A_{ji}}{B_{ji}} \frac{kT}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$ adódik, amiből:

$$\frac{A_{ji}}{B_{ji}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \tag{2.8}$$

azaz a spontán és az indukált emisszió aránya frekvenciafüggő, de a nagy energiájú gamma-tartományt leszámítva a spektrum legnagyobb részén az indukált emisszió sokkal valószínűbb, mint a spontán emisszió.

(2.6) és (2.8) értelmében a három Einstein-valószínűség közül csak egy független. Mivel az Einstein-koefficiensek minden egyes atomra vonatkoznak, a köztük lévő összefüggések általánosan is érvényesek, nemcsak az egyensúly körülményei között.

A fentiek alapján a feketetest-sugárzás energiasűrűségét leíró Planck-formula:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{2.9}$$

Gyakorlati számításoknál sokszor célszerűbb a fenti sugárzási energiasűrűség helyett az egységnyi felület által egységnyi idő alatt egységnyi térszögbe kisugárzott monokromatikus energiát (*specifikus intenzitás*) használni. Mivel $u_\nu = (4\pi/c) I_\nu$, így a feketetest-sugárzás specifikus intenzitása:

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2\text{h}\,\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \quad \text{ill.} \quad B_\lambda(T) = \frac{2\text{h}\,c^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1} \tag{2.10}$$

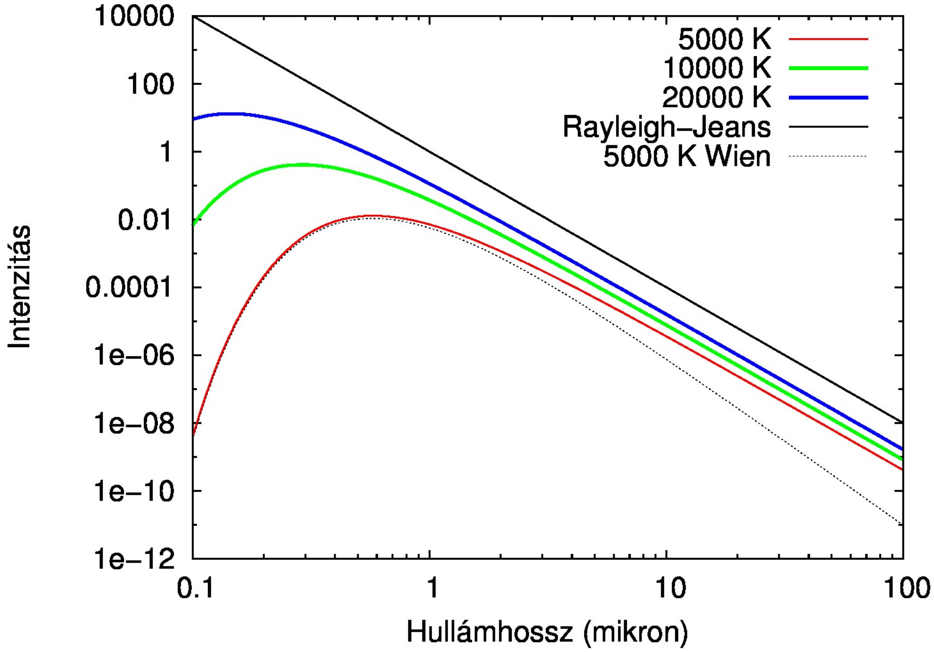
ahol kihasználtuk, hogy $B_\lambda(T) = -\frac{d\nu}{d\lambda} B_\nu(T)$. A szakirodalomban gyakran a (2.10) képletet hívják Planck-függvénynek.

Az alacsony frekvenciákon (kis energiákon) érvényes Rayleigh-Jeans közelítés mellett a másik határeset a nagy energiákra vonatkozó *Wien-közelítés*. Ez akkor használható, amikor $h\nu \gg kT$:

$$B_\nu(T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}} \tag{2.11}$$

Különböző hőmérsékletekhez tartozó Planck-görbék láthatóak a 2. ábrán.

A feketetest-sugárzáshoz a fentiek értelmében folyamatos abszorpció-emisszió szükséges. Ennek során a fotonok állandóan elnyelődnek, majd újra kisugárzódnak, miközben elvesztik korábbi tulajdonságaikat. A feketetest-sugárzás ennélfogva polarizálatlan és inkoherens. Habár a kétszintes modell helyes formulákat szolgáltat, a valóságban a feketetest-sugárzó égitestek (pl. csillagok) anyaga olyan összetételű, amely gyakorlatilag bármely hullámhosszon képes abszorbeálni, vagy emittálni. A feketetest-sugárzás spektruma ezért folytonos, tiszta kontinuum, nincsenek benne sem abszorpciós, sem emissziós vonalak.



2. ábra: Planck-görbék különböző hőmérsékleteken

Egy feketetest-sugárzó objektum egységnyi felülete a teljes energiatartományban egységnyi idő alatt

$$F = \int \pi B_\nu(T) d\nu = \sigma_{SB} T^4 \tag{2.12}$$

energiát bocsát ki. Ez a *Stefan-Boltzmann törvény* ($\sigma_{SB} = 5.67 \cdot 10^{-8}$ SI-egységekben).

A 2. ábrán is látható, hogy különböző T hőmérsékleten a feketetest-sugárzás maximális intenzitásának hullámhossza növekvő hőmérséklettel csökken. Ezt fejezi ki a *Wien-féle eltolódási törvény*:

$$\lambda_{max} = \frac{2.898 \cdot 10^{-3}}{T} \text{ m K} \qquad \text{ill.} \qquad \nu_{max} = 5.879 \cdot 10^{10} \cdot T \text{ Hz / K} \tag{2.13}$$

3. Termikus sugárzási folyamatok

3.1. Kötött-kötött átmenetek, NLTE

Amikor a sugárzás keltésének fő oka a részecskék hőmozgása, illetve az atomok ezzel kapcsolatos gerjesztettsége, akkor termikus sugárzási folyamatokról beszélhetünk. A feketetest-sugárzás (2.2. fejezet) az egyik leggyakrabban előforduló termikus sugárzás, ekkor a fotonok és a közeg atomjai lokális termikus egyensúlyban vannak, és mindkettőt egyetlen közös hőmérséklettel lehet jellemezni.

A valóságban azonban gyakran előfordul, hogy a lokális termikus egyensúly feltétele nem teljesül, mivel különféle atomi folyamatok (ütközési gerjesztés, ionizáció, stb.) hatására az egyes energiaszintek populációja megváltozik, és a Boltzmann-formula nem lesz érvényes. Ekkor a sugárzás spektrális energiasűrűsége (2.3) alapján

$$u_\nu = 8\pi h \frac{\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\frac{g_j N_i}{g_i N_j} - 1} \tag{3.1}$$

lesz. Ezt az esetet *nem-lokális termodinamikai egyensúlynak* (non-local thermodynamic equilibrium, NLTE) nevezzük. Ekkor a közegben terjedő sugárzás spektrumának kiszámításához (3.1) értelmében minden egyes atomi szint populációjának ismeretére van szükség, aminek kiszámítása általában igen bonyolult feladat.

Magas hőmérsékletű asztrofizikai közegekben (plazmában) a sugárzás keletkezésének egyik gyakori módja a spontán emisszió (lásd 2. fejezet). Ehhez az atomnak először gerjesztett állapotba kell kerülnie, ami történhet ütközéssel, vagy foton abszorpcióval. Alacsony sűrűségű közegben az ütközések többnyire elhanyagolhatóak az abszorpció mellett. A gerjesztést követően, további kölcsönhatás híján, az atom spontán emisszióval véges idő alatt alacsonyabb energiájú állapotba kerül. A 2. fejezetben taglalt kétszintes modellben a gerjesztett állapot populációjának megváltozása:

$$\frac{dN_j}{dt} = -A_{ji} N_j \tag{3.2}$$

Ennek megoldása:

$$N_j(t) = N_j(0) \exp[-A_{ji} t] = N_j(0) \exp[-\frac{t}{\tau_j}] \tag{3.3}$$

ahol $\tau_j = A_{ji}^{-1}$ a gerjesztett állapot élettartama. Kettőnél több energiaszint esetén az összes alacsonyabb energiájú állapotra összegezni kell, ezért a fenti képletekben $\sum_{(i<j)} A_{ji}$ írandó. A gerjesztett állapotok élettartama jellenzően 1 - 10 ns közötti, ha csak a spontán emisszióval járó átmeneteket vesszük figyelembe. Más részecskékkel történő ütközések, vagy fotonokkal való kölcsönhatás (azaz indukált emisszió) hatására az átmenet rövidebb idő alatt megtörténik, ezért a gerjesztett állapot élettartama lecsökken. Például indukált emisszió hatására az élettartam

$$\tau_j = \left(\sum_{(i<j)} A_{ji} + B_{ji} u_\nu \right)^{-1} \tag{3.4}$$

lesz. További, magasabb szintre történő abszorpció lehetősége esetén a jobb oldalhoz még hozzá kell adni az ezt leíró, az indukált emisszióval analóg tagot is.

Kötött-kötött átmenet (akár spontán, akár indukált emisszió) esetén a két állapot közti energiakülönbségnek megfelelő, $\nu=(E_j-E_i)/h$ frekvenciájú foton keletkezik. A gerjesztett állapot véges élettartama miatt azonban *Ej* értéke nem teljesen meghatározott, hanem a Heisenberg-féle határozatlansági elv értelmében kicsit bizonytalan lesz:

$$\Delta E_j \approx \frac{\hbar}{\tau_j} \quad , \tag{3.5}$$

így az emittált foton frekvenciája minden egyes folyamatban kicsit különböző lesz. Az így keletkező kvázi-monokromatikus sugárzás (vonal-emisszió, line emission) egy keskeny spektrumvonalat eredményez, melynek félértékszélessége

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau_j} \quad . \tag{3.6}$$

Ez a természetes vonalszélesség, hullámhosszban kifejezve jellemzően 10^{-4} nm nagyságrendű. Látható, hogy amennyiben az élettartam lerövidül, úgy a keletkező sugárzás spektrális szélessége megnő, a spektrumvonal "kiszélesedik".

Nagy sűrűségű közegekben, például a csillagok belsejében, az ütközések jóval gyakoribbak, ezért az atomnak "nincs ideje" a spontán emisszió élettartamának megfelelő időt tölteni a gerjesztett állapotban. Ilyenkor az élettartamot jellemzően az ütközések gyakorisága határozza meg. Két ütközés közötti átlagos időtartam

$$\tau_c = \frac{l}{v} = \frac{1}{N\sigma v} = \frac{1}{N\sigma}\sqrt{\frac{m}{2kT}} \tag{3.7}$$

ahol *l* a közepes szabad úthossz, *v* a részecskék (hőmozgásból származó) átlagos sebessége, *N* a koncentráció, *σ* az ütközési hatáskeresztmetszet, *m* a részecskék tömege, *T* a hőmérséklet, és feltettük, hogy a részecskék sebességének eloszlásfüggvénye a Maxwell-Boltzmann sebességeloszlást követi. Látható, hogy ez esetben az emittált sugárzás vonalszélessége

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau_c} = 2\pi N\sigma\sqrt{\frac{2kT}{m}} \sim N T^{1/2} \quad . \tag{3.8}$$

Ez a folyamat az ütközési, vagy nyomási kiszélesedés.

A vonalprofil frekvenciafüggése (spektruma) legegyszerűbben abban a félklasszikus közelítésben számítható ki, amelyben a sugárzást kibocsátó atomot egy klasszikus csillapított oszcillátornak tekintjük (Lorentz-modell). A csillapítás azért lép fel, mert a sugárzás miatt az oszcillátor energiát veszít. Az így klasszikus csillapodó rezgést végző elektron által keltett elektromos térerősség

$$E(t) = E_0 \exp[-\gamma t/2] \exp[2\pi\nu_0 t] \tag{3.9}$$

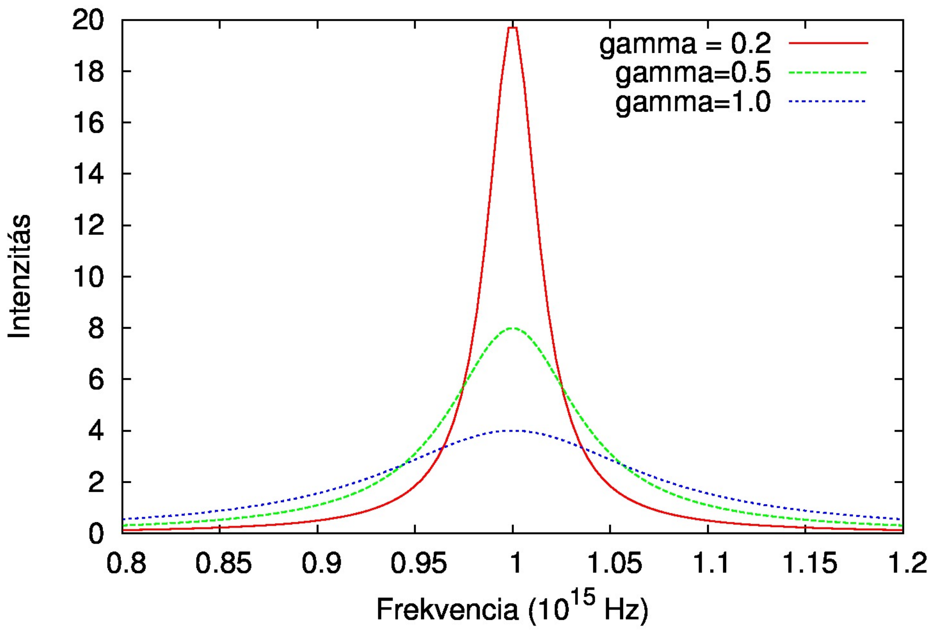
ahol γ a csillapodási tényező (ami a kvantummechanikai képben az állapot élettartamának reciprokával analóg mennyiség), ν0 az elektron sajátfrekvenciája, ami az emittált vonalprofil központi frekvenciájának felel meg. A sugárzás spektrumát E(t) Fourier-transzformáltja adja meg:

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \tag{3.10}$$

a sugárzás intenzitását pedig ennek abszolút érték négyzete szolgáltatja. Végeredményül a következő kifejezés adódik (Lorentz-profil):

$$I_\nu = I_0 \frac{\gamma}{4\pi^2(\nu-\nu_0)^2 + (\gamma/2)^2} \quad . \tag{3.11}$$

A vonalprofil alakját különböző γ paraméter mellett a 3. ábra szemlélteti. Egyszerűen belátható, hogy a görbe félértékszélességét $\gamma/2\pi$ adja.



3. ábra: A spektrumvonal profilja különböző csillapítási paraméterek esetén.

A (3.11) képlet egyetlen atom által kibocsátott sugárzás spektrális profilját adja meg. A megfigyelt sugárzást azonban egyszerre igen sok atom kelti, melyek a megfigyelőhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben rendezetlen hőmozgást végeznek. A mozgó atomok által kibocsátott sugárzás Doppler-eltolódást szenved: egy a megfigyelő felé V sebességgel mozgó atom $\nu' = \nu \cdot (1 + V/c)$ frekvenciájú sugárzást kelt a megfigyelő rendszerében, ahol ν az atom nyugalmi rendszerében kibocsátott foton frekvenciája. Ha az atom által keltett sugárzás vonalprofilja az atom nyugalmi rendszerében $\varphi(\nu)$, akkor a V sebességgel mozgó atom vonalprofilját $\varphi(\nu - \nu V/c)$ adja meg. Az eredő sugárzás profilját így ezen Doppler-eltolódott vonalprofil és a V sebességgel mozgó részecskék eloszlásfüggvényének szorzata adja az összes sebességre integrálva:

$$I_\nu = \int_0^{\infty} \varphi(\nu - \nu V/c) \cdot f(V) dV \tag{3.12}$$

Ha az atomok mozgása főként a hőmozgásból származik, a sebességeloszlás függvényt a Maxwell-Boltzmann féle eloszlás adja meg:

$$f(V) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{mV^2}{2kT}\right] \tag{3.13}$$

Ezt felhasználva (3.12) a következő formába írható:

$$I_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Delta\nu_D}\int_0^\infty \varphi(\nu-\nu')\exp\left[-\frac{\nu'^2}{\Delta\nu_D^2}\right]d\nu' \tag{3.14}$$

ahol bevezettük a $\Delta\nu_D=(\nu_0/c)\sqrt{2kT/m}$ jelölést. Mivel a magas hőmérsékletű asztrofizikai közegekben $\Delta\nu_D$ általában sokkal nagyobb, mint a természetes vonalszélesség, a $\varphi(\nu-\nu')$ függvény Dirac-deltával közelíthető. Ebben az esetben az integrálás eredménye:

$$I_\nu = \frac{I(0)}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\Delta\nu_D}\exp\left[-\frac{(\nu-\nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}\right] \tag{3.15}$$

Látható, hogy a termikus Doppler-effektus a vonalprofil alakjára egy $\Delta\nu_D$ félértékszélességű Gauss-görbét ad. Az atomi vonalprofil Lorentz-alakjának figyelembe vétele egy Gauss- és egy Lorentz-profil konvolúcióját, ún. Voigt-profilt eredményez.

A fenti egyszerű, félklasszikus elmélet nem képes megjósolni az egyes átmenetekhez tartozó sugárzás intenzitását, azaz a vonalprofil amplitúdóját. Ehhez az Einstein-féle valószínűségek ismeretére van szükség, melyek a kvantummechanika segítségével számíthatók ki. Megmutatható, hogy bármely $j \rightarrow i$ kvantumátmenet valószínűsége a kvantummechanikai dipólmomentum abszolútérték-négyzetével arányos:

$$A_{ji} \sim e^2\cdot\left|\int \psi_i^* \boldsymbol{r}\,\psi_j\, d^3\boldsymbol{r}\right|^2 \tag{3.16}$$

ahol e az elektron töltése, ψ_i az i-edik állapot hullámfüggvénye, $\boldsymbol{r}$ a koordináta-operátor, a * pedig a komplex konjugáltat jelöli. Történeti okokból az Einstein-valószínűségek helyett az azokkal arányos f_{ji} oszcillátorerősségeket adják meg. Pl. a spontán emisszióra:

$$A_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{g_i}{g_j}\frac{8\pi^2e^2\nu^2}{m_e c^3}f_{ji} \tag{3.17}$$

Az oszcillátorerősségek az ismert kvantumátmenetekre táblázatokban találhatók meg (pl. NIST Atomic Spectral Database, http://www.nist.gov/pml/data/asd.cfm).

3.2. Kötött-szabad átmenetek, fotoionizáció, radiatív rekombináció

Amennyiben a gerjesztés egy bizonyos küszöbértéket meghalad, az elektron teljesen leszakad az atomtörzsről és szabaddá válik. Ezt a folyamatot kötött-szabad átmenetnek, vagy ionizációnak nevezzük. A gerjesztés történhet részecskék közötti ütközéssel (*ütközési ionizáció*), vagy foton elnyelésével (*fotoionizáció*). Fotoionizáció esetén a foton energiájának meg kell haladnia az ionizációhoz szükséges küszöbértéket, azaz az ionizációs energiát.

Az alábbiakban tekintsünk hidrogén-szerű atomokat, melyekben a teljesen zárt elektronhéjakon (az atomtörzsön) kívül csupán egyetlen valenciaelektron található. Ekkor az *n* főkvantumszámú állapot energiája a Bohr-formulával közelíthető:

$$E_N = -\frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{I_H Z^2}{n^2} \tag{3.18}$$

ahol I_H a hidrogén ionizációs energiája ($I_H \sim 13.6$ eV), Z a magtöltés.

Az n-edik energiaszintről történő fotoionizáció esetén a foton energiája fedezi az ionizációs küszöböt, a maradék pedig a szabaddá vált elektront V sebességre gyorsítja. Így $h\nu = m_e V^2/2 - E_n$, azaz

$$h\nu = \frac{1}{2} m_e V^2 + \frac{I_H Z^2}{n^2} \tag{3.19}$$

Látható, hogy tisztán fotoionizáció esetén a keletkező elektronok sebességeloszlását a gerjesztő fotonok frekvencia szerinti eloszlása szabja meg, az ionizációs küszöbenergia felett. (3.19)-ből következik, hogy $h\,d\nu = m_e V\,dV$.

Megmutatható, hogy a fotoionizáció hatáskeresztmetszete az alábbi formában fejezhető ki:

$$\alpha_{bf} = \frac{64\pi^4}{3\sqrt{3}}\frac{m_e e^{10} Z^4}{c h^6}\frac{1}{n^5}\frac{g_{bf}}{\nu^3} \tag{3.20}$$

ahol g_{bf} a kvantummechanikából származó ún. Gaunt-faktor (ami a gyakorlatban előforduló esetek nagy részében kb. egységnyi nagyságrendű).

A fotoionizáció fordítottja, amikor egy szabad elektron foton kibocsátásával befogódik és kötött állapotba kerül, a *radiatív rekombináció*. Termikus egyensúlyban lévő közegekben teljesül az ionizációs egyensúly is, azaz az időegység alatt ionizálódó atomok száma megegyezik a rekombinálódó elektronok számával. Ha az n-edik szintre történő rekombináció hatáskeresztmetszetét Q_n -nel jelöljük, akkor az ionizációs egyensúly értelmében:

$$n_e N^* Q_n V f(V) dV = N_n \frac{u_\nu}{h\nu} \cdot \alpha_{bf}\, c\, d\nu \tag{3.21}$$

ahol N^* az ionok, n_e az elektronok, N_n az n-edik szinten lévő atomok koncentrációja. $f(V)$ az elektronok sebességeloszlását megadó függvény, $u_\nu / h\nu$ pedig az egységnyi térfogatban lévő adott frekvenciájú fotonok száma (a fotongáz energiasűrűsége osztva egy foton energiájával).

Kihasználva a termikus egyensúly (LTE) feltételét, a fotonenergia-sűrűség és a fotonszám a Planck-formulával (2.9 képlet) fejezhető ki, ennélfogva:

$$\frac{c u_\nu}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} \approx \frac{8\pi\nu^2}{c^2}e^{-h\nu/kT} \tag{3.22}$$

ahol kihasználtuk a nagy fotonenergiákon érvényes Wien-közelítést (lásd 2.2 fejezet).

Az LTE feltételt újból felhasználva, az n-edik energiaszinten lévő atomok száma az összes neutrális (nem ionizált) atom koncentrációjához viszonyítva a Boltzmann-formula módosított képletével írható fel:

$$\frac{N_n}{N^{(0)}} = \frac{g_n}{z(T)}\cdot\exp\left[-\frac{I_H Z^2(1-1/n^2)}{kT}\right] \tag{3.23}$$

ahol *z(T)* a fázisösszeg, vagy partíciós függvény. Hasonlóan, az ionizált és neutrális atomok koncentrációjának arányát a Saha-egyenlet határozza meg:

$$\frac{N^* n_e}{N^{(0)}} = \frac{2z^*}{z^{(0)}}\left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{I_H Z^2}{kT}\right] \tag{3.24}$$

ahol z* az ionizált, $z^{(0)}$ a neutrális atomok partíciós függvénye adott hőmérsékleten. Végezetül, az elektronok sebességeloszlás-függvénye a Maxwell-Boltzmann eloszlás lesz:

$$f(V) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_e}{2kT}\right)^{3/2}V^2\exp\left[-\frac{m_e V^2}{2kT}\right] \tag{3.25}$$

A (3.22) -- (3.25) képleteket (3.21)-be helyettesítve, és kihasználva a (3.19) és (3.20) összefüggéseket, elemi átalakítások után kapjuk a radiatív rekombináció hatáskeresztmetszetét kifejező Milne-formulát:

$$Q_n = \frac{g_n}{z^*}\left(\frac{h\nu}{m_e c V}\right)^2\alpha_{bf} \tag{3.26}$$

A fotoionizáció és rekombináció valószínűsége (3.20) és (3.26) alapján a főkvantumszámmal fordítottan arányos, így az alacsonyabb energiaszintekre történő rekombináció jóval valószínűbb, mint a magas energiaszintekre történő. Az alapállapotra (n=1) történő rekombinációt azonban teljesen kompenzálja az így keletkező foton által keltett fotoionizáció. Így az ionizált gázfelhőkből kijutó sugárzás általában olyan vonalas emisszió (3.1. fejezet), amely az n>1 állapotokra történő rekombinációt követő legerjesztődés (általában spontán emisszió) során keletkezik. A galaxisokban található nagy kiterjedésű ionizált hidrogénfelhők (H II területek) főként a hidrogén Balmer- és Paschen-sorozatának vonalain sugároznak.

3.3. Szabad-szabad átmenetek, Thompson-szórás

Szabad (nem kötött) állapotban lévő töltések a klasszikus elektrodinamika szerint sugározhatnak, amennyiben gyorsulnak vagy lassulnak. A kvantumos leírásmód értelmében ez a folyamat szabad-szabad átmenetnek felel meg, amely foton elnyelésével, vagy kibocsátásával járhat. Az alábbiakban szabad elektronok és a sugárzás kölcsönhatásaival foglalkozunk abban az esetben, amikor az elektronok mozgási energiája a termikus mozgásból származik, eloszlásfüggvényük a Maxwell-Boltzmann eloszlás.

A gyorsuló töltés által keltett sugárzás teljesítményét a *Larmor-formula* írja le:

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} a^2(t) \tag{3.27}$$

ahol *a(t)* a töltés gyorsulása. A fenti képlet CGS-rendszerben érvényes (ami az asztrofizikai szakirodalomban általánosan elterjedt), SI-rendszerbe történő átíráshoz a jobb oldalon még egy $1/4\pi\varepsilon_0$ szorzó szükséges. A kisugárzott energia csökkenti a töltés mozgási energiáját, így (3.27) egyúttal a töltés sugárzási energiaveszteségét is kifejezi (értelemszerűen egy "-" előjellel).

Egy magányos, más részecskékkel nem kölcsönható, szabad elektron nem képes fotont elnyelni (azaz sugárzást abszorbeálni), mivel a foton + elektron rendszerre az energia- és impulzusmegmaradás egyidejűleg nem teljesül. A szabad elektron így a beeső fotont pusztán szórni képes, azaz a foton terjedési iránya megváltozik. Tekintsünk egy alacsony energiájú (v << c) elektront és a beérkező fotont írjuk fel síkhullámként. Ekkor a síkhullám terében az elektron a beeső irányra merőlegesen gyorsulni fog, a gyorsulás $a = eE/m_e$ lesz, ahol E a síkhullám elektromos tere (a mágneses tér hatása alacsony energiák esetén elhanyagolható). A klasszikus elektrodinamika értelmében a bejövő energiát a Poynting-vektor időátlaga adja, ez síkhullám esetén $\langle S \rangle = (c/4\pi) E_0^2/2$, ahol *E0* az elektromos tér amplitúdója. A kimenő energia (3.27) alapján $\langle P \rangle = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{e^2}{m_e^2} \langle E^2 \rangle = \frac{2e^4}{3m_e^2 c^3} \frac{E_0^2}{2}$. A kettő hányadosa a folyamat hatáskeresztmetszete:

$$\sigma_T = \frac{\langle P \rangle}{\langle S \rangle} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \tag{3.28}$$

az ún. Thompson-féle hatáskeresztmetszet. A fenti folyamatot Thompson-szórásnak is nevezik. (3.28)-ból látható, hogy a Thompson-szórás rugalmas, azaz a beeső foton energiája nem változik. Mindez addig érvényes, amíg teljesül a v << c feltétel. Nagy elektron- ill. fotonenergiákon a szórás már nem lesz teljesen rugalmas (lásd 4.3. fejezet).

A szórt sugárzás irányfüggésének meghatározásához használjunk olyan koordináta-rendszert, melynek origójában t=0-kor az elektron található, a bejövő sugárzás pedig a z-tengely irányából érkezik. Az elektron gyorsulása ekkor az x-y síkban történhet, a bejövő elektromos tér polarizációjának függvényében. Tegyük fel, hogy egy adott pillanatban a gyorsulás az x-tengely irányába mutat, és a szórt sugárzás iránya az x-z síkban van, az x-tengellyel θ szöget zár be. A klasszikus elektrodinamika szerint a gyorsuló elektron sugárzási teljesítménye ebbe a θ szöggel jellemzett irányba dΩ térszögbe

$$P(\theta) = \frac{c}{4\pi}\frac{e^2}{c^4}\frac{|a|^2}{r^2}\sin^2\theta\, r^2\, d\Omega \qquad (3.29)$$

ahol $a = eE/m_e$ az elektron gyorsulása. Bontsuk fel a térerősséget két egymásra merőleges (x, és y irányú) polarizációs komponensre, és írjuk fel a kisugárzott energia időátlagát az egyes komponensek szerint:

$$\langle P_x\rangle = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}\frac{E_{x,0}^2}{2}\sin^2\theta\, d\Omega \quad \text{ill.} \quad \langle P_y\rangle = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}\frac{E_{y,0}^2}{2}\, d\Omega \qquad (3.30)$$

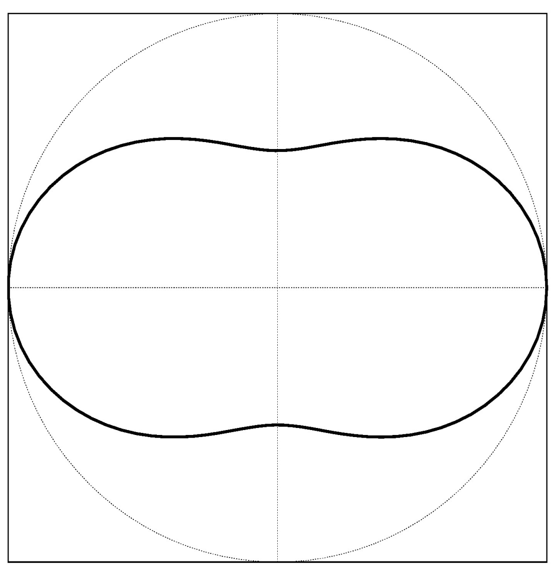
ahol kihasználtuk, hogy $\langle |E|^2\rangle = E_0/2$ és azt, hogy az y-tengely irányú komponensnél a szórt sugárzás iránya $\theta = 90°$. A szórt sugárzás eredő teljesítménye a két komponens összege lesz: $\langle P\rangle = \langle P_x\rangle + \langle P_y\rangle$. Hasonlóan, a bejövő sugárzás fluxusa a Poynting-vektorokkal kifejezve:

$$\langle S\rangle = \langle S_x\rangle + \langle S_y\rangle = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{E_{x,0}^2}{2} + \frac{E_{y,0}^2}{2}\right) \qquad (3.31)$$

Ha a bejövő sugárzás polarizálatlan, $E_{x,0} = E_{y,0}$. A Thompson-szórás irányfüggő (differenciális) hatáskeresztmetszete ezzel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\langle P\rangle}{\langle S\rangle} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \cdot \left[1 + \sin^2\theta\right] \qquad (3.32)$$

Látható, hogy a szórt sugárzás erőssége a bejövő irányra (a z-tengelyre) nézve hengerszimmetrikus, és a szórás legnagyobb valószínűséggel ebbe az irányba (amelyre θ = 90º), valamint az ezzel ellentétes irányba (θ = 180º) történik (4. ábra).

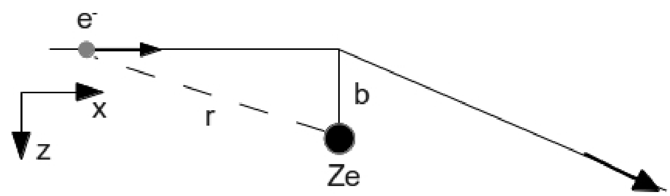


4. ábra: A Thompson-szórás hatáskeresztmetszetének irányfüggése

3.4. Fékezési sugárzás (Bremsstrahlung)

A szabad-szabad átmenet másik gyakori formája az az eset, amikor egy szabad elektron egy közeli ion elektromos terében gyorsulva fotont bocsát ki, vagy nyel el. Ez a folyamat a *fékezési sugárzás* (*Bremsstrahlung*). Ekkor a fotonnal történő kölcsönhatás azért lehetséges, mert a foton impulzusának egy része az ionnak adódik át.

Vizsgáljuk egy szabad elektron és egy Ze töltésű ion ütközését a nyugvónak feltételezett ion terében (5. ábra). Ha a kölcsönhatás gyenge, az elektron pályája az ábrán látható egyenesekkel közelíthető, a maximális megközelítés távolsága b (ütközési paraméter). A kölcsönhatás akkor a legerősebb, amikor az elektron b-hez közeli távolságokban tartózkodik. A kölcsönhatás időtartama kb. $\tau = b/v$, ahol v az elektron sebessége.



5. ábra: Elektron-ion ütközés a fékezési sugárzás keletkezésénél

Mivel az elektron az ion elektromos terében gyorsul, sugátozni fog. Az időegység alatt kisugárzott energiát ezúttal is a (3.27) képletben leírt Larmor-formula adja meg. A kölcsönhatás teljes időtartama alatt az elektron energiaveszteségе:

$$\Delta E_e = \frac{2e^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty} a^2(t)\,dt = \frac{2e^2}{3c^3}\int_0^{\infty} 2\,a^2(\omega)\,d\omega = \int_0^{\infty} P(\omega)\,d\omega \qquad (3.33)$$

ahol alkalmaztuk a gyorsulás Fourier-felbontását:

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\exp[-i\omega t]\,dt \qquad (3.34)$$

és bevezettük a sugárzás spektrális energiasűrűségét leíró $P(\omega) = (4e^2/3c^3)\,a^2(\omega)$ függvényt.

(3.34)-ből látható, hogy olyan nagy frekvenciáknál, melyeknél $\omega \gg 1/\tau$, az exp[...] függvény gyorsan oszcilláló lesz, ezért integrálja 0-t ad. Ezzel szemben igen alacsony frekvenciákon $\exp[-i\omega t] \approx 1$, ezáltal

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\,dt = \Delta v = \sqrt{\Delta v_x^2 + \Delta v_z^2} \qquad (3.35)$$

ahol Δv az elektron sebességének teljes megváltozása a kölcsönhatás során.

Az 5. ábra alapján egyszerűen belátható, hogy $\Delta v_x = 0$, mivel a gyorsulás x-komponense az ütközésre nézve antiszimmetrikus. A z-komponensre felírható, hogy

$$\Delta v_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ze^2}{m_e} \frac{b}{(b^2+v^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{2 Z e^2}{m_e b} \frac{1}{v} \tag{3.36}$$

ahol kihasználtuk, hogy gyenge kölcsönhatás (nagy ütközési paraméter) esetén $x \approx v \cdot t$. (3.33) és (3.36) összevetéséből látható, hogy a fékezési sugárzás spektrális energiasűrűsége

$$P(\omega) = \frac{16 Z^2 e^6}{3 c^3 m_e^2} \frac{1}{v^2 b^2} \quad \text{(ha } \omega \text{ kicsi), ill.} \quad P(\omega) = 0 \quad \text{(ha } \omega \text{ nagy)} \tag{3.37}$$

Ez a képlet egyetlen elektron-ion kölcsönhatás során keletkező sugárzást írja le. A valóságban az elektron egymás után sok ion terében gyorsul és kelt sugárzást. Ha az ionok koncentrációja N_i, az elektron egységnyi idő alatt $N_i \cdot v \cdot 2\pi b\, db$ db. ütközést szenved. Az ezen idő alatt keltett sugárzás teljesítménye:

$$P_e(\omega) = N_i v \int_{b_{min}}^{b_{max}} P(\omega) 2\pi b\, db \tag{3.38}$$

ahol az integrálást az ütközési paraméter összes lehetséges értékére kell elvégezni. Az alsó határt, a minimális értéket a perturbációs közelítés érvényességének feltételéből kaphatjuk:

$$\frac{Z e^2}{b_{min}} \approx \frac{1}{2} m_e v^2 \quad \rightarrow \quad b_{min} = \frac{2 Z e^2}{m_e v^2} \tag{3.39}$$

A kvantummechanika alapján is adhatunk feltételt a minimális ütközési paraméterre: ez abból adódik, hogy a levezetésnél használt klasszikus leírásmód csak addig érvényes, amíg a részecskék távolsága a de Broglie - hullámhossznál nagyobb, azaz:

$$b_{min} = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e v} \tag{3.40}$$

A konkrét folyamat vizsgálatánál a (3.39) és (3.40) adta feltételek közül azt kell választani, amelyik a nagyobb b_{min} -t eredményezi.

A maximális ütközési paraméter az ütközések időtartamát és a sugárzás frekvenciáját összekapcsoló $\omega \ll 1/\tau$ feltételből kapható meg. Mivel $\tau = b/v$, ezért határesetben

$$\omega \approx \frac{v}{b_{max}} \quad \rightarrow \quad b_{max} = \frac{v}{\omega} \tag{3.41}$$

Ezzel

$$P_e(\omega) = \frac{16 Z^2 e^6 N_i}{3 m_e^2 c^3 v} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{1}{b} db = \frac{16 Z^2 e^6 N_i}{3 m_e^2 c^3 v} \ln\Lambda \quad \text{ahol} \quad \Lambda = \frac{b_{max}}{b_{min}} = \frac{m_e v^3}{2 Z e^2 \omega} \tag{3.42}$$

(3.42) tehát megadja 1 elektron sugárzási spektrumát N_i ionnal történő ütközés hatására.

Tegyük fel, hogy a közegben az elektronkoncentráció N_e és az elektronok sebességeloszlása a (3.25) szerinti Maxwell-Boltzmann eloszlás. Az eredő sugárzás így a különböző sebességekkel mozgó elektronokra érvényes (3.42) képlet sebesség szerinti integrálja lesz:

$$P_{br}(\omega) \;=\; N_e \cdot \int_{v_{min}}^{v_{max}} P_e(\omega) f(v) dv \;\approx\; N_e N_i \frac{16 Z^2 e^6}{3 m_e^2 c^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_e}{2kT} \right)^{3/2} \ln \Lambda \int_{v_{min}}^{\infty} v \exp\left[-\frac{m_e v^2}{2kT} \right] dv \qquad (3.43)$$

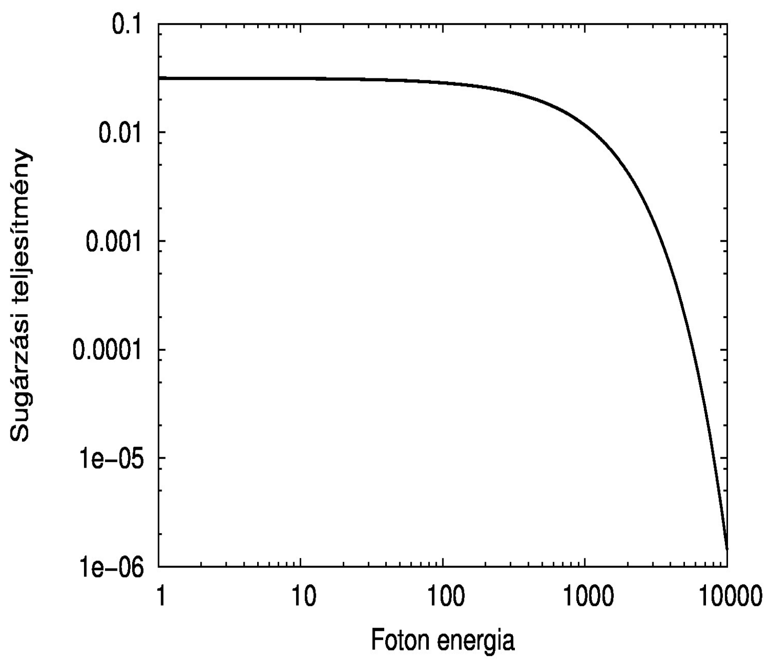
ahol v_{min} az adott ω frekvenciájú sugárzás keltéséhez minimálisan szükséges sebesség:

$$\frac{1}{2} m_e v_{min}^2 = \hbar\omega \quad \rightarrow \quad v_{min} \;=\; \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{m_e}} \qquad (3.44)$$

A (3.43) képletben szereplő integrál elemi úton kiszámítható, ezzel a fékezési sugárzás eredő spektruma:

$$P_{br}(\omega) \;=\; N_e N_i \frac{16 Z^2 e^6}{3\, 2^{3/2} m_e^{3/2} c^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{1/2} \ln \Lambda \exp\left[-\frac{\hbar\omega}{kT} \right] \;\approx\; 7 \cdot 10^{-38} \frac{N_e N_i Z^2}{T^{1/2}} \exp\left[-\frac{\hbar\omega}{kT} \right] \qquad (3.45)$$

A spektrum alakja $\hbar\omega$ függvényében a 6. ábrán látható.



6. ábra: A fékezési sugárzás spektruma

4. Nem termikus sugárzási folyamatok

4.1. Töltött részecskék nem termikus gyorsítása

Töltött részecskéket tartalmazó közegben (plazmában) terjedő sugárzás hatására a részecskék mozgása a tisztán hőmozgásból származó Maxwell-Boltzmann eloszlástól különböző lehet. A sugárzás elektromágneses tere a plazma töltött részecskéit (elsősorban a kis tömegű elektronokat) bizonyos irányokban erőteljesen gyorsítja, így a részecskék a termikus sebességnél lényegesen nagyobb sebességet vehetnek fel.

Tekintsünk egy x-irányban terjedő síkhullámot, melynek elektromos terének z-irányú (azaz a terjedési irányra merőleges) komponense:

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - k x) \tag{4.1}$$

ahol $k = 2\pi/\lambda$ a hullámszám, $\omega = 2\pi\nu$ a hullám körfrekvenciája.

Egy elektron z-irányú mozgásának egyenlete a síkhullám terében:

$$m_e \frac{d v_z}{dt} = e E_z = e E_0 \cos(\omega t - k x) \tag{4.2}$$

Tegyük fel, hogy az elektron a sugárzás terjedési irányában (x-irányban) egyenletes v_x sebességgel mozog, ekkor $x = v_x \cdot t$. A mozgásegyenlet ekkor így írható:

$$\frac{d v_z}{dt} = \frac{e E_0}{m_e} \cos[(\omega - k v_x) t] = \frac{e E_0}{m_e} \cos(w \cdot t) \tag{4.3}$$

ahol bevezettük a $w = \omega - k v_x$ jelölést. (4.3) integrálásából azonnal adódik a z-irányú sebesség:

$$v_z(t) = \frac{e E_0}{m_e} \cdot \frac{\sin(w t)}{w} = \frac{e E_0}{m_e} \cdot t \cdot \frac{\sin(u)}{u} \tag{4.4}$$

A (4.4) képletből látható, hogy az $u = w \cdot t = 0$ rezonanciafeltétel teljesülése esetén $\sin(u)/u = 1$, így $v_z \sim t$, azaz a sebesség az idővel lineárisan nő. A rezonanciafeltétel akkor teljesül, ha

$$\omega - k v_x = 0 \rightarrow v_x = \frac{\omega}{k} \tag{4.5}$$

Látható, hogy azon elektronok, melyek termikus sebessége kb. megegyezik a síkhullám fázissebességével, jelentős z-irányú sebességnövekedést érhetnek el. Az ilyen plazmában egy adott idő elteltével a részecskék sebességeloszlása már nem termikus lesz.

4.2. Sugárzás relativisztikus részecskékből

Ha a sugárzás forrása közel fénysebességgel mozog, a relativisztikus korrekciók miatt a megfigyelő a klasszikus fizikától eltérő jelenségeket tapasztal. Ezek áttekintéséhez vizsgáljuk a sugárzást egyrészt a megfigyelőhöz rögzített K-rendszerben, másrészt a sugárzó részecskéhez rögzített K' rendszerben!

Tegyük fel, hogy a két koordináta-rendszer x-tengelye egybeesik, és a K' rendszer v sebességgel mozog az x-tengely irányában. Ekkor egyazon esemény koordinátáit a K és a K' rendszerben a Lorentz-transzformáció köti össze:

$$t'=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right), \quad x'=\gamma(x-vt), \quad y'=y, \quad z'=z \tag{4.6}$$

ahol $\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2} = (1-\beta^2)^{-1/2}$ a Lorentz-faktor. Felhasználva a sebesség $u_x=dx/dt$ definícióját, a idő transzformációjának differenciális alakjára adódik:

$$dt' = \gamma\, dt\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right) \tag{4.7}$$

Tekintsünk egy olyan fénysugarat, melyet a K'-rendszerben nyugvónak tekintett részecske az x-tengelyhez (vagyis a két rendszer relatív sebességvektorának irányához) képest θ' szögben bocsát ki. A fénysugár sebessége c, ennek x'- és y'-tengelyekre való vetülete $u'_x=c\cdot\cos\theta'$ és $u'_y=c\cdot\sin\theta'$. A Lorentz-transzformáció miatt a K-rendszerben nyugvó megfigyelő azonban $\theta\neq\theta'$ irányú fénykibocsátást tapasztal. A (4.6) formulák felhasználásával megmutatható, hogy

$$\sin\theta = \frac{u_y}{c} = \frac{\sin\theta'}{\gamma(1+\beta\cos\theta')} = \frac{\sin\theta'}{\delta_D} \tag{4.8}$$

ahol

$$\delta_D = \gamma(1+\beta\cos\theta') = \frac{1}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} \tag{4.9}$$

a Doppler-faktor. A fenti jelenség a *relativisztikus aberráció*, aminek következtében a fénykibocsátás a külső megfigyelő számára a részecske sebességvektorának irányába összpontosul.

Hasonló módon belátható, hogy ha a sugárzás a K' rendszerben $d\Omega'$ térszögbe történik, akkor ezt a K-rendszerbeli megfigyelő

$$d\Omega = \frac{d\Omega'}{\gamma^2(1+\beta\cos\theta')^2} = \frac{d\Omega'}{\delta_D^2} \tag{4.10}$$

térszögbe történő fénykibocsátásnak érzékeli, ahol láthatóan $d\Omega<d\Omega'$. Ez a *relativisztikus nyalábolás*.

A Lorentz-transzformáció fenti képletét a foton négyesimpulzusára alkalmazva kaphatjuk a relativisztikus Doppler-effektus formuláját:

$$\omega = \omega' \gamma (1+\beta \cos\theta') = \omega' \delta_D \qquad (4.11)$$

Látható, hogy $\theta'=0$ esetén, amikor a sugárzás a sebesség irányába történik, a K-rendszerbeli megfigyelő

$$\omega = \omega' \gamma (1+\beta) = \omega' \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} > \omega' \qquad (4.12)$$

kékeltolódott sugárzást észlel. A sebességgel ellentétes irányba történő kisugárzásnál ($\theta'=\pi$) vöröseltolódás lép fel. Ezek megegyeznek az alacsony sebességnél fellépő jelenségekkel, azonban az eltolódás mértéke nagy sebességeknél más lesz, mint amit a klasszikus fizika formulái jósolnak.

Egy további érdekesség a mozgásra merőleges irányba történő sugárzásnál fellépő *transzverzális Doppler-effektus*. Amennyiben $\theta'=\pi/2$, akkor (4.11) értelmében $\omega = \omega' \gamma > \omega'$ kékeltolódás lép fel, de ezt a sugárzást a megfigyelő (4.8) értelmében nem a mozgás irányára merőlegesnek érzékeli. Ha a megfigyelő által merőlegesnek mért ($\theta=\pi/2$) fénysugarat vesszük, akkor $\omega = \omega'/\gamma < \omega'$, tehát vöröseltolódást tapasztalunk.

Relativisztikus sebességgel a megfigyelő felé mozgó sugárforrás K-rendszerben mért energiafluxusa jelentősen felerősödik a K'-rendszerben mérhető fluxushoz képest. Ez a jelenség a *relativisztikus erősítés* (*Doppler-boosting*). Vizsgálatához tegyük fel, hogy a részecske v sebessége θ szöget zár be a látóiránnyal, és tekintsük két foton kibocsátását a megfigyelő irányába. A két kibocsátás között a K'-rendszerben $\Delta t_e'$ idő telik el, ami a K-rendszerben $\Delta t_e = \gamma \Delta t_e'$ -nek felel meg. A két foton beérkezési időkülönbsége a K-rendszerben (Δt_o) azonban különbözni fog Δt_e -től, mivel a második fotonnak rövidebb utat kellett megtennie a megfigyelőhöz történő beérkezésig. Egyszerűen belátható, hogy $\Delta t_0 = \Delta t_e (1-\beta \cos\theta)$, így

$$\Delta t_0 = \Delta t_e' \gamma (1-\beta \cos\theta) \rightarrow \frac{\Delta t_e'}{\Delta t_o} = \frac{1}{\gamma (1-\beta \cos\theta)} = \delta_D \qquad (4.13)$$

A Doppler-boosting oka egyrészt a relativisztikus nyalábolás (lásd 4.10. képlet), másrészt a (4.13) miatti időkülönbség, ami a beérkező fotonok rátáját növeli a kibocsátási rátához képest. Az energianövekedés harmadik forrása a (4.11) miatti Doppler-effektus, ami szerint a beérkező fotonok energiája nagyobb lesz, mint a kibocsátott fotonoké. Ha a fenti körülmények között *N* db. ω frekvenciájú foton kibocsátása történik $\Delta\Omega'$ térszögbe, akkor az egységnyi felületen egységnyi idő alatt átáramló energiafluxus:

$$F'(\omega') = \frac{N \hbar \omega'}{\Delta t_e' \Delta\Omega'} = \frac{N \hbar \omega / \delta_D}{\delta_D \Delta t_o \delta_D^2 \Delta\Omega} = F(\omega) \frac{1}{\delta_D^4} \rightarrow F(\omega) = \delta_D^4 F'(\omega') \qquad (4.14)$$

ahol F a K-rendszerben, F' a K'-rendszerben mérhető energiafluxus. Mivel a relativisztikus sugárforrások Lorentz-faktora 1-nél jóval nagyobb is lehet, (4.14) értelmében a Lorentz-faktor negyedik hatványával arányos Doppler-boosting igen nagy fluxusnövekedést is eredményezhet. Ellentétes irányú sebességek esetén a fentiek értelmében fluxuscsökkenés lép fel. Mindezek hatására a kétirányú relativisztikus részecskenyalábok (bipoláris jet-ek) megfigyelt képe jelentős aszimmetriát mutathat: a megfigyelő irányába mozgó nyaláb sokkal fényesebbnek tűnik, mint az ellentétes irányba mozgó.

Végezetül, a gyorsuló relativisztikus részecske által keltett sugárzást a relativisztikus Larmor-formula adja meg, mely szerint a kisugárzott teljesítmény

$$P = \frac{2e^2}{3c^3}\gamma^4\left(a_m^2 + \gamma^2 a_p^2\right) \tag{4.15}$$

ahol a_m a gyorsulás sebességre merőleges, a_p a sebességgel párhuzamos komponense.

4.3. Szinkrotron-sugárzás

Ha egy elektron (vagy más töltött részecske) sztatikus vagy kvázisztatikus mágneses térben mozog, pályáját a Lorentz-erő befolyásolja:

$$\vec{F} = \frac{e}{c}\,\vec{v} \times \vec{B} \tag{4.16}$$

ahol **B** a mágneses indukcióvektor, **v** az elektron sebességvektora. Mivel a vektori szorzat miatt a Lorentz-erő mindig merőleges mind a sebességre, mind a mágneses indukcióvektorra, tisztán Lorentz-erő hatására az elektron a mágneses erővonalak mentén spirálozva halad.

Tegyük fel, hogy egy homogén mágneses térben a mágneses erővonalak a z-tengely irányába mutatnak, továbbá vegyük az erővonalakkal párhuzamos sebességet 0-nak. Ekkor az elektron a Lorentz-erő hatására körpályán mozog a mágneses erővonal körül. A mozgását leíró egyenletből a keringés körfrekvenciája:

$$m_e a = \frac{e}{c} v B \quad \rightarrow \quad a = \frac{eB}{m_e c}\cdot v = \omega_0 \cdot v \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{eB}{m_e c} \tag{4.17}$$

Nemrelativisztikus mozgás esetén ω_0 neve *ciklotron-frekvencia*. A körpálya sugara (*Larmor-sugár*):

$$r_L = \frac{v}{\omega_0} = \frac{m_e c}{eB}\cdot v \tag{4.18}$$

A relativisztikus tartományban is érvényes általános képlet szerint

$$\omega_0 = \frac{e\,B}{\gamma\, m_e\, c} \tag{4.19}$$

ahol az eddigiekhez hasonlóan $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$ a Lorentz-faktor.

A körpályán keringő elektron sugárzási teljesítménye a nemrelativisztikus Larmor-formula (3.27) értelmében:

$$P = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{eB}{m_e c}\right)^2 v^2 = 2c\, r_e^2 B^2 \beta^2 \tag{4.20}$$

ahol $\beta = v/c$ és $r_e = e^2/m_e c^2$ a *klasszikus elektronsugár*.

A fenti tisztán klasszikus kép érvényét veszti, ha a Larmor-sugár megközelíti az elektron de Broglie-hullámhosszát. Ez egy 10 keV energiájú elektronra nagyjából 10^{12} G mágneses indukció esetén teljesül, ami asztrofizikai körülmények között nem ritka. Az ilyen töltések mozgását a kvantumelmélet keretei között lehet értelmezni. Ennek fő eredménye értelmében az elektron továbbra is körpályán keringhet a mágneses erővonalak körül, de a pályák energiái kvantáltak:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{e\hbar B}{m_e c} \tag{4.21}$$

ezek az ún. *Landau-nívók*. Az egyik pályáról a másikra való átmenet történhet foton elnyelésével, vagy kibocsátásával, hasonlóan, mint az atomokhoz kötött elektronok esetén. A mágneses térben keringő nemrelativisztikus elektronok sugárzási spektruma így ekvidisztans vonalakból áll, melyek frekvenciái a ciklotron-frekvencia egész számú többszörősei lehetnek.

Relativisztikus sebességgel mozgó elektron esetén a Larmor-formula (4.15)-beli alakját kell alkalmazni. (4.19) behelyettesítésével kapjuk a *szinkrotron-sugárzás* teljesítményét:

$$P = \frac{2e^4}{3c^3}\gamma^2 \frac{B^2}{m_e^2} \cdot \beta^2 \tag{4.22}$$

Az eddigiekben feltettük, hogy az elektron sebessége merőleges a mágneses erővonalakra. A valóságban ez természetesen nem teljesül. Sokkal valószínűbb, hogy a sebességek véletlenszerű eloszlásúak. Egyenletes eloszlást feltételezve β átlagos értékére adódik:

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{1}{4\pi}\int (\beta \sin\alpha)^2 d\Omega = \frac{2}{3}\beta^2 \tag{4.23}$$

Ezt behelyettesítve (4.22)-be, az egy elektron által keltett szinkrotron sugárzási teljesítmény:

$$P_{syn} = \frac{4}{3} c\gamma^2 \sigma_T u_B \beta^2 \tag{4.24}$$

ahol σ_T a Thompson-féle hatáskeresztmetszet (lásd (3.28)), illetve $u_B = B^2/8\pi$ a mágneses tér energiasűrűsége cgs-egységekben.

A mágneses térben keringő relativisztikus elektron a szinkrotron-sugárzás miatt jelentős energiát veszít, ezáltal az elektron sebessége csökken, "hűl". A "hűlési időt" az elektron kezdeti energiája és a sugárzási teljesítmény hányadosa szolgáltatja:

$$T_c = \frac{E_e}{P_{syn}} = \frac{\gamma m_e c^2}{P_{syn}} \approx 6 \cdot 10^8 B^{-2} \gamma^{-1} \text{ sec.} \tag{4.25}$$

A szinkrotron sugárzás spektrumának kiszámításához először vegyük figyelembe, hogy a relativisztikus elektron sugárzása a relativisztikus nyalábolás (4.10) miatt egy keskeny kúpban sugároz, melynek nyílásszöge $2\theta \sim 2/\gamma$ és tengelye mindig a sebesség irányába mutat. A megfigyelő ezért a sugárzást nem a körpálya teljes szakaszán érzékeli, hanem csak akkor, amikor a látóirány a kúp nyílásába esik. Ha feltesszük, hogy a körpálya síkja pont beleesik a látóirányba, akkor egyszerű geometriai megfontolással belátható, hogy ez egy akkora ΔS ívhossz megtétele alatt teljesül, amihez tartozó központi szög éppen 2θ . Mivel a szögsebesség (4.19) szerint ω_0 , így az ennek megtételéhez szükséges idő:

$$\Delta t = \frac{2\theta}{\omega_0} = \frac{2}{\gamma\omega_0} \tag{4.26}$$

A megfigyelő azonban ennél rövidebb időt érzékel, mivel a körpálya véges méretéből következően a részecske a sugárzás során közeledik a megfigyelőhöz, így az ívhossz végén közelebb van, mint a kezdetén. A (4.13) képletnél alkalmazott gondolatmenethez teljesen hasonlóan a megfigyelt időtartam

$$\Delta t_o = (1-\beta)\cdot\Delta t \approx \frac{1}{2\gamma^2}\Delta t = \frac{1}{\gamma^3\omega_0} \tag{4.27}$$

A fentiek szerint a megfigyelő egy elektron sugárzását ilyen Δt_o szélességű impulzusokban figyeli meg, melyek távolsága a keringési frekvenciának megfelelően $2\pi/\omega_0$. Az ilyen sugárzás spektruma a Fourier-analízis eredménye szerint (4.27)-nek megfelelő karakterisztikus frekvencián lesz a legerősebb:

$$\omega_c = \frac{1}{\Delta t_o} = \gamma^3\omega_0 = \gamma^2\frac{eB}{m_e c} = \frac{eB}{m_e c}\left(\frac{E_e}{m_e c^2}\right)^2 \tag{4.28}$$

ahol E_e az elektron teljes energiája.

Általánosabb esetben figyelembe kell vennünk az elektronok mágneses térrel párhuzamos irányú sebességkomponensét is. Ez esetben a fenti képletekben *B* helyett $B\sin\alpha$ írandó, ahol α a sebességvektor és a mágneses indukcióvektor által bezárt szög.

Sok elektron eredő szinkrotron sugárzásának kiszámításához tegyük fel, hogy az elektronok energia szerinti eloszlása hatványfüggvény alakú: $N(E)\sim E^{-p}dE$. Ilyen eloszlás gyakran jön létre olyan asztrofizikai közegekben, melyekben a részecskék nem termikus gyorsításon mennek keresztül (lásd 4.1. fejezet). Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy minden elektron a (4.28) képletnek megfelelő $\omega_c(E)$ karakterisztikus frekvencián sugároz. Ekkor a kisugárzott energia fluxusa a következőképpen írható:

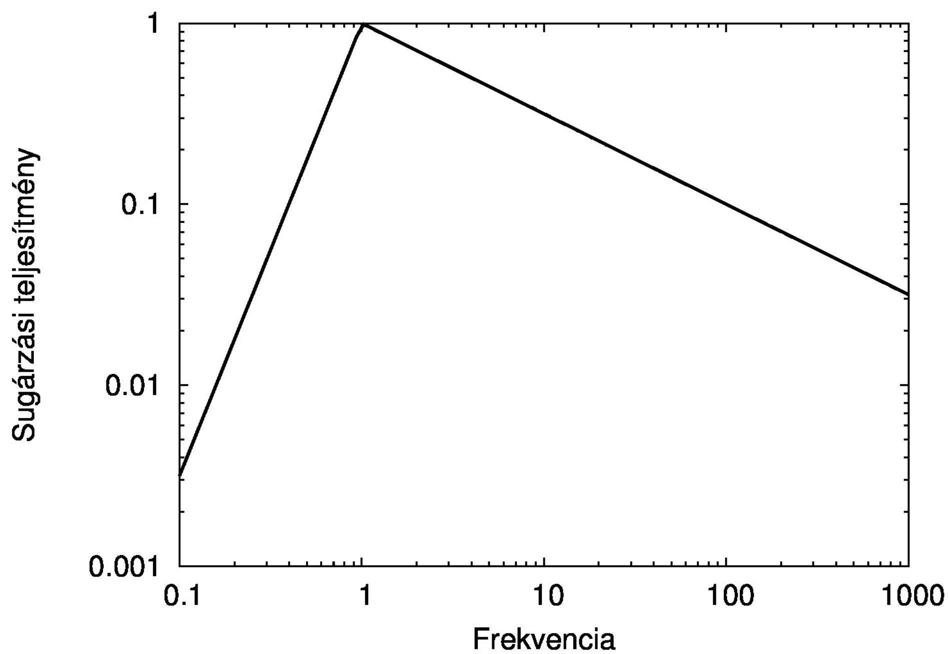
$$F_\omega d\omega \sim \hbar\omega_c(E)\cdot N(E)dE \sim \omega_c\cdot E^{-p}dE \sim \omega_c\cdot\omega_c^{-p/2}\frac{d\omega}{\omega_c^{1/2}} = \omega_c^{-(p-1)/2}d\omega \sim \omega^{-s} \tag{4.29}$$

Látható, hogy az eredő sugárzás spektruma is hatványfüggvény alakú lesz, ennek kitevője a spektrális index, $s=(p-1)/2$,közvetlen kapcsolatban van az elektronok energiaeloszlásának *p* kitevőjével.

A fenti képlet kis frekvenciákon egyre növekvő sugárzási teljesítményt ad, ami minden határon túl nem lehet érvényes, hiszen divergáló fluxust eredményezne. Ennélfogva ilyen alacsony frekvenciákon más fizikai folyamat lép működésbe, ami megakadályozza a végtelen energiák megjelenését. Egyrészt, a hatványfüggvény alakú energiaeloszlás alacsony energiákon már nem feltétlenül teljesül. Másrészt belátható, hogy alacsony frekvenciákon a keletkező szinkrotronsugárzást az azt keltő elektronok elnyelhetik (lásd (4.21) képlet), ez a *szinkrotron-reabszorpció*. Ilyen körülmények között a sugárzás nem jut ki közvetlenül a közegből, csak sokszoros elnyelődés és újra kisugárzódás után. Ez a helyzet analóg a 2.2. fejezetben tárgyalt hőmérsékleti sugárzással, így az ottani képletek az egyensúlyi szinkrotron-sugárzásra is érvényesek (a feketetest-sugárzás képletei függetlenek a sugárzás keletkezésének mechanizmusától). A kT -hez képest alacsony frekvenciákon (energiákon) a feketetest sugárzás fluxusa a Rayleigh-Jeans közelítés értelmében $F \sim kT\,\omega^2/c^2$. Szinkrotron-sugárzás esetén kT helyére az elektronok átlagos E_e energiáját kell behelyettesíteni. (4.28) felhasználásával

$$F \;\sim\; \omega_c^{1/2}\,B^{-1/2}\cdot\omega^2/c^2 \;\sim\; \omega^{5/2}\cdot B^{-1/2} \tag{4.30}$$

A szinkrotron-reabszorpció hatására a spektrum változatlanul hatványfüggvény alakú marad, de meredeksége megváltozik, és a kis frekvenciák felé egyre csökkenő intenzitású lesz (7. ábra).

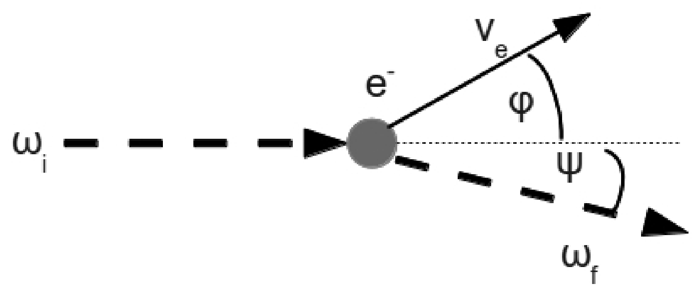


7. ábra: A sugárzás spektruma szinkrotron-reabszorpció esetén

4.4. Compton-szórás, inverz Compton-effektus

Nagy energiájú fotonok elektronokkal való kölcsönhatása a 3.3. fejezetben tárgyalt Thompson-szórástól eltérő módon megy végbe. Ha a foton energiája megközelíti az elektron nyugalmi energiáját, azaz $\hbar\omega \sim m_e c^2$, a foton-elektron ütközés nem lesz többé rugalmas: energiacsere történik az elektron és a foton között, ennek hatására a fotonnak mind a terjedési iránya, mind a frekvenciája megváltozik. Ez a folyamat a *Compton-effektus*.

Vizsgáljuk a folyamatot olyan koordináta-rendszerben, melyben az elektron az ütközés előtt nyugalomban van (lásd 8. ábra). Az ütközés hatására mind a foton, mind az elektron energiája és impulzusa megváltozik. Emiatt a foton energiája csökken (hullámhossza nő), iránya az eredeti irányhoz képest ψ szöggel eltérül, a meglökött elektron pedig v_e sebességgel a φ szöggel jelölt irányba kezd el mozogni.



8. ábra: Compton-szórás

A folyamat során nyilván teljesülnie kell az energia- és impulzusmegmaradásnak. A 8. ábra konfigurációjában irányítsuk az x-tengelyt a bejövő foton irányába (a 8. ábrán pontozott vonallal jelölt irány). Ekkor az energia- és impulzusmegmaradás miatt a foton-elektron párra az alábbi egyenletek érvényesek:

$$\begin{aligned} \hbar\omega_i &= \hbar\omega_f + (\gamma - 1) m_e c^2 \\ \frac{\hbar\omega_i}{c} &= \frac{\hbar\omega_f}{c}\cos\psi + \gamma\, m_e v_e \cos\varphi \\ 0 &= \frac{\hbar\omega_f}{c}\sin\psi - \gamma\, m_e v_e \sin\varphi \end{aligned} \qquad (4.31\text{a-c})$$

ahol γ a meglökött elektron Lorentz-faktora. A három egyenlet kombinációjából kaphatjuk a szórt elektron frekvenciáját megadó képletet:

$$\omega_f = \frac{\omega_i}{1 + \dfrac{\hbar\omega_i}{m_e c^2}(1 - \cos\psi)} \qquad (4.32)$$

Gyakran használatos még a szórt foton hullámhosszára vonatkozó összefüggés:

$$\lambda_f = \lambda_i + \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\psi) = \lambda_i + \lambda_C\, 2\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right) \qquad (4.33)$$

ahol $\lambda_C = h/m_e c$ az elektron Compton-hullámhossza. Látható, hogy a szórás hatására a foton hullámhossza nagyobb lesz, energiát veszít, ami az elektron gyorsítására fordítódik. Többszörös Compton-szórás hatására az eredetileg nagyenergiájú (röntgen-, vagy gamma-) fotonok folyamatosan energiát veszítenek, miközben a közeg szabad elektronjainak kinetikus hőmérséklete egyre nő.

Asztrofizikai közegekben gyakran előfordul a Compton-szórás fordítottja, az *inverz Compton effektus*. Ennek során nagy energiájú, ultrarelativisztikus elektronok ütköznek alacsonyabb energiájú fotonokkal. Így a fotonok nyernek energiát az elektronokkal szemben, és röntgen- vagy gammasugárzás keletkezik. Az inverz Compton-effektus egy fontos hűlési mechanizmus a relativisztikus elektrongázt tartalmazó közegekben (pl. szupernóva-maradványok, vagy forró intergalaktikus gázfelhők).

Az inverz Compton-effektus vizsgálatához vizsgáljuk azt az esetet, amikor a foton a beesési irányba visszaszóródik (azaz $\psi=180^o$). A folyamat az elektronhoz rögzített K' vonatkoztatási rendszerben egy "síma" Compton-szórásnak tekinthető, tehát a szórt foton és a beeső foton energiáját a (4.32) képlet kapcsolja össze. Csakhogy ekkor a K' rendszerben a beeső fotonok a K rendszerhez képest kékeltolódottak lesznek (a K-rendszerben az elektron sugárzással "szembe" mozog). A K-rendszerben viszont a szórt fotonok a Doppler-boosting miatt (4.2. fejezet) energiát nyernek. A (4.11) és (4.12) formulák alkalmazásával megmutatható, hogy $\omega'_i=\omega_i\gamma_i(1+\beta_i)$ és $\omega_f=\omega'_f\gamma_i(1+\beta_i)$, ahol γ_i az elektron Lorentz-faktora a K-rendszerben az ütközés előtt. Kihasználva, hogy $\psi=\psi'=180^o$, a visszaszórt fotonok frekvenciája (energiája) a megfigyelő számára

$$\omega_f \;=\; \omega_i\,\frac{\gamma_i^2(1+\beta_i)^2}{1+2\hbar\omega_i/(m_e c^2)} \;\approx\; \omega_i\,\frac{4\gamma_i^2}{1+2\hbar\omega_i/(m_e c^2)} \tag{4.34}$$

lesz, ahol a közelítésnél kihasználtuk, hogy ultrarelativisztikus elektronokra $\beta_i=(v_e/c)_i \;\approx\; 1$. Látható, hogy a visszaszórt fotonok energiája a Lorentz-faktor négyzetével arányosan nő, ami igen nagy energiájú sugárzást eredményezhet.

A Compton szórás hatáskeresztmetszete első közelítésben hasonló a Thompson szóráséhoz (lásd (3.28) és (3.32)). Ha a foton energia sokszorosan felülmúlja az elektron nyugalmi energiáját ($\hbar\omega\gg m_e c^2$), akkor az itt nem részletezett számítások a *Klein-Nishina hatáskeresztmetszet*et eredményezik:

$$\sigma_{KN} \;=\; \frac{r_e^2}{2}\left(\frac{\omega_f}{\omega_i}\right)\left(\frac{\omega_i}{\omega_f}+\frac{\omega_f}{\omega_i}-\sin^2\psi\right) \tag{4.35}$$

Sok különböző sebességű elektron által keltett inverz-Compton sugárzás vizsgálatához először idézzük fel, hogy egyetlen elektron által szórt sugárzás a 3.3. fejezetben bemutatott gondolatmenet értelmében (az elektronhoz rögzített K' vonatkoztatási rendszerben) $P'\approx\sigma_T c u'$, ahol u' a beeső sugárzás energiasűrűsége, σ_T a Thompson-féle hatáskeresztmetszet. A megfigyelő rendszerében (4.13) és (4.14) értelmében $u'=u/\delta_D^2 \;=\; u\left(\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2\right)$ ahol θ az elektron sebességvektora és a szórt foton terjedési iránya közti szög a megfigyelő rendszerében. A sugárzási tér átlagos energiasűrűsége, minden irányra átlagolva, ekkor a következő lesz:

$$\langle u'\rangle \;=\; \langle u\rangle\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\int\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \;=\; \langle u\rangle\cdot\gamma^2\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right) \tag{4.36}$$

Ezzel az inverz Compton-szórás által a sugárzási térbe transzportált nettó teljesítménytöbblet így alakul:

$$P_{IC} \;=\; \sigma_T c\,u\,\gamma^2\left(1+\frac{1}{3}\beta^2\right)-\sigma_T c\,u \;=\; \frac{4}{3}\sigma_T c\,u\,\gamma^2\beta^2 \tag{4.37}$$

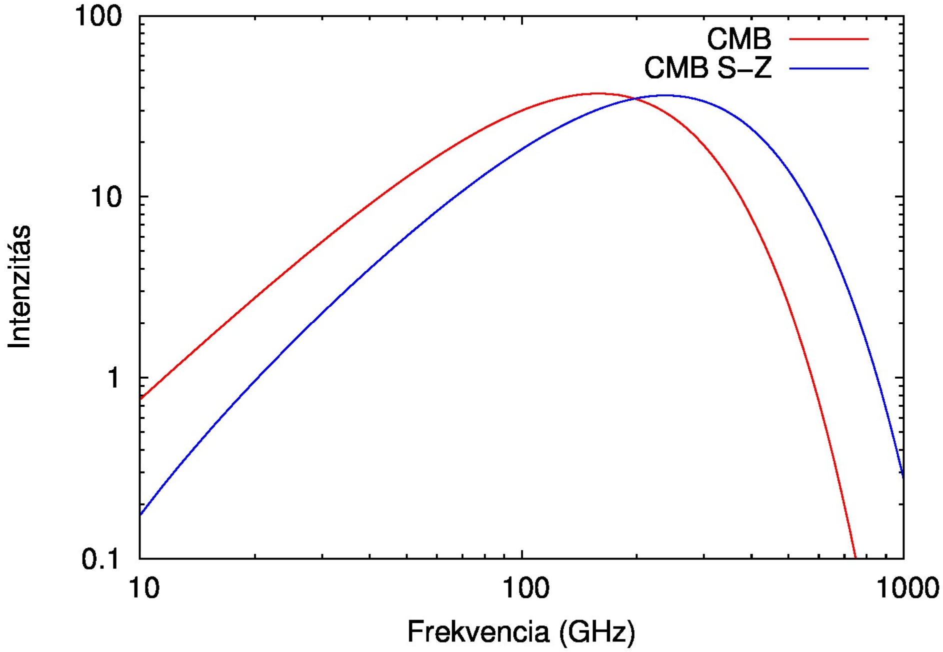
(4.37) kifejezése nagyon hasonló a szinkrotron sugárzás teljesítményét leíró (4.24) összefüggéshez, csak az inverz Compton-szórás képletében értelemszerűen a mágneses tér energiasűrűsége helyett a sugárzási tér energiasűrűsége szerepel.

Ha a korábbiakhoz hasonlóan feltesszük, hogy az elektronok Lorentz-faktorának (energiájának) eloszlása hatványfüggvény alakú, akkor N elektron által inverz Compton-mechanizmussal kisugárzott teljesítmény:

$$P = \int P_{IC}(\gamma) N_0 \gamma^{-p} d\gamma = \frac{4}{3} \sigma_T c \langle u \rangle \frac{N_0}{3-p} \left(\gamma_{max}^{3-p} - \gamma_{min}^{3-p} \right) \tag{4.38}$$

A 4.3. fejezetben tárgyalt gondolatmenettel teljesen analóg módon megmutatható, hogy az inverz Compton-mechanizmus is hatványfüggvény alakú spektrum kialakulásához vezet, amelynek spektrális indexe a szinkrotron-sugárzáséhoz hasonlóan $s = (p-1)/2$.

Az inverz Compton effektus felelős a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás (cosmic microwave background, CMB) spektrumának módosulásáért galaxishalmazok irányában. A galaxishalmazokat forró intergalaktikus gáz tölti ki, amely jelentős röntgensugárzást bocsát ki bremsstrahlung folyamat során. A kozmikus háttérsugárzás (T ~ 3 K) alacsony energiájú fotonjai a forró gáz szabad elektronjain inverz-Compton folyamat révén szóródnak, ezáltal energiatöbbletre tesznek szert. Ennek hatására a megfigyelt CMB spektrum csúcsa a nagyobb energiák (magasabb hőmérsékletek) irányába tolódik el (9. ábra). Ez a folyamat a *Szunyajev-Zeldovics (Sunyaev-Zel'dovich) effektus*.



9. ábra: A Szunyajev-Zeldovics effektus hatása a CMB spektrumára

5. A sugárzás terjedése asztrofizikai közegekben

5.1. Alapfogalmak

Az alábbiakban a sugárzás terjedésének makroszkópikus mennyiségeken keresztüli leírásával foglalkozunk.

Tekintsünk a sugárzó közegben egy tetszőleges, *dA* területű (infinitezimális) felületelemet! Erről a felületről, annak normálisától θ irányba, dΩ térszögbe kibocsátott monokromatikus sugárzási teljesítmény:

$$\frac{dE_\nu}{dt} = dP_\nu = I_\nu \cos\theta \, dA \, d\Omega \, d\nu \qquad (5.1)$$

ahol I_ν a monokromatikus specifikus intenzitás. Látható, hogy a specifikus intenzitás irányfüggő mennyiség. Ennek irány szerinti átlagértéke a közepes intenzitás:

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi}\int I_\nu \, d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} I_\nu \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \qquad (5.2)$$

ahol a térszöget gömbi polárkoordinátákban fejeztük ki a szokásos jelölésekkel. Egyszerűen belátható, hogy az előző fejezetekben gyakran alkalmazott sugárzási energiasűrűség (u_ν) és a specifikus intenzitás az alábbi kapcsolatban áll egymással:

$$u_\nu = \int \frac{I_\nu}{c} d\Omega \quad \text{, izotrop sugárzási térben} \quad u_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu \qquad (5.3\ \text{a-b})$$

A specifikus intenzitás segítségével egyszerűen értelmezhető egy adott felületen áthaladó sugárzási energia (azaz a fluxus), illetve impulzus (vagyis a sugárnyomás). (5.1) alapján egységnyi felületen egységnyi idő alatt minden irányból áthaladó energia, a fluxus, így írható:

$$F_\nu = \int I_\nu \cos\theta \, d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos\theta \, d\theta + 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I_\nu \cos\theta \, d\theta = F_\nu^+ - F_\nu^- \qquad (5.4)$$

ahol a sugárzást felbontottuk egy "kifelé" (F_ν^+) és "befelé" (F_ν^-) irányuló komponensre. Izotrop sugárzási térben az intenzitás kiemelhető az integrálból, ezért $F_\nu^+ = F_\nu^- = \pi I_\nu$, tehát a teljes fluxus nulla.

Hasonlóan, a "monokromatikus" sugárnyomás izotrop sugárzási térben:

$$P_{rad}(\nu) = \frac{1}{c}\int I_\nu \cos^2\theta \, d\Omega = \frac{2\pi}{c}\int_0^{\pi} I_\nu \cos^2\theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3c} I_\nu \qquad (5.5)$$

5.2. A transzferegyenlet

Ha a sugárzás valamilyen közegen halad keresztül, a fény-anyag kölcsönhatás folyamatai miatt erőssége megváltozik. A megváltozás erőssége első közelítésben arányos a megtett úttal, a közeg sűrűségével és a kölcsönhatási folyamatok valószínűségével. Konkrétabban, infinitezimális *ds* távolság megtétele során a specifikus intenzitás megváltozása:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu \rho I_\nu + \rho j_\nu - \chi_\nu \rho (I_\nu - J_\nu) \tag{5.6}$$

ahol a jobb oldalon az első tag az abszorpciót, a második a spontán emissziót, a harmadik pedig a szórást veszi figyelembe. κ_ν és χ_ν a tömegegységre jutó abszorpciós és szórási koefficiensek, j_ν az egységnyi tömegre vonatkozó spontán emissziós koefficiens, J_ν pedig a közepes intenzitás (lásd (5.2)). A szórást leíró rész azért áll két tagból, mert az első a "kiszóródást" (vagyis az intenzitás csökkenését), a másik pedig az adott irányba történő "beszóródást" írja le, ez utóbbinál kihasználtuk azt az egyszerűsítő feltevést, hogy a szórási koefficiens nem függ az iránytól (izotrop szórás), valamint a sugárzási tér izotrópiáját.

(5.6) átrendezésével a transzferegyenletet az irodalomban szokásos alakra hozhatjuk. A jobb oldalon a specifikus intenzitást kiemelve:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -(\kappa_\nu + \chi_\nu)\rho I_\nu + \rho(j_\nu + \chi_\nu J_\nu) = -k_\nu \rho I_\nu + \rho(j_\nu + \chi_\nu J_\nu) \tag{5.7}$$

ahol bevezettük a $k_\nu = \kappa_\nu + \chi_\nu$ extinkciós koefficienst. Ebből egyszerű átrendezéssel adódik:

$$\frac{1}{k_\nu \rho}\frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu + \frac{\chi_\nu J_\nu + j_\nu}{\kappa_\nu + \chi_\nu} = -I_\nu + S_\nu \tag{5.8}$$

ahol S_ν az ún. forrásfüggvény. Ez a transzferegyenlet általános alakja, tetszőleges irányban érvényes.

A közeg geometriáját, szimmetriatulajdonságait figyelembe véve az általános (5.8) egyenletet még tovább is alakíthatjuk. Például gyakran alkalmazzák a plánparallel alakú közeg közelítést, ami jól használható csillaglégkörökben terjedő sugárzás leírására. Ekkor a közeg normálisának irányában mért *dr* távolság és a tetszőleges irányú *ds* távolság közti kapcsolat egyszerűen $ds = dr/\cos\theta = dr/\mu$ ahol θ a plánparallel közeg normálisa és a kérdéses irány közti szög, valamint bevezettük az irodalomban szokásos $\mu = \cos\theta$ jelölést. Definiáljuk a plánparallel közeg egy adott rétegében az *optikai mélységet* az alábbi módon:

$$d\tau_\nu = -k_\nu \rho\, dr = -k_\nu \rho \mu\, ds \quad \rightarrow \quad k_\nu \rho\, ds = -\frac{d\tau_\nu}{\mu} \tag{5.9}$$

Ezt behelyettesítve (5.8)-ba, a transzferegyenlet plánparallel alakú közegekben érvényes alakját kaphatjuk:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \tag{5.10}$$

Ennek előnye, hogy minden irányra ugyanez az egyenlet érvényes, és a különböző irányokat egyszerűen a μ paraméter különböző értékeivel vehetjük figyelembe.

Gyakran használatos még a transzferegyenlet fluxusra vonatkozó alakja is. A fluxus (5.4) definícióját figyelembe véve, (5.10) minden irányba történő integrálásával kaphatjuk az alábbi egyenletet:

$$\frac{1}{4\pi}\frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu - S_\nu \tag{5.11}$$

ahol feltettük, hogy a forrásfüggvény irányfüggetlen. Ez abban az esetben elég jó közelítés, ha az extinkciós koefficiensben a valódi abszorpció dominál a szóráshoz képest, illetve ha a szórás izotróp. Mindkét feltevés nagyjából teljesül nem túl forró csillagok fotoszférájának közelében.

5.3. A transzferegyenlet megoldásai

Az (5.10) transzferegyenlet formális általános megoldása egyszerűen kiszámítható. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $e^{-\tau_\nu/\mu}$ -vel és integráljuk két tetszőleges optikai mélység között:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}e^{-\tau_\nu/\mu} - \frac{1}{\mu}I_\nu e^{-\tau_\nu/\mu} = -\frac{1}{\mu}S_\nu e^{-\tau_\nu/\mu} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d\tau_\nu}\left(I_\nu e^{-\tau_\nu/\mu}\right) = -\frac{1}{\mu}S_\nu e^{-\tau_\nu/\mu} \tag{5.12}$$

$$\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \frac{d}{d\tau_\nu}\left(I_\nu e^{-\tau_\nu/\mu}\right)d\tau_\nu = I_\nu(\tau(b)) - I_\nu(\tau(a)) = \frac{1}{\mu}\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} S_\nu e^{-\tau_\nu/\mu}\,d\tau_\nu \tag{5.13}$$

Ebből egyszerű átrendezéssel kaphatjuk az általános megoldást:

$$I_\nu(\tau(b)) = I_\nu(\tau(a))e^{-[\tau(a)-\tau(b)]/\mu} + e^{\tau(b)/\mu}\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} S_\nu e^{-\tau_\nu/\mu}\frac{d\tau_\nu}{\mu} \tag{5.14}$$

(5.14) csak formális megoldásnak tekinthető, mivel kiszámításához szükség van a forrásfüggvény optikai mélységtől való függésének ismeretére. Ez általában nem ismert, mivel maga a sugárzás is módosítja a lokális atomi állapotokat, amelyek közvetlen hatással vannak a forrásfüggvényre. A jobb- és baloldal tehát nem független egymástól. (5.14) mégis érdekes, mivel bizonyos körülmények között néhány egyszerűsítő feltevésből hasznos becsléseket szolgáltathat.

Egy ilyen egyszerűsítő feltevés az optikailag vékony (átlátszó), saját sugárzást kibocsátó gázfelhő esetében az, hogy nincs külső megvilágítás és a forrásfüggvény független a helytől. Ha a felhő teljes optikai mélysége $\tau(a)$, akkor az intenzitás a megfigyelő felé eső szélén (ahol definíció szerint $\tau(b)=0$):

$$I_\nu(0) = S_\nu\int_0^{\tau(a)} e^{-\tau_\nu/\mu}\frac{d\tau_\nu}{\mu} = S_\nu\left(1-e^{-\tau(a)}\right) \tag{5.15}$$

Egy másik egyszerű példának tekintsük a teljesen átlátszatlan, végtelen optikai mélységű csillag felszínén megfigyelhető sugárzást, és tegyük fel, hogy a forrásfüggvény az optikai mélység lineáris függvénye:

$$I_\nu(0) = \int_0^\infty S_\nu e^{-\tau_\nu/\mu} \frac{d\tau_\nu}{\mu} = \int_0^\infty (A\mu x + B) e^{-x} dx = A\mu + B = A\cos\theta + B \qquad (5.16)$$

A fenti kifejezés értelmében a csillag felszínéről érkező sugárzás irányfüggű, így a csillagkorong közepe ($\theta = 0$) fényesebb, mint a széle. Ez a jelenség a Napon jól ismert *szélsötétedés*.

Mivel a specifikus intenzitás az optikailag felbonthatatlan csillagok esetén közvetlenül nem mérhető, érdemes kiszámítani a csillag felszínéről a megfigyelő felé eső térrészbe kisugárzott fluxust is. (5.16) a megfigyelő irányába eső féltérre való integrálásából kapjuk:

$$F_\nu^+ = 2\pi \int_0^1 I_\nu \mu d\mu = 2\pi \int_0^\infty S_\nu \left(\int_0^1 e^{-\tau_\nu/\mu} d\mu \right) d\tau_\nu = 2\pi \int_0^\infty S_\nu E_2(\tau_\nu) d\tau_\nu \qquad (5.17)$$

ahol kihasználtuk, hogy a forrásfüggvény izotróp, valamint alkalmaztuk az exponenciális integrál matematikából ismert definícióját:

$$E_n(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zy}}{y^n} dy \qquad (5.18)$$

Az exponenciális integrál analitikusan csak speciális esetekben számítható ki, viszont érdekes aszimptotikus és rekurziós tulajdonságokkal rendelkezik:

$$E_n(0) = \frac{1}{n-1}; \quad E_n(\infty) = 0; \quad \frac{dE_n}{dz} = -E_{n-1}; \quad \int E_n dz = -E_{n+1} \qquad (5.19)$$

Ha beírjuk a forrásfüggvény feltételezett $S_\nu = A\tau_\nu + B$ alakját, (5.19) felhasználásával adódik:

$$F_\nu^+ = 2\pi A \frac{1}{3} + 2\pi B \frac{1}{2} = \pi (A \frac{2}{3} + B) = \pi S_\nu (2/3) \qquad (5.20)$$

azaz a megfigyelhető fluxus a forrásfüggvény $\tau_\nu = 2/3$ optikai mélységnél felvett értékével egyenesen arányos. Ez az *Eddington-Barbier reláció*. Amennyiben a szórás elhanyagolható és a közegben lokális termodinamikai egyensúly van (lásd 2.2. fejezet), akkor a forrásfüggvény megegyezik a Planck-függvénnyel:

$$S_\nu(\tau_\nu) = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = B_\nu(T(\tau_\nu)) \qquad (5.21)$$

vagyis ekkor (5.20) értelmében a megfigyelt fluxus egy olyan Planck-függvény lesz, melynek hőmérséklete (*effektív hőmérséklet*) a csillaglégkörben a $\tau_\nu = 2/3$ optikai mélységnél lévő hőmérséklet lesz.

5.4. A szórás szerepe

A szórás jelenléte bonyolítja a forrásfüggvény kifejezését. Az (5.8) képletben szereplő általános defjníció értelmében:

$$S_\nu = \frac{j_\nu+\chi_\nu J_\nu}{\kappa_\nu+\chi_\nu} = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}\cdot\frac{\kappa_\nu}{\kappa_\nu+\chi_\nu} + J_\nu\cdot\frac{\chi_\nu}{\kappa_\nu+\chi_\nu} = B_\nu\cdot\alpha_\nu + J_\nu(1-\alpha_\nu) \tag{5.22}$$

Látszik, hogy ha a szórás is jelentős, akkor általában a forrásfüggvény nem egyezik meg a Planck-függvénnyel. Gyenge szórás esetén $\chi_\nu \ll \kappa_\nu$, így $\alpha_\nu \approx 1$, ekkor $S_\nu \approx B_\nu$, viszont erős szórás esetén $\alpha_\nu \approx 0$, ezért $S_\nu \approx J_\nu$. Tehát tiszta szórás esetében, amikor a valódi abszzorpció teljesen elhanyagolható, a forrásfüggvény a közepes intenzitással egyezik meg. Ekkor a fluxusra vonatkozó transzferegyenletben (lásd (5.11) képlet) a jobb oldalon 0 áll, amiből azonnal következik, hogy tiszta szórás esetén plánparallel közegben a teljes fluxus állandó.

Általánosabb esetben, amikor mind abszzorpció, mind szórás jelen van, a megfigyelhető fluxus (F_ν^+) kiszámításához szorozzuk meg (5.10) mindkét oldalát μ/2-vel és integráljuk ki minden irányra:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mu^2\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}d\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}I_\nu\mu\, d\mu-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}S_\nu\mu\, d\mu = \frac{1}{4\pi}F_\nu-\frac{J_\nu}{2}\int_{-1}^{1}\mu\, d\mu = \frac{F_\nu}{4\pi} \tag{5.23}$$

A bal oldal kiszámításához alkalmazzunk az Eddington-közelítést: tegyük fel, hogy a sugárzás izotróp, de oly módon, hogy a konstans értéke a megfigyelő felé mutató, illetve az azzal ellentétes féltérben különböző. Jelölje I_ν^+ a megfigyelő felé ("kifelé") eső térrészben lévő intenzitást. Ekkor egyszerűen belátható, hogy

$$F_\nu = 2\pi I_\nu^+\int_{0}^{1}\mu\, d\mu + 2\pi I_\nu^-\int_{-1}^{0}\mu\, d\mu = \pi(I_\nu^+-I_\nu^-) \tag{5.24}$$

illetve

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mu^2\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu}d\mu = \frac{d}{d\tau_\nu}\left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}I_\nu\mu^2\, d\mu\right) = \frac{d}{d\tau_\nu}\left(\frac{1}{2}I_\nu^+\int_{0}^{1}\mu^2 d\mu-\frac{1}{2}I_\nu^-\int_{0}^{-1}\mu^2 d\mu\right) = \frac{1}{6}\frac{d}{d\tau_\nu}(I_\nu^+ + I_\nu^-) \tag{5.25}$$

(5.25)-ből látható, hogy (5.23) bal oldala a közepes intenzitással arányos, hiszen Eddington-közelítésben $J_\nu=(I_\nu^+ + I_\nu^-)/2$. Ennélfogva az (5.23) egyenlet Eddington-közelítésben érvényes alakja:

$$\frac{1}{3}\frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{F_\nu}{4\pi} \tag{5.26}$$

A fluxusra vonatkozó (5.11) egyenlet értelmében:

$$\frac{d}{d\tau_\nu}\left(\frac{F_\nu}{4\pi}\right) = J_\nu-\alpha_\nu B_\nu-(1-\alpha_\nu)J_\nu = \alpha_\nu J_\nu-\alpha_\nu B_\nu \tag{5.27}$$

Így a kettő összevetéséből:

$$\frac{1}{3}\frac{d^2 J_\nu}{d\tau_\nu^2} - \alpha_\nu J_\nu = -\alpha_\nu B_\nu \tag{5.28}$$

Ez egy másodfokú, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet, melynek általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege adja. A homogén egyenlet általános megoldása közvetlen integrálással azonnal adódik:

$$J_\nu = C\cdot\exp[-\tau_\nu\sqrt{3\alpha_\nu}] \tag{5.29}$$

ahol *C* integrálási konstans. Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megtalálásához tegyük fel, hogy a közeg hőmérsékleteloszlása olyan, hogy a Planck-függvény az optikai mélység lineáris függvénye. Ez (5.16) értelmében a csillagatmoszférákban gyakran teljesül. Ekkor (5.28) egy partikuláris megoldása egyszerűen $J_\nu = B_\nu$, mivel a második derivált a lineáris függés értelmében eltűnik, a maradék két tag pedig kiejti egymást. Az általános megoldás ezzel így alakul:

$$J_\nu = B_\nu + C\exp[-\tau_\nu\sqrt{3\alpha_\nu}] \tag{5.30}$$

Az integrálási konstans meghatározásához használjuk fel a csillag felszínén érvényes határfeltételt:

$$\tau_\nu = 0 \quad \rightarrow \quad J_\nu(0) = \frac{1}{2} I_\nu^+ = B_\nu(0) + C = b + C \tag{5.31}$$

ahol kihasználtuk, hogy a feltevésünk értelmében $B_\nu(\tau) = a\tau_\nu + b$. Másrészt (5.26) alapján

$$F_\nu = \frac{4\pi}{3}\frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{4\pi}{3}\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \frac{4\pi C}{3}(-\sqrt{3\alpha_\nu})e^{-\tau_\nu\sqrt{3\alpha_\nu}} = \frac{4\pi}{3}\cdot a\left[1 - \frac{C\sqrt{3\alpha_\nu}}{a}\cdot e^{-\tau_\nu\sqrt{3\alpha_\nu}}\right] \tag{5.32}$$

amiből a csillag felszínén mérhető fluxusra adódik, hogy

$$F_\nu(\tau_\nu = 0) = F_\nu^+ = \pi I_\nu^+ = \frac{4\pi}{3}\cdot a\left[1 - \frac{C\sqrt{3\alpha_\nu}}{a}\right] \tag{5.33}$$

(5.31) és (5.33) összevetéséből látszik, hogy $F_\nu(0) = 2\pi(b+C)$, amiből *C*-t kifejezve a következő öszefüggést kapjuk:

$$C = \frac{\frac{2}{3}a - b}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3\alpha_\nu}} \tag{5.34}$$

Ezt visszahelyettesítve (5.33)-ba, a csillag felszínén mérhető fluxusra egyszerű átalakítások után adódik:

$$F_\nu^+ = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{a + b\sqrt{3\alpha_\nu}}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3\alpha_\nu}} = \frac{2\pi}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3\alpha_\nu}}\cdot\left[B_\nu\left(\frac{2}{3}\right) + b\cdot\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{3\alpha_\nu}\right)\right] = K_1\pi B_\nu\left(\frac{2}{3}\right) + K_2 \tag{5.35}$$

Látható, hogy a tiszta abszorpció esetén kapható $F_\nu^+ = \pi B_\nu(2/3)$ formulához képest a szórás a fluxus frekvenciafüggését nem változtatja meg, abszolút értékét azonban igen: a spektrum ekkor egy "higított feketetest" (*diluted blackbody*) spektrumra hasonlít.

5.5. A csillagközi por hatása a megfigyelésekre

A csillagászati megfigyelések értelmezésénél figyelembe kell venni azt a tényt is, hogy a vizsgált objektum és a földi megfigyelő közti tér nem üres, hanem igen inhomogén sűrűségű csillagközi anyag tölti ki. A csillagközi anyag relatíve sűrűbb a galaxisokon (így a Tejútrendszeren) belül, és viszonylag ritkább a galaxisok közti intergalaktikus térben, de néha ott sem elhanyagolható. A csillagközi anyag két komponensű, gázból és porból áll, a gáz/por tömegarány nagyságrendileg kb. 100:1.

Ebben a fejezetben a csillagközi por hatását vizsgáljuk a megfigyelt objektum fényességére és spektrumára. A csillagközi por részecskéi többnyire szubmikronos méretűek, ezért a poron áthaladó fotonok elnyelődnek, ill. szóródnak a porrészecskéken. Az abszorpció inkább a hullámhossznál nagyobb méretű szemcséken jelentős, míg a hullámhossz nagyságrendjébe eső, vagy annál kisebb részecskékre a szórás jellemző.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy minden porszemcse azonos r_g sugarú gömb. Ekkor az extinkció hatáskeresztmetszetét az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\sigma_\lambda \;=\; \pi r_g^2 Q_\lambda \;=\; \pi r_g^2 (Q_\lambda^{ab} + Q_\lambda^{sc}) \tag{5.36}$$

ahol Q_λ -val jelöltük a porszemcse dimenziótlan "extinkciós hatásfokát" (*extinction efficiency*, az első tag az abszorpciót, míg a második a szórást veszi figyelembe). Tegyük fel, hogy a csillagközi térben a helyfüggő porkoncentráció n(r) és a sugárzó objektum tőlünk D távolságra helyezkedik el. Ekkor a mért fluxus:

$$F_\lambda \;=\; F_{0,\lambda} \cdot \exp[-\sigma_\lambda \int_0^D n(r)\,dr] \;=\; F_{0,\lambda} e^{-\sigma_\lambda N_d} \;=\; F_{0,\lambda} e^{-\tau_d} \tag{5.37}$$

ahol N_d a por oszlopsűrűsége, τ_d az objektum optikai mélysége a csillagközi anyagra vonatkozólag. (5.37)-et a megfigyelő csillagászatban szokás magnitúdóban kifejezni:

$$m_\lambda \;=\; -2.5 \log_{10} F_\lambda + Z_\lambda \;=\; m_{0,\lambda} + 2.5 \log_{10} e \;\; \sigma_\lambda N_d \;=\; m_{0,\lambda} + 1.086\,\tau_d \;=\; m_{0,\lambda} + A_\lambda \tag{5.38}$$

Látható, hogy az objektum fényessége csökken (a magnitúdó növekszik), és a csökkenés mértéke hullámhosszfüggő. Az A_λ tényezőt *totális extinkciós koefficiensnek* nevezzük.

Hasznosnak bizonyult az extinkció mértékét különböző hullámhosszakon összehasonlítani, és az így kapható szelektív extinkciós koefficienst vizsgálni. Például ha a Johnson-rendszer B és V szűrőfüggvényének hullámhosszán vett méréseket hasonlítjuk össze, akkor (5.38) értelmében

$$m_B - m_V = B - V \;=\; (B-V)_0 + A_B - A_V \;=\; (B-V)_0 + E(B-V) \tag{5.39}$$

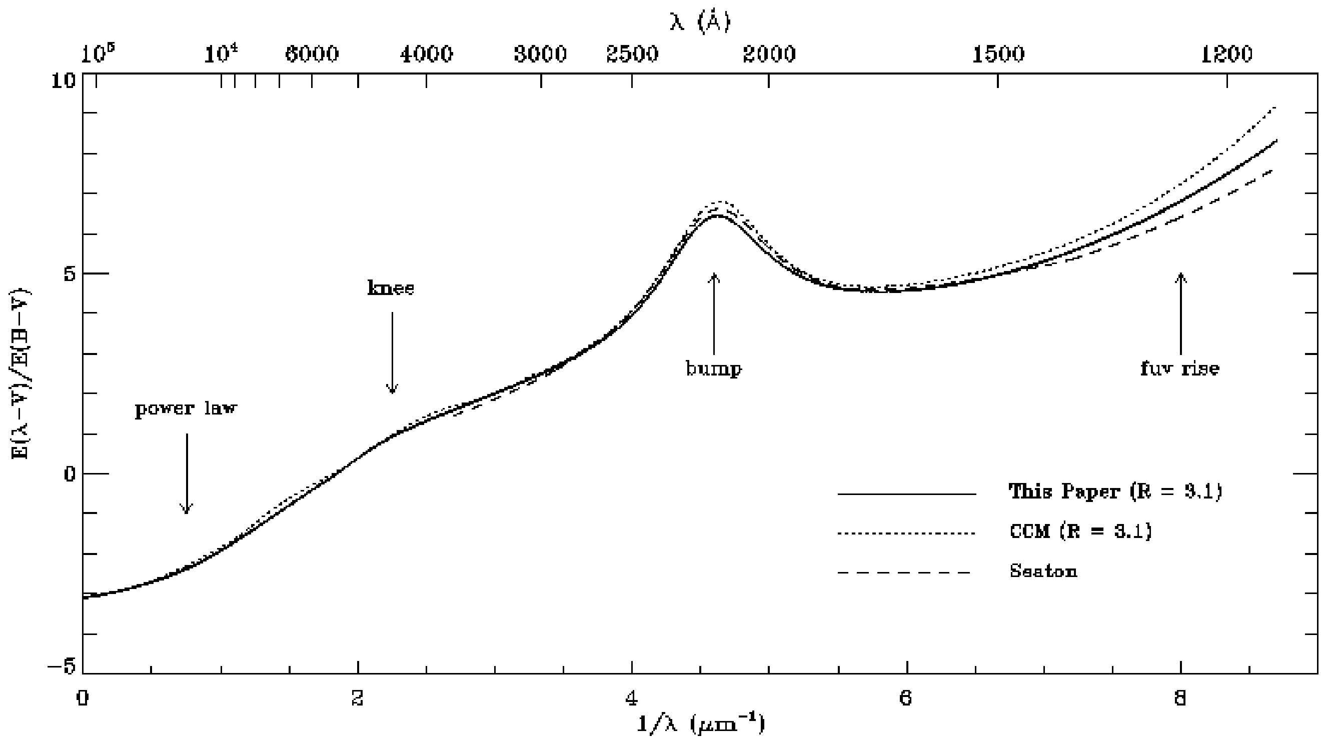
ahol $(B-V)$ az objektum színindexe, a 0 index a csillagközi portól mentes, "valódi" színindexet jelöli. Mivel az extinkció az optikai tartományban főként a porszemcséken történő Mie-szórásból származik, melyre $\sigma_\lambda \sim 1/\lambda$, az extinkció hatásfoka a rövidebb hullámhosszak felé nő. Ennélfogva $A_B - A_V = E(B-V) > 0$, tehát az objektum színindexe nő, vörösödik. *E(B-V)* neve *szín-excesszus*, vagy *vörösödési együttható*.

Az intersztelláris extinkciót szokás az alábbi normált formában is kifejezni:

$$\frac{A_\lambda - A_V}{A_B - A_V} = \left(\frac{A_\lambda}{A_V} - 1\right)\frac{A_V}{E(B-V)} = \left(\frac{A_\lambda}{A_V} - 1\right) R_V \qquad (5.40)$$

ahol R_V a totális és szelektív extinkció aránya, a *"vörösödési törvény"*. A tapsztalat szerint a Tejútrendszerben (és feltehetően más galaxisokban is) $R_V \approx 3.1$ a legtöbb irányban, de egyes nagy porsűrűségű területeken $R_V > 5$ is előfordulhat.

A mérések szerint a Tejútrendszerben az extinkció a 10. ábrán látható módon függ a hullámhossztól (forrás: Fitzpatrick, 1999).



10. ábra: Az extinkciós tényező hullámhosszfüggése (forrás: http://ned.ipac.caltech.edu/level5/Fitzpatrick/Fitz2_1.html)

Végezetül, az intersztelláris por oszlopsűrűségét szokás a por helyett az adott irányban látszó teljes intersztelláris hidrogén tömegével kifejezni, amely a portól függetlenül mérhető. Ha a por és a gáz tömegaránya $R_{g/d}$, akkor (5.38) értelmében:

$$A_V = 1.086\,\sigma_\lambda N_g = 1.086\,\sigma_\lambda R_{d/g} N_H \qquad (5.41)$$

ahol N_H a hidrogén oszlopsűrűsége. Bohlin és mtsai (1978) szerint $A_V / N_H = 5.35 \cdot 10^{-22}$ mag cm^2.

Felhasznált irodalom

Bohlin, R.C., Savage, B. D., Drake, J. F. 1978, "A survey of interstellar H I from L-alpha absorption measurements. II" The Astrophysical Journal 224, 132

Bowers, R., Deeming, T. 1984, "Astrophysics I -- Stars", Jones and Bartlett Publ., Sudbury, MA

Courvoisier, Th. J.-L., 2013, "High Energy Astrophysics -- An Introduction" Astronomy & Astrophysics Library, Springer, Heidelberg, Germany

Fitzpatrick, E. L. 1999, "Correcting for the Effects of Interstellar Extinction" Publications of the Astronomical Society of the Pacific 111, 63

Gray, D. F. 1992, "The Observation and Analysis of Stellar Photospheres" 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK

Harwit. M. 1998, "Astrophysical Concepts" 3rd edition, Astronomy & Astrophysics Library, Springer-Verlag, New York

Osterbrock, D. E. 1989, "Astrophyics of Gaseous Nebulae and Active Galactic Nuclei" University Science Books, Mill Valey, CA

van Putten, M.H.P.M, Levinston, A. 2012, "Relativistic Astrophysics of the Transient Universe" Cambridge University Press, New York