Kvantum marginális probléma és összefonódási politópok

Vrana Péter

Budapesti műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Geometria Tanszék

2014. október 2.

Összetett rendszerek

Jelölések

- k darab részrendszer
- $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_k$ a részek Hilbert-tere
- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_k$ az összetett rendszer Hilbert-tere
- állapotok: $\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{\varrho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | \varrho \geq 0, \operatorname{Tr} \varrho = 1\}$
- tiszta állapotok: $\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) | \varrho^2 = \varrho\}$

Összefont állapotok

- $\varrho = \varrho_1 \otimes \cdots \otimes \varrho_k$ neve szorzatállapot $(\varrho_i \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_i))$
- ezek konvex kombinációit szeparáltnak nevezzük
- a többi állapot összefont
- tiszta állapot szeparált $\iff$ szorzat

Összefont állapotok transzformációi

Lokális operációk és klasszikus kommunikáció

- összefonódás: nem klasszikus korreláció
- lokális transzformációk nem „növelhetik”

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_k$$

ahol T_i tetszőleges csatornák (esetleg nyomnemnövelő is lehet)

- klasszikus kommunikáció nem „növelheti”

$$cc_{ij}(\varrho_i) = \left(\langle 0|\varrho|0\rangle |0\rangle\langle 0|_j + \langle 1|\varrho|1\rangle |1\rangle\langle 1|_j\right)$$

ahol $\varrho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$

- ilyenek tenzorszorzatainak, kompozícióinak osztálya LOCC

Összefont állapotok transzformációi

Determinisztikus transzformációk

- $\varrho \xrightarrow{\text{LOCC}} \sigma$, ha létezik $\Lambda \in \text{LOCC}$, amire $\Lambda(\varrho) = \sigma$
- ilyenkor ϱ „erősebben” összefont mint σ
- ha $\varrho \xrightarrow{\text{LOCC}} \sigma$ és $\sigma \xrightarrow{\text{LOCC}} \varrho$, akkor ekvivalensek
- ha $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\sigma = |\varphi\rangle\langle\varphi|$: pontosan akkor ekvivalensek, ha $\exists U_1, \dots, U_k$ unitérek, amire $(U_1 \otimes \cdots \otimes U_k)|\psi\rangle = |\varphi\rangle$

Sztochasztikus transzformációk

- $\varrho \xrightarrow{\text{SLOCC}} \sigma$, ha létezik $\Lambda \in \text{LOCC}$ és $\alpha > 0$, amire $\Lambda(\varrho) = \alpha\sigma$
- $\varrho \xrightarrow{\text{SLOCC}} \sigma$ és $\sigma \xrightarrow{\text{SLOCC}} \varrho$ gyengébb ekvivalenciareláció
- ha $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\sigma = |\varphi\rangle\langle\varphi|$: pontosan akkor ekvivalensek, ha $\exists A_1, \dots, A_k$ invertálhatók, amire $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_k)|\psi\rangle = |\varphi\rangle$

Összefonódási osztályok

Példa: két részrendszer tiszta állapotai

- $k = 2$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^n$
- kanonikus alak (szinguláris érték dekompozíció)

$$\psi = \sum_{ij} \psi_{ij} |ij\rangle \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \psi_{11} & \cdots & \psi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n1} & \cdots & \psi_{nn} \end{pmatrix} = U_1 D U_2^T$$

  ahol D diagonális nemnegatív elemekkel, csökkenő sorrendben
- D diagonális elemei $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$, ahol λ_i a $\mathrm{Tr}_2(|\psi\rangle\langle\psi|)$ sajátértékei
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ meghatározza a LOCC-osztályt, rendezés: majorálás
- $|\{i \in \{1, \ldots, n\} | \lambda_i \neq 0\}|$ meghatározza a SLOCC-osztályt, rendezés: $>$

Összefonódási osztályok

Példa: három qubit

- $k = 3$, $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3 = \mathbb{C}^2$, 6 SLOCC-osztály:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S} &= |000\rangle \\
\mathrm{B}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |110\rangle) \\
\mathrm{B}_{13} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |101\rangle) \\
\mathrm{B}_{23} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |011\rangle) \\
\mathrm{W} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle) \\
\mathrm{GHZ} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)
\end{aligned}
$$

- LOCC-osztályok: 6 valós paraméter

SLOCC - másik megfogalmazás

Tiszta állapotok tere

- $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi|$ állapot, ha $\||\psi\rangle\| = 1$
- $|\psi\rangle$ és $|\varphi\rangle$ ugyanazt az állapotot határozza meg $\iff$ $|\varphi\rangle = e^{i\alpha}|\psi\rangle$
- tiszta állapotok tere azonosítható $P(\mathcal{H})$-val

Transzformációk

- $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_k}$
- ha $\exists A_1, \ldots, A_k$, amire $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_k)|\psi\rangle = |\varphi\rangle$, akkor

$$B_i = \frac{A_i}{\sqrt[n_i]{\det A_i}} \rightsquigarrow (B_1 \otimes \cdots \otimes B_k)|\psi\rangle = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt[n_i]{\det A_i}}\right)|\varphi\rangle$$

- $\mathrm{SL}(n_1, \mathbb{C}) \times \cdots \times \mathrm{SL}(n_k, \mathbb{C})$ hatását is tekinthetjük $P(\mathcal{H})$-n

Marginális probléma

Több részrendszer

- $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$
- $\varrho \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_k})$ állapot marginálisainak sorozata $(\varrho_1, \ldots, \varrho_k)$, ahol $\varrho_i = \mathrm{Tr}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}\, \varrho$

Marginális probléma

- $S \subset \mathcal{S}(\mathbb{C}^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_k})$ állapotok egy halmaza
- kérdés: mi a $\{(\varrho_1, \ldots, \varrho_k) | \varrho \in S\}$ halmaz?
- ha S invariáns az $U(n_1) \times \cdots \times U(n_k)$ csoport hatására, akkor csak a marginálisok spektruma számít (multiplicitással)
- például a tiszta állapotok halmaza ilyen
- bármely SLOCC-osztály is ilyen

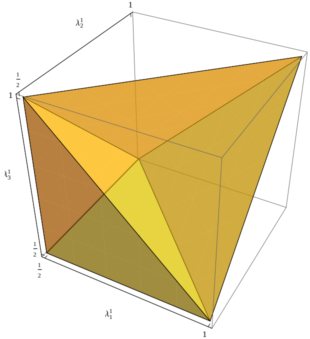
Tiszta marginális probléma

Megoldás (Klyachko)

- a $(\varrho_1, \ldots, \varrho_k)$ állapotok sajátértékeit rendezzük csökkenő sorrendbe: $(\lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^{n_1}, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_k^{n_k}) \in \mathbb{R}^{n_1 + \ldots + n_k}$
- a kapott pontok halmaza véges sok féltér metszete
- a lineáris egyenlőtlenségek meghatározására algoritmus adható

Példák

- $k = 2$ a két spektrum megegyezik, más feltétel nincs
- $k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$, normáltság miatt a független változók $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1$



Lie-csoportok szimplektikus hatásai

Szimplektikus sokaságok

- M sokaság, ω zárt nemelfajuló 2-forma, ekkor (M, ω) szimplektikus sokaság
- minden $H \in C^\infty(M)$ megad egy X_H vektormezőt, amire

$$dH = \iota_{X_H}\omega \qquad \text{azaz} \qquad dH(Y) = \omega(X_H, Y)$$

Szimplektikus hatások

- G Lie-csoport, egy $\Phi : G \times M \to M$, $(g, x) \mapsto \Phi_g(x)$ leképezés szimplektikus hatás, ha sima csoporthatás és $g \in G$-re $\Phi_g^*\omega = \omega$
- az $A \in \mathfrak{g}$ által meghatározott $A_M : x \mapsto \frac{d}{dt}\Phi_{\exp tA}(x)|_{t=0}$ vektormezőre: $d(\iota_{A_M}\omega) = \mathcal{L}(A_M)\omega = 0$

Hamilton-féle hatások

Momentum-leképezés

- tegyük fel, hogy $\iota_{A_M}\omega$ egzakt is, és létezik $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ ekvivariáns leképezés, amire

$$\iota_{A_M}\omega = d(\mu(A))$$

- ekkor a hatás Hamilton-féle, μ neve momentum-leképezés

Példa: sík forgatása

- $M = \mathbb{R}^2$, $\omega = dx \wedge dy$
- $G = S^1$ forgatásokkal hat: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp(\theta J)$
- $J_M = y\partial_x - x\partial_y$ és $\iota_{J_M}(\omega) = ydy + xdx$
- $\mu(x, y)(J) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ momentum-leképezés

Momentum-leképezés

Példa: impulzus

- $M = T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, koordináták: $q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3$
- $\omega = dq^1 \wedge dp_1 + dq^2 \wedge dp_2 + dq^3 \wedge dp_3$
- eltolások: $G = \mathbb{R}^3$, $(x^1, x^2, x^3)(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3) = (q^1 + x^1, q^2 + x^2, q^3 + x^3, p_1, p_2, p_3)$
- $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$

$$\mu(q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3)(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = p_1\xi^1 + p_2\xi^2 + p_3\xi^3$$

momentum leképezés, mert $\xi^1 dp_1 + \xi^2 dp_2 + \xi^3 dp_3 = \iota_{\xi_M}\omega$, ha $\xi_M = \xi^1 \frac{\partial}{\partial q^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial q^2} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial q^3}$

Momentum-leképezés

Példa: impulzusmomentum

- $M = T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, koordináták: $\mathbf{q}, \mathbf{p}$
- $\omega = dq^1 \wedge dp_1 + dq^2 \wedge dp_2 + dq^3 \wedge dp_3$
- forgatások: $G = SO(3)$, $R(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (R\mathbf{q}, R^T\mathbf{p})$
- $\mu : M \to \mathfrak{so}(3)^*$

$$\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p})(A) = \mathbf{p} \cdot (A\mathbf{q})$$

momentum leképezés:

$$A_M = \sum_{i,j} A^i_j \left(q^j \frac{\partial}{\partial q^i} + p_i \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \qquad \iota_{A_M}\omega = \sum_{i,j} A^i_j \left(q^j dp_i - p_i dp_j \right)$$

$$d\left(\sum_{i,j} A^i_j p_i q^j \right) = \sum_{i,j} A^i_j \left(p_i dq^j + q^j dp_i \right)$$

Momentum-leképezés

Példa: komplex reprezentáció

- G komplex reduktív csoport, $K \subseteq G$ maximális kompakt részcsoport V komplex G-reprezentáció
- V-n rögzítünk egy K-invariáns skalárszorzatot, $P(V)$-t ellátjuk a Fubini-Study szimplektikus formával
- $\mu : P(V) \to \mathfrak{k}^*$

$$\mu([v])(A) = -\frac{i}{2}\frac{\langle v, Av\rangle}{\|v\|^2}$$

Speciális eset

- $G = SL(\mathbb{C}^{n_1}) \times \cdots \times SL(\mathbb{C}^{n_k})$,
  $K = SU(\mathbb{C}^{n_1}) \times \cdots \times SU(\mathbb{C}^{n_k})$, $V = \mathbb{C}^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_k}$
- $\mu([v])$ éppen $\mathbb{C}v$ projektorának a marginálisaival azonosítható!

Konvexitási tételek

Tétel (Kirwan; Guillemin, Sternberg; Atiyah)

Legyen M kompakt szimplektikus sokaság, amin a K kompakt összefüggő csoport szimplektikusan hat, $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$ *momentum-leképezés,* $T \subseteq K$ *maximális tórusz. Ekkor* $\mu(M) \cap \mathfrak{t}^*_+$ *konvex politóp.*

Tétel (Brion)

Legyen M kompakt Kähler-sokaság, amin adott a K kompakt összefüggő Lie-csoport egy Kähler-hatása. Ez kiterjed $G = K^{\mathbb{C}}$ *holomorf hatásává. Ekkor minden* $m \in M$ *pontra* $\mu(\overline{G \cdot m}) \cap \mathfrak{t}^*_+$ *konvex. Ha M projektív varietás, akkor ez a metszet politóp.*

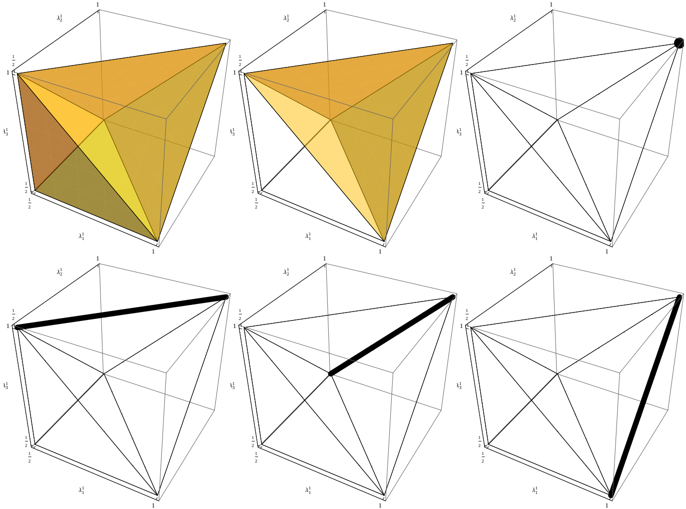
Összefonódott állapotok marginálisai

Összefonódottsági politópok (Walter, Doran, Gross, Christandl)

- $G = \mathrm{SL}(n_1, \mathbb{C}) \times \cdots \times \mathrm{SL}(n_k, \mathbb{C})$ hat $M = P(\mathbb{C}^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_k})$-n
- momentum-leképezés a marginálisokkal azonosítható, pozitív Weyl-kamra a rendezett sajátértékekkel
- lehetséges spektrum-k-asok: $\mu(M) \cap \mathfrak{t}_+^*$ politóp
- $\mu(\overline{G \cdot [v]}) \cap \mathfrak{t}_+^*$ politóp
- fizikailag is érdekes: a marginálisok spektruma egyszerűbben mérhető mint a teljes állapot
- valós paraméterek száma $2n_1 n_2 \dots n_k$ helyett csak $n_1 + \cdots + n_k - k$

Összefonódottsági politópok

Példa: $k = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$, ekkor 6 orbit van



Invariánselméleti karakterizáció

G-invariáns projektív varietások

- G reduktív csoport, V reprezentáció, $C \subseteq V$ invariáns kúp
- $R(C) = S(V^*)/I(C)$ reguláris függvények,
  $R(C) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n(C)$ tagjai is G-reprezentációk

Legmagasabb súlyú vektorok

- $P_n(C) \subseteq \mathfrak{t}^*_+$ az R^*_n irreducibilis részeihez tartozó legmagasabb súlyok halmaza
- $\mathfrak{p}(c) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \frac{P_n(C)}{n}$ véges sok pont $\mathbb{Q}$ feletti konvex burka
- Kirwan-Mumford konvexitási tétel: $\mu(P(C)) \cap \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Q},+} = -\mathfrak{p}(C)$
- $S(V^*)^B$ egy generátorrendszerének ismeretében a csúcsok meghatározhatók
- generátorrendszert találni nehéz

Politópok meghatározása gradiens-folyam segítségével

Gradiens-folyam

- válasszunk $\mathfrak{k}^*$-n K-invariáns skalárszorzatot, ekkor $\|\mu\|^2 : M \to \mathbb{R}$ sima függvény
- Kirwan: egy G-orbitra megszorítva $\|\mu\|^2$ minden lokális minimuma egyben globális minimum
- ha M Riemann-sokaság is, a $\frac{d}{dt}m(t) = -\operatorname{grad}\|\mu\|^2(m(t))$ egyenletet numerikusan megoldva közelítőleg meghatározhatjuk a minimumot, $m(t)$ egy orbitban van
- $\lim_{t\to\infty} m(t)$ nem mindig létezik, de $\lim_{t\to\infty} \|\mu\|^2(m(t))$ igen
- $\mu(m(t))$-t K egy elemével a pozitív Weyl-kamrába forgatva a $\overline{G \cdot m}$ politópjának pontjait kapjuk, az origótól való távolság pontosan egy pontban minimális
- politóp origóhoz legközelebbi pontja $\rightsquigarrow$ lineáris egyenlőtlenség

Gradiens-folyam más pontok felé

Kibővített folyam

- V_λ irreducibilis G-reprezentáció $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ legmagasabb súllyal, $v \in V_\lambda^*$ legmagasabb súlyú vektor, $k \in \mathbb{N}$
- B stabilizálja v-t, ezért $O_\lambda = K \cdot v$ G-tér
- $m \in P(V)$, G hat $\overline{G \cdot m} \times O_\lambda \subseteq P(S^k(V) \otimes V_\lambda^*)$-n
- megmutatható, hogy ennek gradiens-folyama a $\mu(\overline{G \cdot m}) \cap \mathfrak{t}^*$ politóp $\frac{\lambda}{k}$-hoz legközelebbi pontjához tart

Módszer politópok numerikus meghatározására

- kiindulás: $\psi \in \mathbb{C}^{n_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{n_k}$
- kvantum marginális probléma megoldása: $p_1, \ldots, p_r$ pontok konvex burka (Klyachko)
- gradiens folyam ψ-ből p_i felé $\rightsquigarrow$ lineáris egyenlőtlenségek
- az új p-k az ezek által meghatározott politóp csúcsai

Kérdések

- Milyen egyéb módszerekkel lehet konkrét állapotok orbitjának összefonódási politópját meghatározni?
- Mi a k részrendszer feletti r szintű GHZ állapot orbitjának összefonódási politópja?
- Ha ismert $\overline{G \cdot \psi}$ és $\overline{G \cdot \varphi}$ összefonódási politópja, mit mondhatunk $\overline{G \cdot (\psi \otimes \varphi)}$ politópjáról?
- Ha ismert $\overline{G \cdot \psi}$ és $\overline{G \cdot \varphi}$ összefonódási politópja, mit mondhatunk $\overline{G \cdot (\psi \oplus \varphi)}$ politópjáról?

- M. Walter, B. Doran, D. Gross, M. Christandl, *Entanglement Polytopes: Multiparticle Entanglement from Single-Particle Information*, Science, **340** (6137): 1205-1208
- A. Klyachko, *Quantum marginal problem and representations of the symmetric group*, arXiv:quant-ph/0409113
- F. Kirwan, *The cohomology of quotient spaces in symplectic and algebraic geometry*, Thesis, Oxford
- M. Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14**, 1–15
- V. Guillemin, S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping, I-II* Invent. Math. **67**, 491–513, 533–546
- F. Kirwan, *Convexity properties of the moment mapping, III*, Invent. Math. **77**, 547
- M. Brion, *Sur l'image de l'application moment* in *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin (Springer, 1987) pp. 177–192.*