

Forgó testek mozgása az általános relativitáselméletben

Mikóczy Balázs

MTA Wigner FK RMI



NKFI PD 116892

Szeged, 2015.10.29.

Az előadás szerkezete

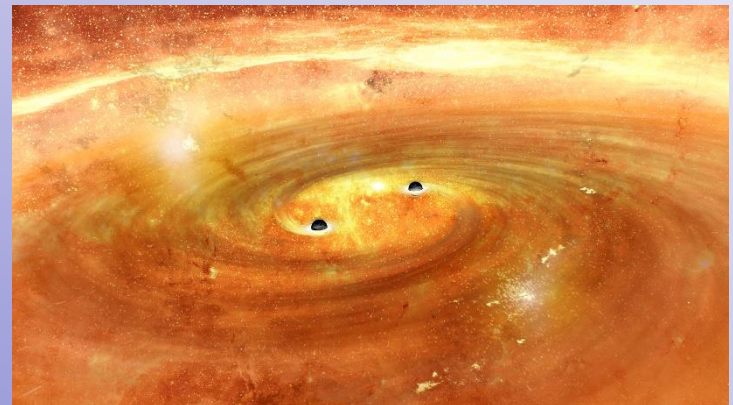
- Forgó próbarészecske mozgásegyenletének (Mathisson-Papapetrou-egyenletek) történeti áttekintése az általános relativitáselméletben.
- Különböző spin koordináta feltételek (ún. *spin supplementary conditions*, továbbiakban SSC-k) tárgyalása.
- Spin-pálya (SO) gyorsulás bemutatása a Mathisson-Papapetrou-egyenletekből.
- Forgó kompakt kettősök leírása a gyorsulásfüggő Lagrange formalizmusa (példák a gyorsulás eliminálására).
- Általánosított (Osztrogradszkij-féle) hamiltoni mechanika.
- Kompakt kettősök mozgásának spin-pálya kölcsönhatás részletes tárgyalása (megmaradó mennyiségek, SSC-függés, gravitációs sugárzási korrekciók)
- Kérdés: Függnek-e az SSC-től a klasszikusan megmaradó, illetve a gravitációs sugárzásból adódó megfigyelhető mennyiségek?

$$S^{\alpha\beta}u_\alpha = 0 \quad \text{SSC I ,}$$

$$2S^{0\beta} + u_\alpha S^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{SSC II ,}$$

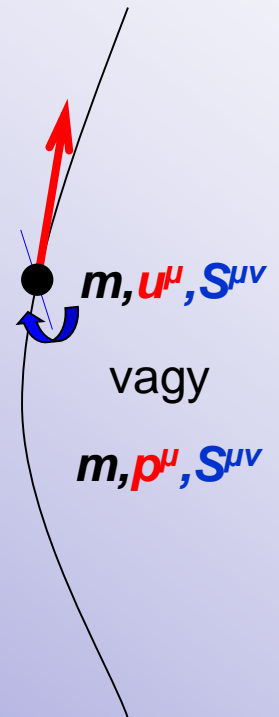
$$S^{\alpha 0} = 0 \quad \text{SSC III ,}$$

$$S^{\alpha\beta}p_\alpha = 0 \quad \text{SSC IV .}$$



Forgó részecske „története” a relativitáselméletben

- **1916 de Sitter** bevezeti a *geodetikus precesszió-t* vagy *de Sitter-precesszió-t*.
- **1918 Lense** és **Thirring** *Lense-Thirring-precesszió*.
- **1937 Mathisson** „*Neue Mechanik Materieller Systeme*” forgó részecske leírása a relativitáselméletben (*kovariáns* multipólmomentumok használata).
- **1948 Pryce** és **1949 Newton** és **Wigner** spinés kvantum részecske tömegközéppontja (SSC II).
- **1951 Papapetrou** „*Spinning test-particles in General Relativity I-II*”, monopól és dipólmomentumokból (nem-kovariáns leírás). **Corinaldesi** és **Papapetrou** (SSC III)
- **1956 Pirani** Mathisson-Papapetrou egyenletek egyszerűsítése (kovariáns SSC I)
- **1960 Schiff** SO- és SS-precesszió
- **1959 Tulczyjew** spinfeltétele (ez is „kovariáns” SSC IV)
- **1962 Tulczyjew** és **Tulczyjew** további vizsgálatok az SSC IV-hez.
- **1964, 1970 Dixon** a Mathisson-Papapetrou egyenleteket további egyszerűsítéseit vezette be, *Mathisson-Papapetrou-Tulczyjew-Dixon (MPTD) egyenletek*



Forgó próbarészecske mozgása

A Mathisson-Papapetrou (vagy Mathisson-Papapetrou-Tulczyjew-Dixon) egyenletek levezethetők a $T^{\mu\nu}$ szimmetrikus és divergenciamentes tulajdonságából:

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{D\tau} = (p^\mu u^\nu - p^\nu u^\mu)$$

$$\frac{Dp^\nu}{D\tau} = -\frac{1}{2}R^\nu_{\mu\rho\sigma} S^{\rho\sigma} u^\mu$$

ahol

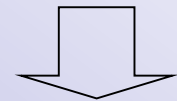
$$D/D\tau = u^\alpha \nabla_\alpha$$

Megmaradó mennyiségek:

$$S^2 = S^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$$

$$m = -p^\alpha p_\alpha$$

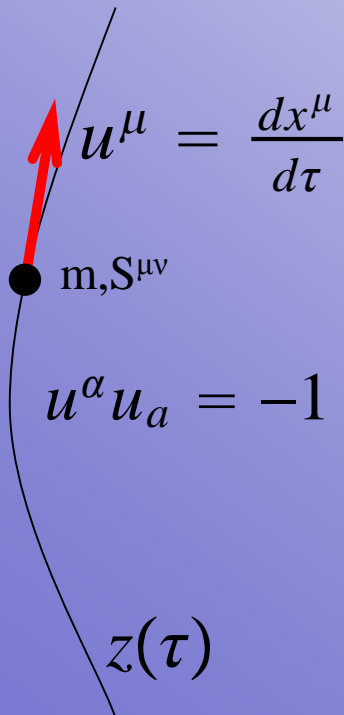
6	$S^{\mu\nu}, p^\mu, u^\mu$			
	\downarrow \downarrow \downarrow			
4	<table style="margin: 0 auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">6</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">4</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">3</td> </tr> </table>	6	4	3
6	4	3		
10	13			



Az egyenletrendszer nem zárt, így szükség van *spin koordináta feltétel* választásra!

spin supplementary conditions (SSC-k)

$$S^{\mu\nu} \longrightarrow S$$



Spin koordináta feltételek (SSC-k)

I. Pirani (SSC I): $S^{\mu\nu} u_\nu = 0$ (Pirani 1956)

Pirani, F.A.E. (1956). *Acta Phys. Polon.*, 15, 389.

II. Pryce-Newton-Wigner (SSC II): $2S_{it} + S_{ij}v^j = 0$ (Pryce 1948, Newton & Wigner 1949)

Pryce, M.H.L. (1948) *Pme R. Soc. A* 195 62

Newton, T.D. & Wigner, E.P. (1949) *Rev. Mod. Phys.* 21 400

III. Corinaldesi-Papapetrou, SSC III: $S^{\mu t} = 0$ (Corinaldesi & Papapetrou 1951)

Corinaldesi, E. & Papapetrou, A. (1951). *Proc. Roy. Soc., A/09*, 259.

IV. Tulczyjew-Dixon, SSC IV: $S^{\mu\nu} p_\nu = 0$ (Tulczyjew 1959, Dixon 1964)

Tulczyjew, W.M. (1959). *Acta Phys. Polon.*, 18, 393.

Dixon, W. (1964). *Nuovo Cim.*, 34, 317.

Összefoglalva:

$$S^{a0} - kS^{ab}v_a = 0$$

ahol k jelenti az SSC-függést:

$k=0, \frac{1}{2}$ és 1 rendre SSC III, SSC II és SSC I \Leftrightarrow SSC IV

(Megjegyzés utóbbi 2 SSC azért ekvivalens, mert spinben lineáris tagokig (SO) megyünk és

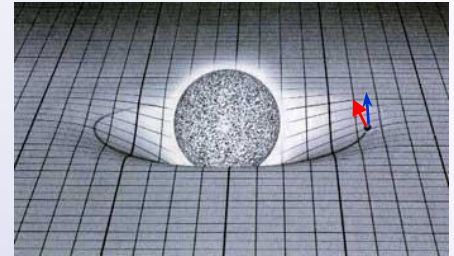
$$S^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & S^{01} & S^{02} & S^{03} \\ & 0 & S^{12} & S^{13} \\ & & 0 & S^{23} \\ -\# & & & 0 \end{pmatrix}, u^\alpha = \begin{pmatrix} u^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$$

$$p^\alpha = mu^\alpha + u_\beta \frac{DS^{\alpha\beta}}{Ds}$$

SSC-k közti transzformáció a Mathisson-Papapetrou-egyenletek „geodetikái” alapján

Schwarzschild-koordinátákkal: $ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{ij}x^i x^j$

$$\left(r_0 = \frac{GM}{c^2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{[M központi tömeg körül mozgó} \\ \text{elhanyagolható tömegű forgó} \\ \text{próbarészecske mozgása]} \end{array} \quad \begin{array}{l} g_{tt} = 1 - \frac{2r_0}{r} \\ g_{ij} = -\delta_{ij} - \frac{2r_0}{r} \frac{x^i x^j}{r^2} \end{array}$$



A M-P-egyenletekből megkapható a próbarészecske „geodetikus” egyenlete:

$$\dot{\mathbf{v}} = \underbrace{-\frac{c^2 r_0}{r^3} \mathbf{r} + \frac{r_0}{r^3} \left[\frac{4c^2 r_0}{r} \mathbf{r} - v^2 \mathbf{r} + 4(\mathbf{v}\mathbf{r})\mathbf{v} \right]}_{\text{Geodetikus mozgás}} + \underbrace{\frac{D\mathbf{u}}{Ds}}_{\text{Nem-geodetikus mozgás}}$$

Corinaldesi-Papapetrou (SSC III):

$$\frac{D\mathbf{u}}{Ds} = \frac{3r_0}{mr^5} \{ [\mathbf{S}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})] \mathbf{r} - r^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{S}) + 2(\mathbf{v}\mathbf{r})(\mathbf{r} \times \mathbf{S}) \}$$

Pirani (SSC I):

$$\frac{D\mathbf{u}}{Ds} = \frac{3r_0}{mr^5} \{ 2[\mathbf{S}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})] \mathbf{r} - r^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{S}) + (\mathbf{v}\mathbf{r})(\mathbf{r} \times \mathbf{S}) \}$$

A geodetikus egyenletek alapján

belátható a két SSC közti transzformáció:

$$\mathbf{r}_{(CP)} = \mathbf{r}_{(P)} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{S}}{mc^2}$$

Általánosított mechanika

- Általánosított mechanika (Osztrogradszkij 1850).
- Lagrange-függvényben szerepelnek magasrendű deriváltak.
- Pl.: 2D-ben a Lagrange-függvény: $\mathcal{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, \overset{(m)}{x}, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, \overset{(n)}{y})$
- Variálva a $\int \mathcal{L} dt$ hatást, könnyen felírhatók az E-L-egyenletek:

$$0 = \frac{d\mathcal{L}}{dy} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{y}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{(n)}{y}},$$

$$0 = \frac{d\mathcal{L}}{dx} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}} + \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{(m)}{x}}.$$

Példák:

(ebben az előadásban eddig megyünk)

- szabad relativisztikus forgó pontrészeszecske (Riewe 1972), $\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu - \omega^2 \ddot{x}^\mu \ddot{x}_\mu)$
- Második poszt-newtoni rend (2PN) (ADM-koordinátákkal eliminálhatók a gyorsulás tagok, Schäfer 1984)
- két elektromosan töltött részeszecske másodrendű csatolása $\mathcal{O}(1/c^4)$ (Barker & O'Connell 1982)
- Térelméleti kiterjesztések (pl. az elektrodinamika Bopp-Podolsky elmélete, Bopp 1940, Podolsky 1942)
- Pais-Uhlenbeck (1950) oszcillátor $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (-(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \dot{x}^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2 x^2 + \ddot{x}^2)$
- Nem-kommutatív mechanika (Lukierski, Stichel és Zakrzewski 1997) $\mathcal{L} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{\kappa}{2} \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$
- Magyar vonatkozások: Szamosi G. 1949, Knapecz G. 1974, Horváthy P. 2003
- Szegedi vonatkozás: Horváth J. és Vasvári B. 1956

Hamiltoni mechanika

- Legendre-transzformáció általánosítása a megjelenő magasrendű impulzusok miatt:
$$\mathcal{H} = -\mathcal{L} + p_1 q_2 + p_2 q_3 + \dots + p_{m-1} q_m + p_m \overset{(m)}{x} + p_{m+1} q_{m+2} + \dots + p_{m+n-1} q_{m+n} + p_{m+n} \overset{(n)}{y}$$

ahol az általánosított $2(m+n)$ db kanonikus koordináta és impulzus:

$$q_1 = x, q_2 = \dot{x}, \dots, q_m = \overset{(m-1)}{x}, q_{m+1} = y, q_{m+2} = \dot{y}, \dots, q_{m+n} = \overset{(n-1)}{y}$$

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{(m)}{x}},$$

$$p_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{x}} - \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{(m)}{x}} + \dots + (-1)^{m-2} \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{(m)}{x}},$$

⋮

$$p_m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{(m)}{x}},$$

$$p_{m+1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{y}} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{(n)}{y}},$$

⋮

$$p_{m+n} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{(n)}{y}},$$

Az $\overset{(m)}{x}$ és $\overset{(n)}{y}$ tagokat eliminálni kell a Hamilton függvényből! Így a Hamilton-egyenletek a következők lesznek:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r},$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, m+n)$$

Hátrány: „lineáris instabilitások” adódhatnak, mivel egyes impulzusok lineárisan szerepelnek \mathcal{H} -ban, így tetszőleges negatív energiák jelenhetnek meg a dinamikában (Osztrogradszkij-instabilitások)

Példa: harmonikus oszcillátor

Tekintsük egy általánosított 1D-s harmonikus oszcillátort: $\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 - \frac{gm}{2\omega^2} \ddot{x}^2$

E-L-egyenletek: $m\left(\ddot{x} + \omega^2 x + \frac{g}{\omega^2} \ddot{\ddot{x}}\right) = 0$

Megoldás: $x(t) = A_+ \cos(k_+ t) + B_+ \sin(k_+ t) + A_- \cos(k_- t) + B_- \sin(k_- t)$

ahol $k_{\pm} \equiv \omega \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-4g}}{2g}}$ és $A_+ = \frac{k_-^2 x_0 + \ddot{x}_0}{k_-^2 - k_+^2}$, $B_+ = \frac{k_-^2 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0}{k_+(k_-^2 - k_+^2)}$,
 $A_- = \frac{k_+^2 x_0 + \ddot{x}_0}{k_+^2 - k_-^2}$, $B_- = \frac{k_+^2 \dot{x}_0 + \ddot{x}_0}{k_-(k_+^2 - k_-^2)}$.

Konjugált impulzusok: $P_1 = m\dot{x} + \frac{gm}{\omega^2} \ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} = \frac{\omega^2 P_1 - m\omega^2 Q_2}{gm}$,
 $P_2 = -\frac{gm}{\omega^2} \ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{\omega^2 P_2}{gm}$.

Hamilton-függvény az általánosított

Legendre-transzformáció után: $\mathcal{H} = P_1 Q_2 - \frac{\omega^2}{2gm} P_2^2 - \frac{m}{2} Q_2^2 + \frac{m\omega^2}{2} Q_1^2$,
 $= \frac{m}{2} \sqrt{1-4g} k_+^2 (A_+^2 + B_+^2) - \frac{m}{2} \sqrt{1-4g} k_-^2 (A_-^2 + B_-^2)$.

Példa: gyorsulás eliminálása a Lagrange-függvényből

Példaként tekintsünk két ponttöltést az elektrodinamikában a következő csatolással:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu \mathbf{v}^2}{2} - \frac{e_1 e_2}{r} + \frac{e_1 e_2}{c^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})$$

ahol \mathbf{k} tetszőleges állandó vektor.

Így az E-L egyenletek $\mu \mathbf{a} = \frac{e_1 e_2}{r^3} \mathbf{r}$

vagyis itt a gyorsulásfüggő tag nincs hatással az E-L egyenletekre.

Tekintsük most a $\frac{d}{dt} \left(\frac{e_1 e_2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \right)$ teljes derivált „elvételével” az előző Lagrange-függvényt, $\mathcal{L}' = \frac{\mu \mathbf{v}^2}{2} - \frac{e_1 e_2}{r}$

Így ekvivalens lesz \mathcal{L}' és \mathcal{L}

Vigyázat: E-L egyenletek használata a Lagrange-függvényben tilos!

[pl Golubenkov és Smorodinskii (1957) cikkben $\mathcal{O}(1/c^4)$ rendű két-ponttöltés másodrendű csatolásból gyorsulásfüggő tagokat elimináltak a nulladrendű mozgásegyenlet felhasználásával]

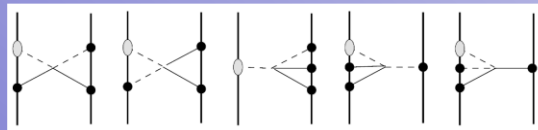
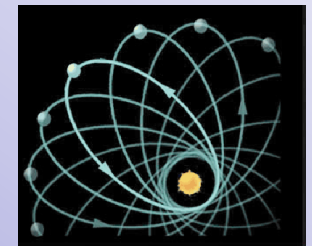
SO Lagrange-függvényben $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{S}_i)$ típusú tagok jelennek meg, amelyre „nehéz” felírni teljes időderiváltat

A poszt-newtoni formalizmus

- **1938 Einstein, Infeld & Hoffmann:** Az első mozgásegyenletek felírása tömegpontokra $\mathcal{O}(1/c^2)$ rendig lassú mozgásokra és gyenge térre az általános relativitáselméletben, az ún. „poszt-newtonizmus születése”. (az első poszt-newtoni rend, 1PN).
- A spin figyelembevétele a mozgásegyenletekben egy feles rendet okoz, vagyis $\mathcal{O}(1/c)$ rendű effektus.
- A gravitációs sugárzásban *uszály* (vagy *tail*) tagok is fellépnek (vezetőrendben legkorábban: $\mathcal{O}(1/c^3)$).
- **1970 Barker & O’Connell** A *spin-pálya* (SO) illetve a *spin-spin* (SS) kölcsönhatás vezetőrendben 1.5PN ill. 2PN, vagyis $\mathcal{O}(1/c^3)$ ill. $\mathcal{O}(1/c^4)$ rendű korrekciók.
- **1981 Damour & Deruelle** 2PN mozgásegyenletek $\mathcal{O}(1/c^4)$ (Landau II-ben „*Második közelítés*”).
- **1995 Kidder, Will & Wiseman** Lagrange-függvény alkalmazása kompakt kettősökre SO és SS járulékaira.
- 2000 **Tagoshi, Ohashi & Owen** SO következő korrekciója $\mathcal{O}(1/c^5)$
- **2001 Damour, Jaranowski & Schäfer** 3PN-ben megjelenő ambiguitások eliminálása $\mathcal{O}(1/c^6)$.
- **2008 Porto & Rothstein** SS következő rendje $\mathcal{O}(1/c^6)$
- **2014 Damour, Jaranowski & Schäfer** 4PN mozgásegyenletek $\mathcal{O}(1/c^8)$.
- **2015 Levi & Steinhoff** SO *next-to-next-to-leading order* (NNLO) $\mathcal{O}(1/c^9)$

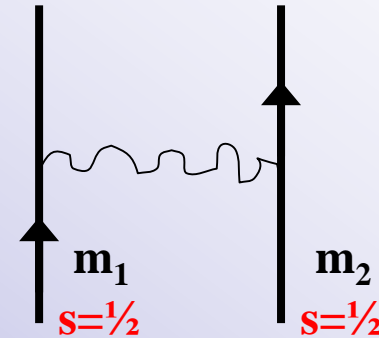
$$\varepsilon = \frac{Gm}{rc^2} \approx \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{S}{L} \approx \varepsilon^{1/2}$$



Forgó részecske Lagrange-függvényének származtatása kvantumos elméletből

Einstein gravitációelmélete interpretálható sík térelméletként, melyben lehetséges kvantálni az elektromágneses térhez hasonlóan (Gupta 1954)



két feles spinű részecske egy-graviton kicserélődésének csatolásából megkapható a Lagrange-függvény a következő makroszkópikus átmenetben:

- I. Gupta kvantum-elméletéből a spin: $\frac{\hbar}{2} \sigma^{(i)} \rightarrow \mathbf{S}^{(i)}$ **klasszikus részecske spinje**
- II. nagytömeg közelítés: $m_2 \gg m_1$

Érdekes tény, hogy a Gupta-féle kvantumos elméletből kapható spin-pálya kölcsönhatás az SSC II koordináta feltétel adódik.

SO-kölcsönhatás kettős rendszerekben

Az m_1 és m_2 tömegű kompakt forgó testek mozgásegyenlete („gyorsulása”) nem egyértelmű:

$$\mathbf{a} = -\frac{Gm}{r^3} \mathbf{r} + \frac{G}{c^2 r^3} \left[\frac{3}{r^2} \mathbf{r} [(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot (2\mathbf{S} + (k+1)\boldsymbol{\sigma})] - \mathbf{v} \times (4\mathbf{S} + 3\boldsymbol{\sigma}) + \frac{3\dot{r}}{r} \mathbf{r} \times (2\mathbf{S} + (2-k)\boldsymbol{\sigma}) \right]$$

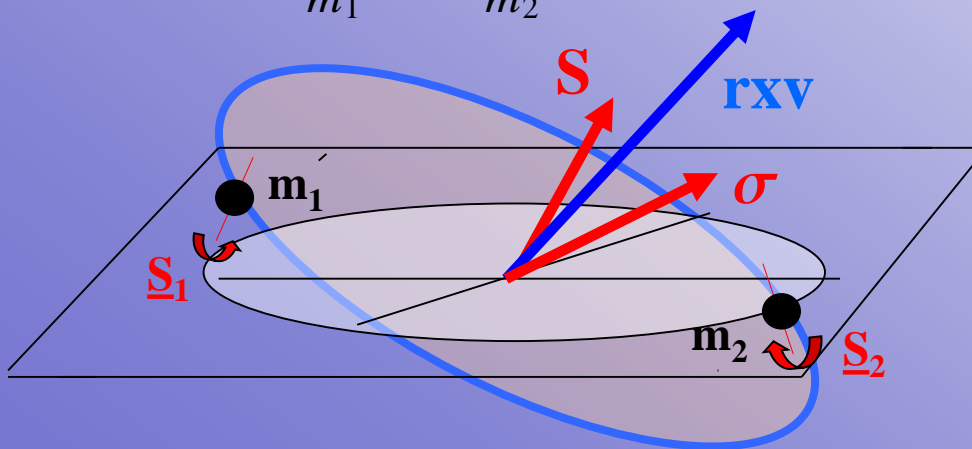
Kepleri eset

ahol: $m = m_1 + m_2$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{m_2}{m_1} \mathbf{S}_1 + \frac{m_1}{m_2} \mathbf{S}_2$$



SO-kölcsönhatás

a k paraméter emlékeztetőül:

- $k=1$ Pirani SSC I
- $k=1/2$ Newton-Wigner-Pryce SSC II
- $k=0$ Corinaldesi-Papapetrou SSC III

Áttérés az SSC-k között kompakt kettősök esetén:

$$\mathbf{r}^{(\tilde{k})} = \mathbf{r}^{(k)} + \frac{k-\tilde{k}}{mc^2} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\sigma})$$

SO-kölcsönhatás kettős rendszerekben II

A spin-pálya kölcsönhatás Lagrange-függvénye

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{G\mu m}{r} + \frac{G\mu}{c^2 r^3} \mathbf{v} \cdot [\mathbf{r} \times (2\mathbf{S} + (k+1)\boldsymbol{\sigma})] + \frac{(2k-1)\mu}{2c^2 m} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\sigma})$$

Kepleri eset

SO-kölcsönhatás

gyorsulásfüggő tag
SSC I- és SSC III-ra

Megmaradó mennyiségek: $E, L, A, S_1, S_2, \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$

ahol „A” a Laplace-Runge-Lenz-vektor (LRL) nagysága

Az E es L a teljes perturbált mozgásra vonatkozó mozgásállandók, amelyek SSC-függők:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p}}{\mu} \times \mathbf{L} - \frac{Gm\mu}{r} \mathbf{r}$$

Míg a teljes LRL-vektor nagysága (A) csak kepleri esetben megmaradó (nem független E és L-től):

$$E = \frac{\mu}{2} \mathbf{v}^2 - \frac{G\mu m}{r} + \frac{G\mu(1-2k)}{c^2 r^3} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}),$$

$$\mu A^2 = G^2 m^2 \mu^3 + 2EL^2$$

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} + \frac{G\mu}{c^2 r^3} \mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times (2\mathbf{S} + (2-k)\boldsymbol{\sigma})] - \frac{(2k-1)\mu}{2c^2 m} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\sigma}).$$

Megmutatható, hogy a spinvektorok közti relatív szögek

formálisan a $\mathcal{O}(1/c^2)$ rendnél jelentkeznek

legkorábban:

$$(\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_1), (\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_2), (\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_1)$$

Vagyis elsőrendű mennyiségekben tekinthető mozgásállandóknak.

Gyorsulás eliminálása a SO Lagrange-függvényből

Gyorsulásfüggő Lagrange-függvény

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{G\mu m}{r} + \frac{G\mu}{c^2 r^3} \mathbf{v} \cdot [\mathbf{r} \times (2\mathbf{S} + (k+1)\boldsymbol{\sigma})] + \frac{(2k-1)\mu}{2c^2 m} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\sigma})$$

I. **Kényszeres dinamika** segítségével. Lagrange multiplikátorok bevezetése (Ellis 1975).

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}) \rightarrow \mathcal{L}^*(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \dot{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\delta})$$

„hátrány”: elfajult Hesse-mátrix

ahol: $\boldsymbol{\lambda} = \dot{\mathbf{r}}$ és $\boldsymbol{\delta}$ Lagrange-multiplikátorok

$$\mathcal{L}^* = \frac{\mu}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{G\mu m}{r} + \frac{G\mu}{c^2 r^3} \mathbf{v} \cdot [\mathbf{r} \times (2\mathbf{S} + (k+1)\boldsymbol{\sigma})] + \frac{(2k-1)\mu}{2c^2 m} \mathbf{v} \cdot (\dot{\boldsymbol{\lambda}} \times \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\delta} \cdot (\mathbf{v} - \boldsymbol{\lambda}),$$

$$\det \frac{\partial^2 \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{q}^i \partial \mathbf{q}^j} = 0$$

↓
kényszeres dinamika

II. **Dupla-nulla** formalizmus segítségével (Barker és O’Connell 1980).

Lagrange-függvényhez hozzáadunk olyan magasabb rendű tagot, amelyben a nulladrendű mozgásegyenlet használható:



$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + Z_1 Z_2$$

„hátrány”: nulladrendű megmaradó mennyiségek szerepelnek a Lagrange-függvényben.

$$0 = \frac{d\mathcal{L}}{d\mathbf{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}} + Z_2 \frac{dZ_1}{d\mathbf{r}} - Z_2 \frac{d}{dt} \frac{\partial Z_1}{\partial \mathbf{v}} + Z_2 \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial Z_1}{\partial \mathbf{a}} + Z_1 \frac{dZ_2}{d\mathbf{r}} - Z_1 \frac{d}{dt} \frac{\partial Z_2}{\partial \mathbf{v}} + Z_1 \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial Z_2}{\partial \mathbf{a}}$$

Így a vezetőrendű E-L egyenletekre nincs hatással az új tag

Dupla-nulla formalizmus SO-ra

1. Szeparáljuk a tagokat: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}'_{non\mathbf{a}} + \mathcal{L}'_{\mathbf{a}}$

2. Hozzáadunk egy olyan tagokat, amelyben ha használjuk a nulladrendű (kepleri) mennyiségeket akkor (*dupla*) nullát kapunk, valamint egy teljes időderivált szükségeltetik,

$$\begin{aligned} ZZ = & -\frac{(2k-1)}{2c^2m} \frac{2}{r^2} \left[\left(\mathbf{a} + \frac{Gm}{r^3} \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{r} \right] \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot (\mathbf{L}_0 - \mathbf{L}) \\ & - \frac{1}{r^2} \left[\left(\mathbf{a} + \frac{Gm}{r^3} \mathbf{r} \right) \cdot (\mathbf{L}_0 - \mathbf{L}) \right] (\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{r}), \\ & - \frac{(2k-1)}{2c^2m} (\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \left[\left(\mathbf{a} + \frac{Gm}{r^3} \mathbf{r} \right) \times \mu \mathbf{v} \right] \end{aligned}$$

Emlékeztető:

$$\mathbf{a}_N = -\frac{Gm}{r^3} \mathbf{r}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{m_2}{m_1} \mathbf{S}_1 + \frac{m_1}{m_2} \mathbf{S}_2$$

$$TTD = -\frac{(2k-1)}{2c^2m} \frac{d}{dt} \left(\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{L} - \frac{2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{L}_0 + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{L}_0)}{r^2} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{r} \right),$$

ahol kikötjük, hogy $\boldsymbol{\sigma}_0$ és \mathbf{L}_0 megmaradó mennyiségek $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 = 0, \dot{\mathbf{L}}_0 = 0$

Így az új Lagrange függvény gyorsulásmentes! $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}'_{non\mathbf{a}} + \mathcal{L}'_{\mathbf{a}} + ZZ + TTD$

Furcsaság: \mathcal{L}'' tartalmaz mozgásállandókat, amikkel nem variálunk az E-L levezetésénél.

Példa: két ponttöltés másodrendű $\mathcal{O}(1/c^4)$ csatolásának Lagrange-függvénye tartalmaz nulladrendű energiát (E_0) és impulzusmomentumot (\mathbf{L}_0) (Barker & O'Connell 1982).

Hamiltoni mechanika SO-ra

Az általánosított $\mathcal{H} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{a} - \mathcal{L}$ Legendre-transzformációból megkonstruálható a Osztrogradszkij-féle Hamilton-függvény SO kölcsönhatásra

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{G\mu m}{r} + \frac{G}{2c^2 r^3} \mathbf{r} \cdot [2\mathbf{p} \times [2\mathbf{S} + (2-k)\boldsymbol{\sigma}] + (2k-1)\mu \mathbf{v} \times \boldsymbol{\sigma}] - \frac{Gm}{r^3} \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} \\ + \frac{G}{c^2 \mu r^3} \mathbf{q} \cdot \left[\frac{3}{r^2} \mathbf{r} [(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot (2\mathbf{S} + (k+1)\boldsymbol{\sigma})] - \mathbf{p} \times (4\mathbf{S} + 3\boldsymbol{\sigma}) + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^2} \mathbf{r} \times (2\mathbf{S} + (2-k)\boldsymbol{\sigma}) \right],$$

ahol a kanonikus párok (\mathbf{p}, \mathbf{r}) és (\mathbf{v}, \mathbf{q}) , ahol \mathbf{p} és \mathbf{q} kanonikus impulzusok

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}}$$

Megjegyzés: Nem triviális, hogy a Hamilton-függvényben szereplő gyorsulást tartalmazó tagokat melyik általános impulzussal fejezzük ki. [Megoldás: nyilván az a helyes, amely visszaadja az E-L egyenletet.]

Hamiltoni mechanika SO-ra II

Az általánosított Hamilton-egyenletek:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}},$$

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{v}}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}},$$

Hamilton-egyenletek:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{G\mu m}{r^3} \mathbf{r} - \frac{G}{c^2 r^3} \mathbf{p} \times [2\mathbf{S} + (k+1)\boldsymbol{\sigma}] + \frac{3G}{c^2 r^5} \mathbf{r} [(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot (2\mathbf{S} + (k+1)\boldsymbol{\sigma})],$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{\mu} - \frac{G}{c^2 r^3} \mathbf{r} \times [2\mathbf{S} + (2-k)\boldsymbol{\sigma}],$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{(2k-1)\mu}{2c^2 m} \boldsymbol{\sigma} \times \dot{\mathbf{v}},$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{Gm}{r^3} \mathbf{r} + \frac{G}{c^2 \mu r^3} \left[\frac{3}{r^2} \mathbf{r} [(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot (2\mathbf{S} + (k+1)\boldsymbol{\sigma})] - \mathbf{p} \times (4\mathbf{S} + 3\boldsymbol{\sigma}) + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^2} \mathbf{r} \times (2\mathbf{S} + (2-k)\boldsymbol{\sigma}) \right],$$

amely egyenletek ekvivalensek a Lagrange-formalizmusból kapott E-L egyenletekkel:

$$\mathbf{a} = -\frac{Gm}{r^3} \mathbf{r} + \frac{G}{c^2 r^3} \left[\frac{3}{r^2} \mathbf{r} [(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot (2\mathbf{S} + (k+1)\boldsymbol{\sigma})] - \mathbf{v} \times (4\mathbf{S} + 3\boldsymbol{\sigma}) + \frac{3\dot{r}}{r} \mathbf{r} \times (2\mathbf{S} + (2-k)\boldsymbol{\sigma}) \right]$$

Mozgásegyenletek megoldásáról (1PN)

$$\mathcal{L}_{N+PN} = \boxed{\frac{\mu v^2}{2} + \frac{Gm\mu}{r}} + \boxed{\frac{1}{8c^2}(1-3\eta)\mu v^4 + \frac{Gm\mu}{2rc^2} \left[(3+\eta)v^2 + \eta \dot{r}^2 - \frac{Gm}{r} \right]}$$

Az E-L egyenletek meghatározása után a radiális- és szög-egyenlet integrálható $\mathcal{O}(1/c^2)$ pontosságig. Használva a következő paraméterezést: $r = a_r(1 - e_r \cos u)$

$$n(t - t_0) = u - e_t \sin u,$$

$$\theta - \theta_0 = (1 + k)v_\theta,$$

ahol a „pályelemek”:

$$a_r = -\frac{Gm\mu}{2E} \left[1 - \frac{1}{2}(v-7)\frac{E}{\mu c^2} \right],$$

$$e_r = \left\{ 1 + \frac{2E}{G^2 m^2 \mu} \left[1 + \left(\frac{5}{2}v - \frac{15}{2} \right) \frac{E}{\mu c^2} \right] \left[\frac{L^2}{\mu^2} + (v-6)\frac{G^2 m^2}{c^2} \right] \right\}^{1/2},$$

$$e_t = \left\{ 1 + \frac{2E}{G^2 m^2 \mu} \left[1 + \left(\frac{7}{2}v - \frac{17}{2} \right) \frac{E}{\mu c^2} \right] \left[\frac{L^2}{\mu^2} + (-2v+2)\frac{G^2 m^2}{c^2} \right] \right\}^{1/2},$$

$$e_\theta = \left\{ 1 + \frac{2E}{G^2 m^2 \mu} \left[1 + \left(\frac{1}{2}v - \frac{15}{2} \right) \frac{E}{\mu c^2} \right] \left[\frac{L^2}{\mu^2} - 6\frac{G^2 m^2}{c^2} \right] \right\}^{1/2},$$

$$n = \frac{(-2E/\mu)^{3/2}}{Gm} \left[1 - \frac{1}{4}(v-15)\frac{E}{\mu c^2} \right],$$

$$k = \frac{3Gm}{a_r(1 - e_r^2)}.$$

Damour & Deruelle 1985

Ahol u az **excentrikus anomália** és

$$v_\theta = 2 \arctan \sqrt{\frac{1+e_\theta}{1-e_\theta}} \tan \frac{u}{2}$$

- 3-féle excentricitás
- 3 mozgásállandó marad mivel csak E , A és L megmaradó mennyiségek és (a kepleri esethez hasonlóan a pályasík *nem billeg*, ám a periasztron forog):

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$A^2 = \frac{2EL^2}{\mu} + G^2 m^2 \mu^2$$

(Kepleri esetben a LRL-vektor (\mathbf{A}) mindig a periasztronba mutat)

SO-mozgásegyenletek megoldásáról

- A kompakt kettősökre vonatkozó spin-pálya kölcsönhatás mozgásegyenleteit elsőként **Wex** tárgyalta 1995-ben SSC II-re hamiltoni mechanika segítségével.
- **Gergely, Perjés** és **Vasúth** 1998-ban Lagrange-formalizmusban dolgozták ki SSC I-re. A spinvektorok mozgása miatt a pálya leírására **3 Euler szöveget** szokás bevezetni.
- Az irodalomban többféle szögváltozót használnak. Pl. a **pályahajlás** (inklináció) *mérése* történhet az \mathbf{L}_N vagy az \mathbf{L} vektortól is a \mathbf{J} rendszerében:

$$\Theta_N = \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{L}}_N \quad \text{vagy} \quad \Theta = \hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{L}}$$

Látható, hogy ezen szögek időfejlődései közül az utóbbi nem függ az SSC-től:

$$\dot{\Theta} = \frac{3G\mu(v^{-1}-v)}{2c^2r^3J} \mathbf{L} \cdot (\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2)$$

ahol $v=m_2/m_1$

Megjegyzés: az SO-kölcsönhatás olyan Szögegyenletet generál, amely spinben kvadratikus $\mathcal{O}(S^2)$

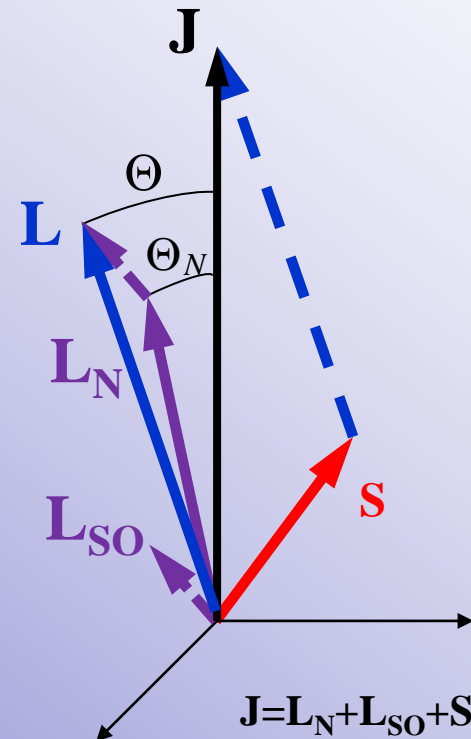


Egyszerűsítésképpen legyen ez nulla, vagy másképpen $\mathcal{O}(S)$ rendig megyek az egyenletekben

[Általános szögegyenletek: $\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} \left(1 - \frac{\lambda_{SO}}{L^2}\right) - \cos \Theta_N \dot{\Upsilon}$,

ahol

$$\lambda_{SO} = \mathbf{L}_N \cdot \mathbf{L}_{SO} \quad \dot{\Upsilon} = -\frac{\tan \varphi}{\sin^2 \Theta_N} (\cos \Theta_N) \cdot \quad]$$



SO-mozgásegyenletek megoldása

Ha elhanyagolom a pályasík *billégésének* mozgását [mivel az spinben kvadratikus, $\mathcal{O}(S^2)$], akkor a következő 2 egyenlet [radiális és (1db Euler szög)] kapható [φ a pályasíkon mérendő polárszög]:

ahol a kepleri egyenletek:

$$\dot{r}_N^2 = \frac{2E}{\mu} + \frac{2Gm}{r} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}$$

$$\dot{\varphi}_N = \frac{L}{\mu r^2}$$

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_N^2 + \frac{2G}{c^2 \mu r^3} (2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + (2 - k)\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \frac{2(2k - 1)E}{c^2 m \mu^2 r^2} (\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_N + \frac{G}{c^2 L r^3} (2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + 3(1 - k)\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \frac{(2k - 1)E}{c^2 m \mu L r^2} (\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

Így az egyenletek kiintegrálhatók $\mathcal{O}(1/c^2)$ rendig pl. a **radiális rész** a következő alakú lesz

$$n(t - t_0) = u - e_t \sin u$$

$$r = a_r (1 - e_r \cos u)$$

-Az n középanomália nem kap SO járulékot mint ahogy 1 PN esetben

-A radiális pályaelemek (a_r , e_r és e_t) SSC-függők!

$$a_r = \frac{Gm\mu}{-2E} + \frac{G\mu}{c^2 L} [2\mathcal{S} + (2 - k)\Sigma],$$

$$e_r^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G^2 m^2 \mu^3} + \frac{4E}{c^2 mL} \left\{ 4 \left[1 + \frac{EL^2}{G^2 m^2 \mu^3} \right] \mathcal{S} + \left[4 - 2k + \frac{(5 - 4k)EL^2}{G^2 m^2 \mu^3} \right] \Sigma \right\},$$

$$e_t^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G^2 m^2 \mu^3} + \frac{4E}{c^2 mL} \left\{ 2\mathcal{S} + \left[2 - k + \frac{(1 - 2k)EL^2}{G^2 m^2 \mu^3} \right] \Sigma \right\}$$

$$n = \frac{1}{Gm} \left(\frac{-2E}{\mu} \right)^{3/2},$$

$$\mathcal{S} = \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{S} \text{ és } \Sigma = \hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Spin-precessziós egyenletek

A spin-precessziós egyenletek SO kölcsönhatásra könnyen felírhatók, mivel a teljes impulzusmomentum-vektor ($\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$) megmaradó mennyiség: $\dot{\mathbf{L}} = -\dot{\mathbf{S}}$

Az általánosított mechanikából megkapható a (nem-megmaradó) pálya-impulzusmomentum vektor (Megjegyzés: Lagrange: $\mathbf{L}=\mathbf{r} \times \mathbf{v}+\mathbf{p} \times \mathbf{q}$, Hamilton: $\mathbf{L}=\mathbf{r} \times \mathbf{p}$, itt a \mathbf{p} természetes módon tartalmazza a perturbációt)

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} + \frac{G\mu}{c^2 r^3} \mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times (2\mathbf{S} + (2 - k)\boldsymbol{\sigma})] - \frac{(2k-1)\mu}{2c^2 m} \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\sigma})$$

Az \mathbf{L} időfejlődésből kiesik az SSC-függés valamint *tiszta precessziót* végez az \mathbf{L} a $4\mathbf{S}+3\boldsymbol{\sigma}$ körül:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{G\mu}{2c^2 r^3} (4\mathbf{S} + 3\boldsymbol{\sigma}) \times \mathbf{L}$$

Megjegyzés: a kepleri pálya-impulzusmomentum időfejlődése SSC-függő:

$$\dot{\mathbf{L}}_{\text{N}} = -\frac{\mu G}{c^2 r^3} \mathbf{r} \times [\mathbf{v} \times (4\mathbf{S} + 3\boldsymbol{\sigma})] + \frac{3\mu G \dot{r}}{c^2 r^4} \mathbf{r} \times [\mathbf{r} \times (2\mathbf{S} + (2 - k)\boldsymbol{\sigma})]$$

Disszipatív mennyiségek a gravitációs sugárzás alapján

- Einstein vezetőrendű *kvadrupól-formulája* (1918) a mai napig megállja a helyét.
- A G/c^5 konstans reciprokát ($3.6 \times 10^{52} \text{W}$) szokás az *univerzum luminozitásának* nevezni.
- 1974 Hulse és Taylor felfedezték a **B1913+16** kettős pulzárt. Melynek perióduscsökkenése alapján bizonyítékot adott a **gravitációs hullámok** létezésére.
- 1993 Nobel díj

B1913+16:

$$\dot{T}_{GR} = -(2.40242 \pm 0.00002) \times 10^{-12}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \ddot{I}_{ij} \ddot{I}_{ij}$$

$$E = -\frac{\mu}{2} \left(\frac{2\pi Gm}{T} \right)^{2/3}$$

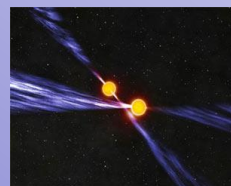
B1913+16: $\frac{\dot{T}_{mért}}{\dot{T}_{GR}} = 1.0013 \pm 0.0021$

J0737-3039: $\frac{\dot{T}_{mért}}{\dot{T}_{GR}} = 1.004 \pm 0.014$

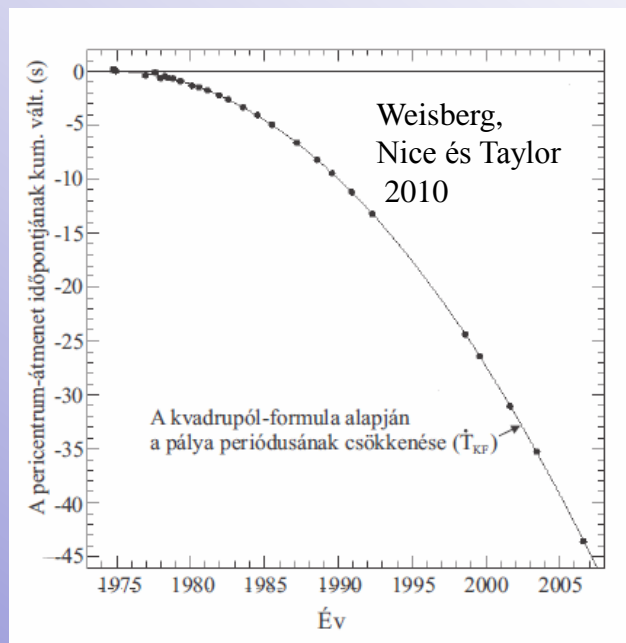
B1913+16 kettős pulzár periódusidejének csökkenése (1974)

Measured Orbital Parameters for B1913+16 System

Fitted Parameter	Value
$a_p \sin i$ (s)	2.9417725 (8)
e	0.6171338 (4)
T_0 (MJD)	52144.96097844 (5)
P_b (d)	0.322997448930 (4)
ω_0 (deg)	202.54487 (8)
$\langle \dot{\omega} \rangle$ (deg/yr) ...	4.226595 (5)
γ (s)	0.0042915 (8)
\dot{P}_b (10^{-12} s/s) ...	-2.4184 (9)



A **J0737-3039** kettős pulzárt 2003-04-ben fedezték fel (Burgay és Lyne).



Gravitációs sugárzási (vissza)hatás

Kettős rendszerre az energia (E) és impulzusmomentum-nagyságának (L) a veszteségei:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5c^5} \left(\ddot{I}_{ij}\ddot{I}_{ij} + \frac{16}{9c^2} \ddot{J}_{ij}\ddot{J}_{ij} \right),$$

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{2G}{5c^5} \varepsilon_{ipq} \left(\ddot{I}_{pj}\ddot{I}_{qj} + \frac{16}{9c^2} \ddot{J}_{pj}\ddot{J}_{qj} \right) \hat{L}_i$$

Kepleri-eset

Kepleri-esetben az E és L (egy radiális pályára átlagolt!) veszteségek:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{G^2 m (-2E\mu)^{3/2}}{15c^5 L^7} (148E^2 L^4 + 732G^2 m^2 \mu^3 EL + 425G^4 m^4 \mu^6)$$

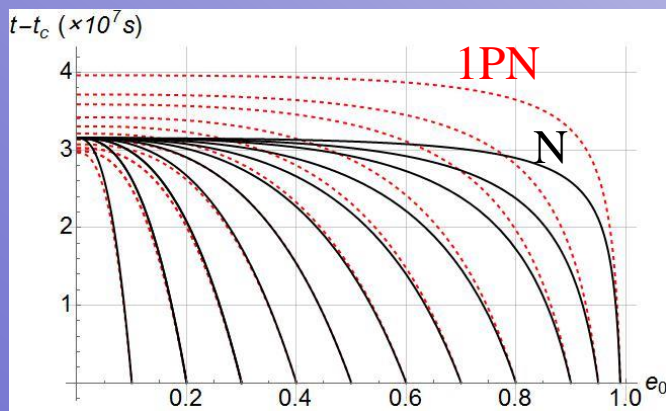
$$\left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle = -\frac{4G^2 m (-2E\mu)^{3/2}}{5c^5 L^4} (14EL^2 + 15G^2 m^2 \mu^3)$$



$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{2G^3 m^2 \mu (37e^4 + 292e^2 + 96)}{15c^5 a^3 (1 - e^2)^{7/2}}$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = -\frac{G^3 m^2 \mu e (121e^2 + 304)}{15c^5 a^4 (1 - e^2)^{5/2}}$$

Peters 1964

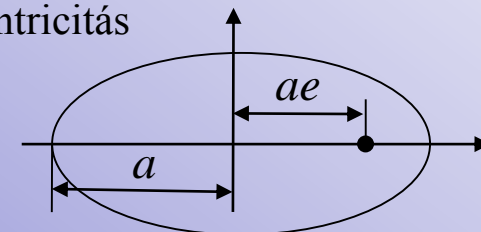


Mikóczi, Forgács & Vasúth 2015



A relatív pálya alakja befelé spirálozó ellipszis

a - fél nagytengely
 e - excentricitás



E- és L-veszteségek különböző SSC-ben

Szükséges van a tömeg- és áram-momentumokra:

$$I_{ij} = \mu(x_i x_j)^{STF} + \frac{2\mu}{3c^2 m} [\varepsilon_{ipq} [(3k+1)x_j v_p - 2x_p v_j] \sigma_q]^{STF},$$

SSC-függés

STF-szimmetrikus tracementes

$$J_{ij} = -\mu \frac{\delta m}{m} (\varepsilon_{ipq} x_j x_p v_q)^{STF} + \frac{3\mu}{2\delta m} [x_i (S_j - \sigma_j)]^{STF},$$

Belátható, hogy az áram-kvadrupólmomentum SSC-függtelen.

Az energia és impulzusmomentum veszteségei egy kettős rendszernek SO kölcsönhatásra különböző SSC-ben:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8G^3 m^2 \mu^2}{15c^5 r^4} (11\dot{r}^2 - 12v^2) - \frac{8G^3 m \mu L}{15c^7 r^6} \left[27\dot{r}^2 - 37v^2 - 12 \frac{Gm}{r} \right] \mathcal{S} - \frac{8G^3 m \mu L}{15c^7 r^6} \left[3(22k-5)\dot{r}^2 - (48k-5)v^2 + 4(6k-5) \frac{Gm}{r} \right] \Sigma,$$

ahol

$$\mathcal{S} = \hat{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{S} \text{ és } \Sigma = \hat{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

- k=1 Pirani (kovariáns) SSC I
- k=1/2 Newton-Wigner-Pryces SSC II
- k=0 Corinaldesi-Papapetrou SSC III

$$\frac{dL}{dt} = \frac{8G^2 m \mu L}{5c^5 r^5} \left(3\dot{r}^2 - 2v^2 - \frac{2Gm}{r} \right) + \frac{12G^2 \mu^2}{45c^7 r^7} \left[6(3\dot{r}^2 v^2 - 4\dot{r}^4 + v^4) - 26 \frac{Gm}{r} (\dot{r}^2 - v^2) - 6 \frac{G^2 m^2}{r^2} \right] \mathcal{S} + \frac{12G^2 \mu^2}{45c^7 r^7} \left[6(16-21k)\dot{r}^2 v^2 - (78-90k)\dot{r}^4 - (17-36k)v^4 + \frac{Gm}{r} [(7-24k)\dot{r}^2 - 8(1-3k)v^2] - 5 \frac{G^2 m^2}{r^2} \right] \Sigma,$$

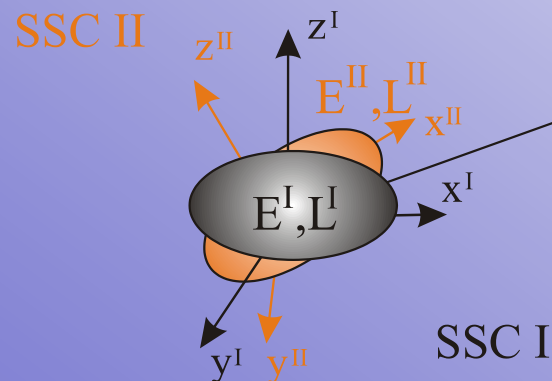
Átlagolt E- és L-veszteségek különböző SSC-ben

Megmutatható, hogy az SO energia és impulzusmomentum-veszteségek egy pályára átlagolással SSC-függetlenek lesznek:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle &= -\frac{G^2 m (-2E\mu)^{3/2}}{15c^5 L^7} (148E^2 L^4 + 732G^2 m^2 \mu^3 EL + 425G^4 m^4 \mu^6) \\ &+ \frac{G^2 (-2E\mu)^{3/2}}{10c^7 L^9} [(520E^3 L^6 + 10740G^2 m^2 \mu^3 E^2 L^4 + 24990G^4 m^4 \mu^6 EL^2 + 12579G^6 m^6 \mu^9)] S \\ &+ \frac{G^2 (-2E\mu)^{3/2}}{10c^7 L^9} (256E^3 L^6 + 6660G^2 m^2 \mu^3 E^2 L^4 + 16660G^4 m^4 \mu^6 EL^2 + 8673G^6 m^6 \mu^9) \Sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle &= -\frac{4G^2 m (-2E\mu)^{3/2}}{5c^5 L^4} (14EL^2 + 15G^2 m^2 \mu^3) \\ &+ \frac{G^2 (-2E\mu)^{3/2}}{15c^7 L^6} (1188E^2 L^4 + 6756G^2 m^2 \mu^3 EL^2 + 5345G^4 m^4 \mu^6) S \\ &+ \frac{G^2 (-2E\mu)^{3/2}}{15c^7 L^6} (772E^2 L^4 + 4476G^2 m^2 \mu^3 EL^2 + 3665G^4 m^4 \mu^6) \Sigma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle^I &= f(E^I, L^I) \\ \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle^{II} &= f(E^{II}, L^{II}) \end{aligned}$$



Összefoglalás

- Az előadásomban áttekintésre került a forgó testek mozgásának leírása az általános relativitáselméletben
- Bemutattam a Mathisson-Papapetrou-egyenletekre vonatkozó SSC-eket.
- Tárgyaltam az általánosított Osztrogradszkij-féle lagrange-i és hamiltoni mechanikát. Példákon keresztül (kényszeres dinamika és *dupla-nulla* formalizmus) bemutattam a gyorsulás eliminálásának lehetőségeit.
- Tárgyaltam a spin-pálya kölcsönhatást **kompakt kettősök** esetén tetszőleges SSC-ben. Felírtam a klasszikus mozgásegyenleteket általánosított lagrange-i és hamiltoni mechanika segítségével és megadtam a megmaradó mennyiségek SSC függését.
- Megmutattam az SSC-függő multipolmomentumok számolásából a pillanatnyi energia- és impulzusmomentum-veszteségeket és bebizonyítottam, hogy **egy radiális pályára vett átlagolás eliminálja az SSC-függést.**



Köszönöm a figyelmet!