A sárkány-konfigurációk

Egy megoldás csodái

Érdi Bálint
ELTE Csillagászati Tanszék

B.Erdi@astro.elte.hu
http://astro.elte.hu/∼erdi/

SZTE Elméleti Fizika Tanszék szemináriuma
2016. szeptember 22.

Bevezetés

- n-test probléma: égi mechanika alapproblémája

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i = k^2 \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \left(\underline{r}_j - \underline{r}_i \right), \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

- nem integrálható
- centrális konfigurációk jelentősége
- centrális konfiguráció:

  önhasonló, invariáns eltolásra, nyújtásra, forgatásra
  minden egyes testre ható eredő erő a TKP-ba mutat

- centralitás feltétele a gyorsulásra:

$$k^2 \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} \left(\underline{r}_j - \underline{r}_i \right) = -\lambda \underline{r}_i, \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

  $\lambda(t)$ azonos minden testre

- következmény

$$\ddot{\underline{r}}_i = -\lambda \underline{r}_i, \qquad 1 \leq i \leq n$$

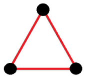
Bevezetés

- történeti háttér: $n = 3$, Euler-Lagrange–megoldások

  Euler (1767): 3 egyenesvonalú megoldás

  Lagrange (1772): 2 szabályos háromszög megoldás

- $n > 3$ nyitott kérdés

  Smale (1998), Saari (2011) a 21. század matematikai problémája: adott n-re véges-e a centrális konfigurációinak száma?

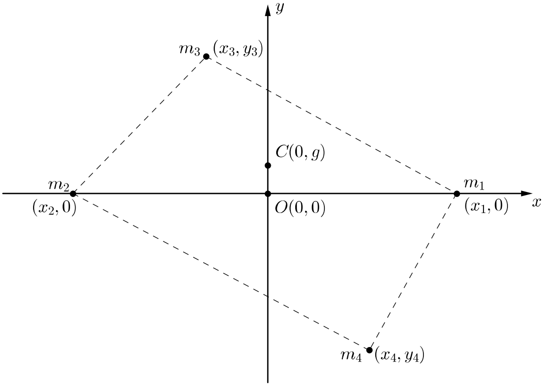
- Moulton (1910): $n!/2$ kollineáris centrális konfiguráció létezik (a testek minden lehetséges elrendezésére egy)

Bevezetés

- Pizetti (1904): $n = 4$, térben csak a szabályos tetraéder, egyenlő tömegekkel
- síkbeli ckf-k száma véges $n = 4$ (Hampton, Moeckel 2006) és $n = 5$ (Albouy, Kaloshin 2012) esetén
- Albouy (1995): síkban minden konvex ckf négy egyenlő tömeggel szimmetrikus, és pontosan három ckf létezik négy egyenlő tömeggel
- Perez-Chavela, Santoprete (2007): egy olyan ckf létezik, amikor két egyenlő tömeg egy négyszögben szemközt helyezkedik el, és ezeknél a harmadik tömeg nagyobb. Az ilyen konfigurációnak van szimmetriatengelye és deltoid alakú
- Alvarez-Ramírez, Llibre (2013): két konkáv megoldás típus létezik két-két szembenlévő, egyenlő tömegű pár esetén
- Piña, Lonngi (2010): kapcsolat négytest és háromtest ckf-k között mikor az egyik tömeg 0-hoz tart
- Új megközelítés: B. Érdi, Z. Czirják: Central configurations of four bodies with an axis of symmetry. *Celest. Mech. & Dyn. Astr.* **125**, 33-70, 2016

Síkbeli 4-test probléma: mozgásegyenletek

- Koordinátarendszer



tömegek: m_i koordináták: x_i, y_i tömegközéppont: $(0, g)$

$$0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4, \quad g = \frac{1}{M}(m_3 y_3 + m_4 y_4)$$

Síkbeli 4-test probléma: mozgásegyenletek

- feltételi egyenleteket elég az első három testre felírni:

$$
\begin{aligned}
\frac{m_2}{r_{12}^3}(x_2 - x_1) + \frac{m_3}{r_{13}^3}(x_3 - x_1) + \frac{m_4}{r_{14}^3}(x_4 - x_1) &= \Lambda x_1 \\
\frac{m_1}{r_{12}^3}(x_1 - x_2) + \frac{m_3}{r_{23}^3}(x_3 - x_2) + \frac{m_4}{r_{24}^3}(x_4 - x_2) &= \Lambda x_2 \\
\frac{m_1}{r_{13}^3}(x_1 - x_3) + \frac{m_2}{r_{23}^3}(x_2 - x_3) + \frac{m_4}{r_{34}^3}(x_4 - x_3) &= \Lambda x_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{m_3}{r_{13}^3} y_3 + \frac{m_4}{r_{14}^3} y_4 &= -\Lambda g \\
\frac{m_3}{r_{23}^3} y_3 + \frac{m_4}{r_{24}^3} y_4 &= -\Lambda g \\
-\frac{m_1}{r_{13}^3} y_3 - \frac{m_2}{r_{23}^3} y_3 + \frac{m_4}{r_{34}^3}(y_4 - y_3) &= \Lambda (y_3 - g)
\end{aligned}
$$

$\Lambda = -\lambda / k^2$

- negyedik test koordinátái az első háromméval kifejezhetők:

$$
x_4 = -\frac{1}{m_4}(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3), \quad y_4 = -\frac{1}{m_4}(m_3 y_3 - gM) \tag{1}
$$

Síkbeli 4-test probléma: mozgásegyenletek

- síkbeli centrális konfigurációk feltételi egyenletrendszere:

$$-x_1\left(\frac{m_2}{r_{12}^3}+\frac{m_3}{r_{13}^3}+\frac{m_1+m_4}{r_{14}^3}+\Lambda\right)+m_2x_2\left(\frac{1}{r_{12}^3}-\frac{1}{r_{14}^3}\right)+m_3x_3\left(\frac{1}{r_{13}^3}-\frac{1}{r_{14}^3}\right)=0 \qquad (2)$$

$$-x_2\left(\frac{m_1}{r_{12}^3}+\frac{m_3}{r_{23}^3}+\frac{m_2+m_4}{r_{24}^3}+\Lambda\right)+m_1x_1\left(\frac{1}{r_{12}^3}-\frac{1}{r_{24}^3}\right)+m_3x_3\left(\frac{1}{r_{23}^3}-\frac{1}{r_{24}^3}\right)=0 \qquad (3)$$

$$-x_3\left(\frac{m_1}{r_{13}^3}+\frac{m_2}{r_{23}^3}+\frac{m_3+m_4}{r_{34}^3}+\Lambda\right)+m_1x_1\left(\frac{1}{r_{13}^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right)+m_2x_2\left(\frac{1}{r_{23}^3}-\frac{1}{r_{34}^3}\right)=0 \qquad (4)$$

$$m_3y_3\left(\frac{1}{r_{13}^3}-\frac{1}{r_{14}^3}\right)+g\left(\Lambda+\frac{M}{r_{14}^3}\right)=0 \qquad (5)$$

$$m_3y_3\left(\frac{1}{r_{23}^3}-\frac{1}{r_{24}^3}\right)+g\left(\Lambda+\frac{M}{r_{24}^3}\right)=0 \qquad (6)$$

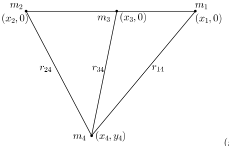
$$-y_3\left(\frac{m_1}{r_{13}^3}+\frac{m_2}{r_{23}^3}+\frac{m_3+m_4}{r_{34}^3}+\Lambda\right)+g\left(\Lambda+\frac{M}{r_{34}^3}\right)=0 \qquad (7)$$

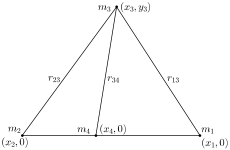
- paraméterek: $m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4$
- ismeretlenek: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ y_3,\ g,\ \Lambda$

Speciális esetek

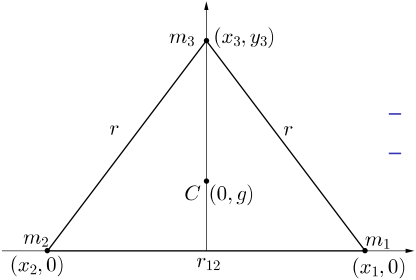
- Osztályozás g szerint
- Lehetséges esetek:
  - általános eset: $g \neq 0,\ y_3 \neq 0,\ y_4 \neq 0$
  - 1. speciális eset: $g \neq 0,\ y_3 = 0,\ y_4 \neq 0$, vagy $y_3 \neq 0,\ y_4 = 0$
  - 2. speciális eset: $g = 0,\ y_3 \neq 0,\ y_4 \neq 0$
  - Moulton-féle eset (1910): $g = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0$

- 2 aleset: $y_3 = 0, y_4 \neq 0$ vagy $y_3 \neq 0, y_4 = 0$
- mindkettőnél: 4-ből 2 test egybeesik, 3 marad:





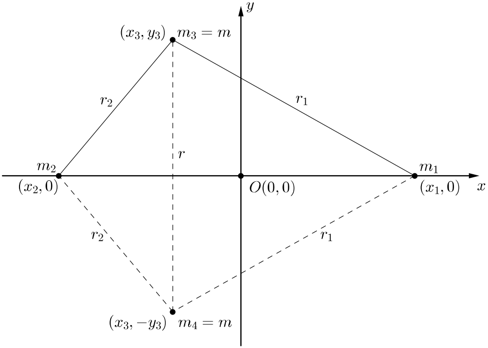
- tárgyalhatók együtt:



  – vagy $x_1 = x_2 \Rightarrow$ kéttest-probléma
  – vagy $r_{12} = r \Rightarrow$ Lagrange-féle szabályos háromszög-megoldás

2. speciális eset: $g = 0, y_3 \neq 0, y_4 \neq 0$

- $g = 0, y_3 \neq 0,\ y_4 \neq 0 \Rightarrow$ szimmetria
- (5)-(6)-ból: $$m_3 y_3 \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{14}^3}\right) = 0, \quad m_3 y_3 \left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{24}^3}\right) = 0$$
  $$\Rightarrow r_{13} = r_{14} = r_1,\ r_{23} = r_{24} = r_2,\ x_4 = x_3,\ y_4 = -y_3 = -y$$
- (1)-ből: $m_4 y_4 = -m_3 y_3 \Rightarrow m_3 = m_4 = m$



Szimmetrikus eset feltételi egyenletei

- (1)-ből: $$x_3 = -\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{2m}$$
- $\Rightarrow$ (2), (3), (4) közül csak kettő független: $m_1 \cdot (2) + m_2 \cdot (3) = (4)$
- Λ a (7)-ből kifejezhető
- szimmetrikus eset egyenletei:

$$m_2\Big(\frac{x_1 - x_2}{r_{12}^3} + \frac{x_2}{r_1^3} - \frac{x_1}{r_2^3}\Big) - 2mx_1\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3}\Big) = 0,$$
$$m_1\Big(\frac{x_1 - x_2}{r_{12}^3} + \frac{x_2}{r_1^3} - \frac{x_1}{r_2^3}\Big) + 2mx_2\Big(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_2^3}\Big) = 0,$$
$$\Lambda = -\frac{m_1}{r_1^3} - \frac{m_2}{r_2^3} - \frac{2m}{r^3},$$

$$r = 2y, \quad r_{12} = |x_1 - x_2|,$$

$$r_1 = \sqrt{\left(x_1 + \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{2m}\right)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{\left(x_2 + \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{2m}\right)^2 + y^2}$$

- 3 paraméter: m_1, m_2, m; 4 ismeretlen: x_1, x_2, y, Λ
- nemlineáris algebrai egyenletrendszer

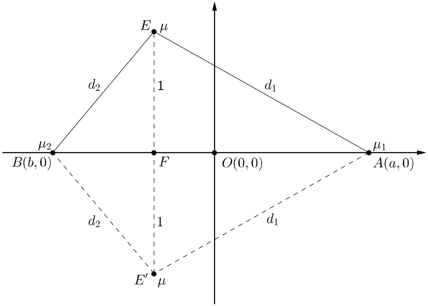
Dimenziótlan változók bevezetése

- hosszegység: $y \Rightarrow$ dimenziótlan koordináták és távolságok:

$$a = \frac{x_1}{y}, \quad b = \frac{x_2}{y}, \quad d = \frac{r}{y} = 2, \quad d_1 = \frac{r_1}{y}, \quad d_2 = \frac{r_2}{y}, \quad d_{12} = \frac{r_{12}}{y}$$

- tömegegység: $m_1 + m_2 + 2m \Rightarrow$ dimenziótlan tömegek:

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + 2m}, \ \mu_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + 2m}, \ \mu = \frac{m}{m_1 + m_2 + 2m} = \frac{1 - \mu_1 - \mu_2}{2}$$



$$0 \le \mu_1, \mu_2 \le 1$$

$$0 \le \mu_1 + \mu_2 \le 1$$

$$0 \le \mu \le 0.5$$

Dimenziótlan egyenletek

- feltételi egyenletek dimenziótlan változókkal:

$$\mu_2\left(\frac{a-b}{d_{12}^3}+\frac{b}{d_1^3}-\frac{a}{d_2^3}\right)-(1-\mu_1-\mu_2)\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{d_1^3}\right)a=0, \tag{8}$$

$$\mu_1\left(\frac{a-b}{d_{12}^3}+\frac{b}{d_1^3}-\frac{a}{d_2^3}\right)+(1-\mu_1-\mu_2)\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{d_2^3}\right)b=0, \tag{9}$$

$$\lambda\,\frac{y^3}{k^2(m_1+m_2+2m)}=\frac{\mu_1}{d_1^3}+\frac{\mu_2}{d_2^3}+\frac{1-\mu_1-\mu_2}{8} \tag{10}$$

$$d_1=\sqrt{\left(a+\frac{\mu_1 a+\mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2+1},\quad d_2=\sqrt{\left(b+\frac{\mu_1 a+\mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2+1}$$

$$d_{12}=|a-b|$$

- (8)-(9)-ben: 2 paraméter: μ_1, μ_2; 2 ismeretlen: a, b
- (10): kapcsolat fizikai és dimenziótlan változók között (Kepler III. t.) $\Rightarrow \lambda$
- probléma: (8)-(9) egyenletrendszer erősen nemlineáris d_1, d_2 miatt

Szögkoordináták bevezetése

- ötlet: a, b helyett szögek bevezetése, hogy d_1, d_2 egyszerűbb legyen
- szögkoordináták bevezetése függ a konfiguráció típusától
- tömegek elhelyezése a síkban:

Szögkoordináták bevezetése

- szögkoordináták bevezetése függ a konfiguráció típusától
- tömegek elhelyezése a síkban:

Szögkoordináták bevezetése

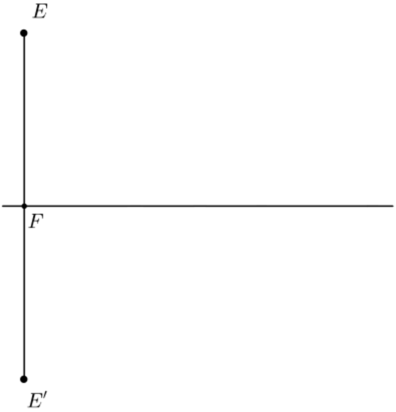
- szögkoordináták bevezetése függ a konfiguráció típusától
- tömegek elhelyezése a síkban:

Szögkoordináták bevezetése

- szögkoordináták bevezetése függ a konfiguráció típusától
- tömegek elhelyezése a síkban:

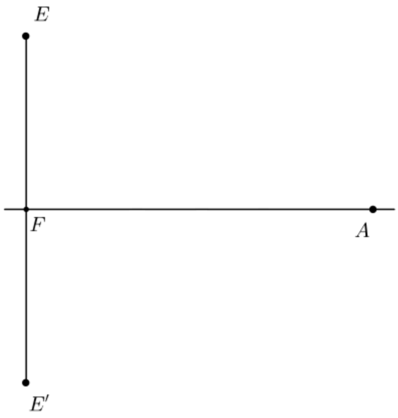
Szögkoordináták bevezetése

- szögkoordináták bevezetése függ a konfiguráció típusától
- tömegek elhelyezése a síkban:



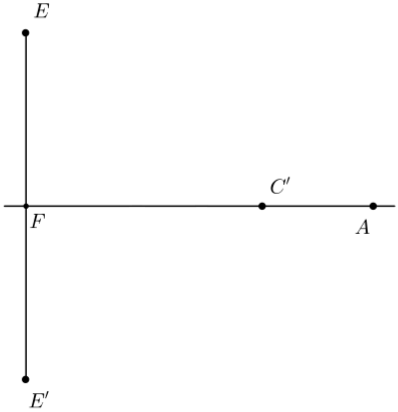
Szögkoordináták bevezetése

- szögkoordináták bevezetése függ a konfiguráció típusától
- tömegek elhelyezése a síkban:



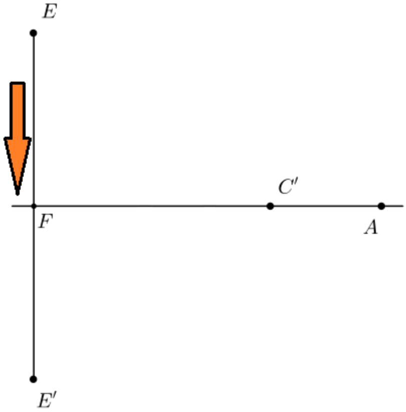
Szögkoordináták bevezetése

- szögkoordináták bevezetése függ a konfiguráció típusától
- tömegek elhelyezése a síkban:



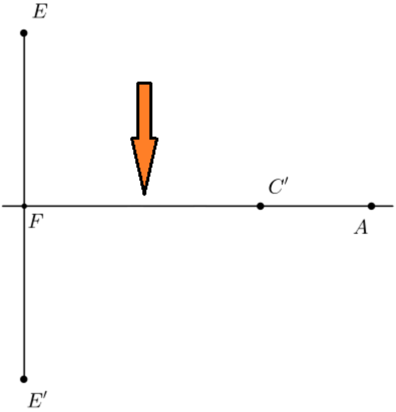
Szögkoordináták bevezetése

- szögkoordináták bevezetése függ a konfiguráció típusától
- tömegek elhelyezése a síkban:



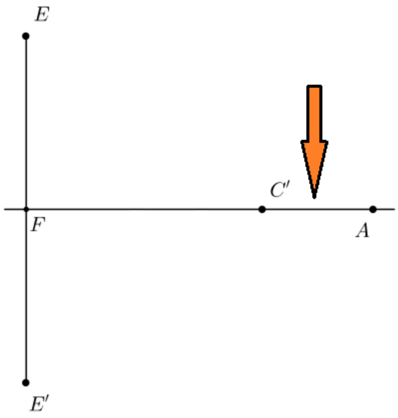
Szögkoordináták bevezetése

- szögkoordináták bevezetése függ a konfiguráció típusától
- tömegek elhelyezése a síkban:



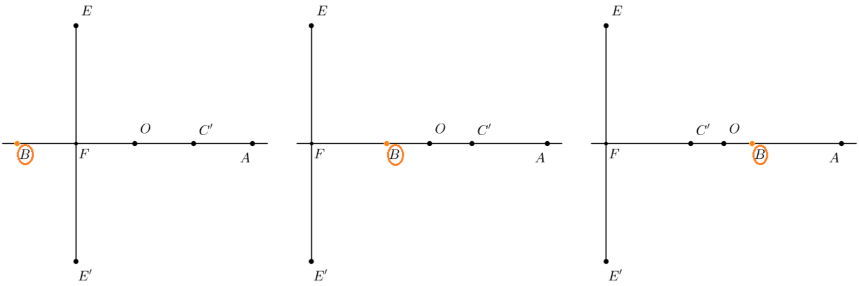
Szögkoordináták bevezetése

- szögkoordináták bevezetése függ a konfiguráció típusától
- tömegek elhelyezése a síkban:



Szögkoordináták bevezetése

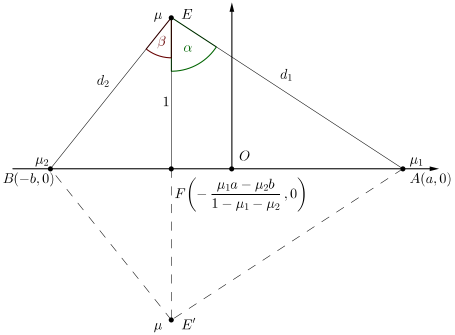
- 1 konvex és 2 konkáv konfiguráció:



konvex | 1. konkáv | 2. konkáv

- konvex eset: feltehető, hogy $\mu_1 \geq \mu_2$ (A nagyobb B-nél)
- konkáv esetek: nincs megkötés μ_1-re és μ_2-re (A és B felcserélhető)

Szögkoordináták bevezetése: konvex eset



- transzformáció:

$$\tan\alpha = a + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2},$$

$$\tan\beta = b - \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}$$

- innen

$$a = (1-\mu_1)\tan\alpha + \mu_2\tan\beta,$$

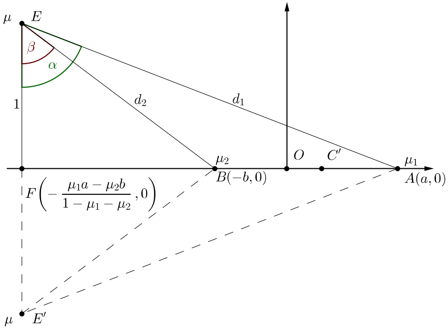
$$b = \mu_1\tan\alpha + (1-\mu_2)\tan\beta$$

- távolságok:

$$d_1 = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad d_2 = \frac{1}{\cos\beta}$$

$$d_{12} = \tan\alpha + \tan\beta$$

Szögkoordináták bevezetése: 1. konkáv eset



- transzformáció:

$$\tan\alpha = a + \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2},$$

$$\tan\beta = \frac{\mu_1 a - \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2} - b$$

$$a = (1-\mu_1)\tan\alpha - \mu_2\tan\beta,$$

$$b = \mu_1\tan\alpha - (1-\mu_2)\tan\beta$$

- távolságok:

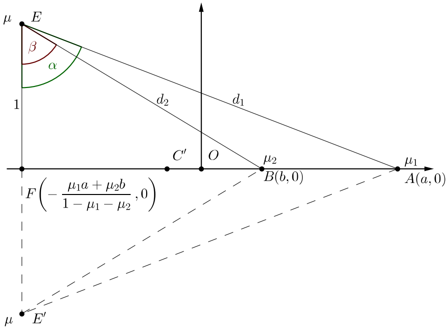
$$d_1 = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad d_2 = \frac{1}{\cos\beta}$$

$$d_{12} = \tan\alpha - \tan\beta$$

- feltétel:

$$\tan\beta < \frac{\mu_1}{1-\mu_2}\tan\alpha$$

Szögkoordináták bevezetése: 2. konkáv eset



- transzformáció:

$$\tan\alpha = a + \frac{\mu_1 a + \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2},$$
$$\tan\beta = b + \frac{\mu_1 a + \mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}$$

$$a = (1-\mu_1)\tan\alpha - \mu_2\tan\beta,$$
$$b = -\mu_1\tan\alpha + (1-\mu_2)\tan\beta$$

- távolságok:

$$d_1 = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad d_2 = \frac{1}{\cos\beta}$$

$$d_{12} = \tan\alpha - \tan\beta$$

- feltétel:

$$\tan\beta > \frac{\mu_1}{1-\mu_2}\tan\alpha$$

Transzformált egyenletek:

- (8)-(9)-re a transzformációt alkalmazva, a transzformált egyenletek mindhárom esetben:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu_2}{(\tan\alpha - \tan\beta)^2} \\
&+ \cos^3\alpha\big\{(1-\mu_1-\mu_2)\big[(1-\mu_1)\tan\alpha - \mu_2\tan\beta\big] - \mu_2\big[\mu_1\tan\alpha - (1-\mu_2)\tan\beta\big]\big\} \\
&- \cos^3\beta\mu_2\big[(1-\mu_1)\tan\alpha - \mu_2\tan\beta\big] - \frac{1-\mu_1-\mu_2}{8}\big[(1-\mu_1)\tan\alpha - \mu_2\tan\beta\big] = 0, \\
&\frac{\mu_1}{(\tan\alpha - \tan\beta)^2} \\
&- \cos^3\beta\big\{-(1-\mu_1-\mu_2)\big[\mu_1\tan\alpha - (1-\mu_2)\tan\beta\big] + \mu_1\big[(1-\mu_1)\tan\alpha - \mu_2\tan\beta\big]\big\} \\
&- \cos^3\alpha\mu_1\big[\mu_1\tan\alpha - (1-\mu_2)\tan\beta\big] - \frac{1-\mu_1-\mu_2}{8}\big[\mu_1\tan\alpha - (1-\mu_2)\tan\beta\big] = 0
\end{aligned}
$$

- a konvex esetben β helyett $-\beta$ szerepel
- 1. csoda: kritikus nevezők eltűnnek

Transzformált egyenletek:

- Következmény: vizsgálható az inverz probléma

  direkt probléma: adottak a tömegek, keressük a helyeket

  inverz probléma: adottak a helyek, keressük a tömegeket

- (8)-(9)-nél mindkét probléma nehéz:

$$\mu_2\left(\frac{a-b}{d_{12}^3}+\frac{b}{d_1^3}-\frac{a}{d_2^3}\right)-(1-\mu_1-\mu_2)\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{d_1^3}\right)a=0, \tag{8}$$

$$\mu_1\left(\frac{a-b}{d_{12}^3}+\frac{b}{d_1^3}-\frac{a}{d_2^3}\right)+(1-\mu_1-\mu_2)\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{d_2^3}\right)b=0, \tag{9}$$

$$d_1=\sqrt{\left(a+\frac{\mu_1 a+\mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2+1}, \quad d_2=\sqrt{\left(b+\frac{\mu_1 a+\mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2+1}$$

Transzformált egyenletek:

- transzformált egyenletek:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu_2}{(\tan\alpha-\tan\beta)^2}\\
&+\cos^3\alpha\Big\{(1-\mu_1-\mu_2)\big[(1-\mu_1)\tan\alpha-\mu_2\tan\beta\big]-\mu_2\big[\mu_1\tan\alpha-(1-\mu_2)\tan\beta\big]\Big\}\\
&-\cos^3\beta\mu_2\big[(1-\mu_1)\tan\alpha-\mu_2\tan\beta\big]-\frac{1-\mu_1-\mu_2}{8}\big[(1-\mu_1)\tan\alpha-\mu_2\tan\beta\big]=0,\\
&\frac{\mu_1}{(\tan\alpha-\tan\beta)^2}\\
&-\cos^3\beta\Big\{-(1-\mu_1-\mu_2)\big[\mu_1\tan\alpha-(1-\mu_2)\tan\beta\big]+\mu_1\big[(1-\mu_1)\tan\alpha-\mu_2\tan\beta\big]\Big\}\\
&-\cos^3\alpha\mu_1\big[\mu_1\tan\alpha-(1-\mu_2)\tan\beta\big]-\frac{1-\mu_1-\mu_2}{8}\big[\mu_1\tan\alpha-(1-\mu_2)\tan\beta\big]=0
\end{aligned}
$$

- direkt probléma (adott μ_1, μ_2, keressük α, β-t) nehéz
- inverz probléma (adott α, β, keressük μ_1, μ_2 -t) bíztatónak látszik: μ_1, μ_2-re másodfokú egyenletek

Inverz probléma

- rendezés μ_1, μ_2-re:

$$a_0\mu_1^2 - 2a_0\mu_1 + c\mu_1\mu_2 + b_1\mu_2 - b_0\mu_2^2 + a_0 = 0, \tag{11}$$

$$-a_0\mu_1^2 + a_1\mu_1 - c\mu_1\mu_2 - 2b_0\mu_2 + b_0\mu_2^2 + b_0 = 0 \tag{12}$$

- az együtthatók:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left(\cos^3\alpha - \frac{1}{8}\right)\tan\alpha, \\
a_1 &= \frac{1}{(\tan\alpha - \tan\beta)^2} - \left(\frac{1}{8} - \cos^3\alpha - \cos^3\beta\right)\tan\beta - \frac{1}{8}\tan\alpha, \\
b_0 &= -\left(\cos^3\beta - \frac{1}{8}\right)\tan\beta, \\
b_1 &= \frac{1}{(\tan\alpha - \tan\beta)^2} + \left(\frac{1}{8} - \cos^3\alpha - \cos^3\beta\right)\tan\alpha + \frac{1}{8}\tan\beta, \\
c &= \left(\cos^3\beta - \frac{1}{8}\right)\tan\alpha + \left(\cos^3\alpha - \frac{1}{8}\right)\tan\beta
\end{aligned}$$

- mindhárom esetben az együtthatók ugyanazok
- de a konvex esetben β helyett $-\beta$ írandó

Inverz probléma

- 2. csoda: lineáris összefüggés μ_1, μ_2 között

  (11)-et és (12)-t összeadva:

  $$(a_1 - 2a_0)\mu_1 + (b_1 - 2b_0)\mu_2 + a_0 + b_0 = 0 \tag{13}$$

  $\rightarrow$ egyszerű megoldás (11)-(12)-re

- 3. csoda: összefüggés az együtthatók között

  $$a_0 - b_0 + b_1 - a_1 + c = 0 \tag{14}$$

  $\rightarrow$ algebrai számítások leegyszerűsödnek

Megoldás a tömegekre

- (13)-ból:

$$\mu_1 = \frac{b_1 - 2b_0}{2a_0 - a_1}\mu_2 + \frac{a_0 + b_0}{2a_0 - a_1}$$

- (11)-ből (14) felhasználásával:

$$p\mu_2^2 + q\mu_2 + r = 0$$

where

$$\begin{aligned} p &= (2a_0 - a_1 + b_1 - 2b_0)(a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1), \\ q &= \left[a_1(2b_0 - b_1) + (b_0 - a_0)(2a_0 - a_1)\right](a_1 + b_0 - a_0), \\ r &= -a_0(a_1 + b_0 - a_0)^2 \end{aligned}$$

Megoldás a tömegekre

- 4. csoda: diszkrimináns teljes négyzet

$$
\begin{aligned}
D &= q^2 - 4pr \\
&= \left[a_1(2b_0 - b_1) + (b_0 - a_0)(2a_0 - a_1)\right]^2 (a_1 + b_0 - a_0)^2 \\
&\quad + 4a_0(a_1 + b_0 - a_0)^2(2a_0 - a_1 + b_1 - 2b_0)(a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1) \\
&= \left[(2a_0 - a_1)(a_1 + b_0 - a_0)(b_1 + a_0 - b_0)\right]^2
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ explicit algebrai megoldás a tömegekre

Megoldás a tömegekre

- két megoldáspár:

$$\mu_1 = \frac{(b_1 + a_0 - b_0)b_0}{a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1}, \quad \mu_2 = \frac{(a_1 + b_0 - a_0)a_0}{a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1} \tag{15}$$

$$\nu_1 = \frac{a_0 - b_0 + b_1}{2a_0 - a_1 + b_1 - 2b_0}, \quad \nu_2 = \frac{a_0 - b_0 - a_1}{2a_0 - a_1 + b_1 - 2b_0}$$

- második esetben: $\nu_1 + \nu_2 = 1 \rightarrow$ kéttest-probléma
- fizikailag értelmes megoldások:

$$0 \leq \mu_1, \mu_2 \leq 1, \quad 0 \leq \mu_1 + \mu_2 \leq 1$$

Megoldás a tömegekre

- Szimmetria
- emlékeztető:

$$a_0\mu_1^2 - 2a_0\mu_1 + c\mu_1\mu_2 + b_1\mu_2 - b_0\mu_2^2 + a_0 = 0, \tag{11}$$
$$-a_0\mu_1^2 + a_1\mu_1 - c\mu_1\mu_2 - 2b_0\mu_2 + b_0\mu_2^2 + b_0 = 0 \tag{12}$$

$$(a_1 - 2a_0)\mu_1 + (b_1 - 2b_0)\mu_2 + a_0 + b_0 = 0 \tag{13}$$

- kapott megoldás: (13)-ból μ_1, (11)-ből μ_2 $\rightarrow$ (15)
- ugyanezt kapjuk, ha (13)-ból μ_2-t, (12)-ből μ_1-et számítjuk
- szimmetria:

  felcserélve a változókat: $a_i \rightarrow b_i$, $b_i \rightarrow a_i$, $\mu_1 \rightarrow \mu_2$, $\mu_2 \rightarrow \mu_1$,
  következmény: (11)$\rightarrow$ (12), (12)$\rightarrow$ (11)
  (15)-ben $\mu_1 \rightarrow \mu_2$, $\mu_2 \rightarrow \mu_1$

Belépés az ajtón

- Kulcs:

$$\mu_1 = \frac{(b_1 + a_0 - b_0)b_0}{a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1}, \quad \mu_2 = \frac{(a_1 + b_0 - a_0)a_0}{a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1}$$

- Belépés az ajtón a sárkánykonfigurációk világába
- Korábban csak néhány részlet:

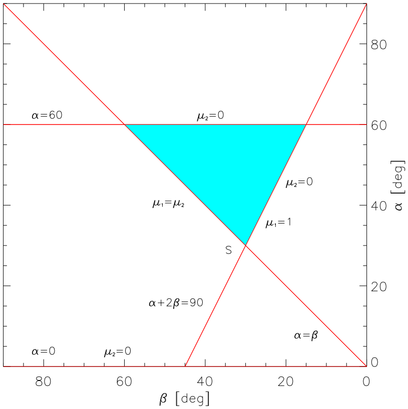
  Albouy (1995), Perez-Chavela & Santoprete (2007),

  Piña, & Lonngi (2010), Alvarez-Ramírez & Llibre (2013)
- μ_1, μ_2 kiszámítása az α, β paraméter-síkon sűrű rácson

Konvex eset: megengedett tartomány

- megengedett tartomány:

  minden α, β-ra $\rightarrow$ centrális konfiguráció



- kritikus egyenesek:

  $\mu_1 = 1,\ \mu_2 = 0 \rightarrow \alpha + 2\beta = 90°$

  $\mu_1 = \mu_2 \rightarrow \alpha = \beta$

  $\mu_2 = 0 \rightarrow \alpha = 60°$

- szinguláris pont S ($\alpha = \beta = 30°$)

  $\mu_1 = 1,\ \mu_1 = \mu_2 = 0$

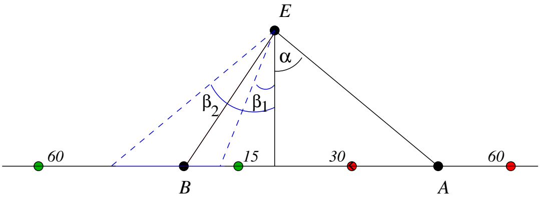
- S-ben új megoldás:

  $\mu_1 + \mu_2 = 1$

  Lagrange-féle háromszög megoldás (AEB, AE'B) egy 0 tömeggel ($\mu = 0$)

Konvex eset: egy-paraméteres családok

- egy-paraméteres családok:



- határok:

  $\alpha = 30^\circ - 60^\circ$

  $\beta = 15^\circ - 60^\circ$

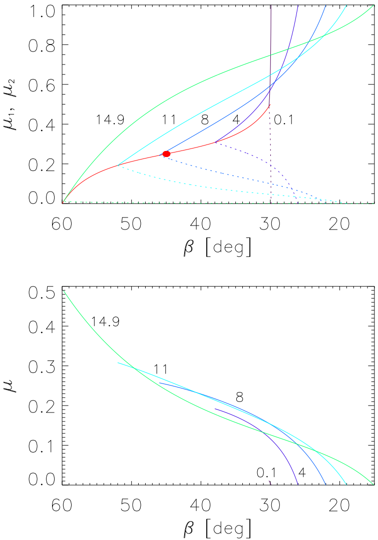
- rögzített α-ra:

  $\alpha = 30^\circ + 2\kappa$

  $30^\circ - \kappa \leq \beta \leq 30^\circ + 2\kappa$

  $0^\circ \leq \kappa \leq 15^\circ$

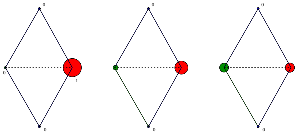
Konvex eset: tömegek



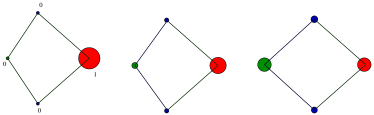
- kezdet: egytest "probléma" A
- vég: rombusz 2-2 egyenlő tömeggel A=B, E=E'
- speciális: négyzet 4 egyenlő tömeggel
- Lagrange-féle háromszög megoldások:
  - S szinguláris pont ($\alpha = \beta = 30°$)
  - $\alpha = 60°$, $\mu_2 = 0$ minden β-ra

Konvex eset: konfigurációk

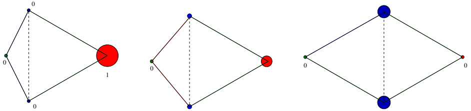
- $\kappa = 0^\circ \to$ S($\alpha = \beta = 30^\circ$): Lagrange-megoldások



- $0^\circ < \kappa < 15^\circ$: deltoid átmegy rombuszba



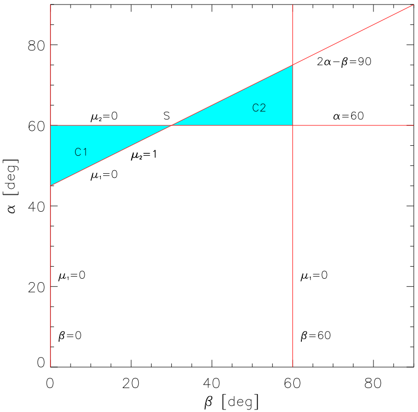
- $\kappa = 15^\circ \to \alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ - 60^\circ$: Lagrange-megoldások



Konkáv esetek: megengedett tartományok

- megengedett tartományok:

  minden α, β-ra $\rightarrow$ centrális konfiguráció



- kritikus egyenesek:

  $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1 \rightarrow 2\alpha - \beta = 90°$

  $\mu_1 = 0 \rightarrow \beta = 0°,\ \beta = 60°$

  $\mu_2 = 0 \rightarrow \alpha = 60°$

- szinguláris pont S

  $(\beta = 30°,\ \alpha = 60°)$

  $\mu_2 = 1,\ \mu_2 = 0$

- S-ben új megoldás:

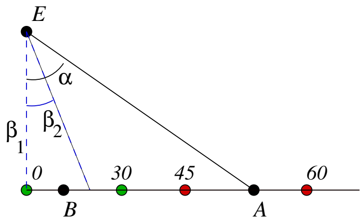
  $3\mu_1 + \mu_2 = 1$

  Lagrange-féle háromszög megoldás (AEE') három egyenlő tömeggel ($\mu = \mu_1$).

  B a tömegközéppontban, tömege (μ_2) tetszőleges

1. konkáv eset: egy-paraméteres családok

- egy-paraméteres családok:



- határok:

  $\alpha = 45^\circ - 60^\circ$

  $\beta = 0^\circ - 30^\circ$

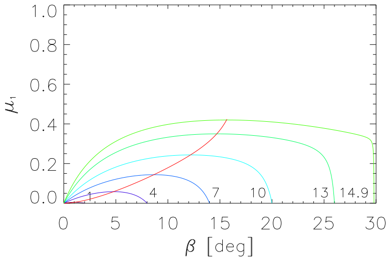
- rögzített α-ra:

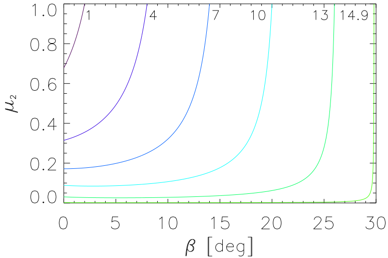
  $\alpha = 45^\circ + \kappa$

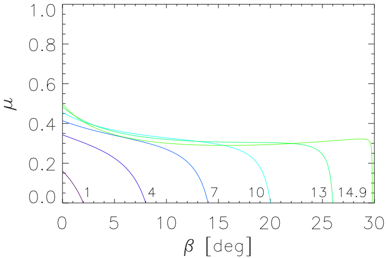
  $0^\circ \leq \beta \leq 2\kappa$

  $0^\circ \leq \kappa \leq 15^\circ$

1. konkáv eset: tömegek

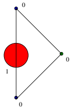




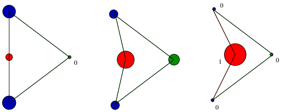


- kezdet: kollineáris Euler-Lagrange-megoldás (E,B,E')
- vég: egytest "probléma" (B, $\mu_2 = 1$)
- Lagrange-féle háromszög megoldások (A,E,E'):
  - S szinguláris pontban ($\alpha = 60°$,$\beta = 30°$) B tetszőleges, A, E, E' egyenlő

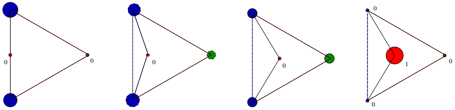
- $\kappa = 0^\circ$: koorbitális konfiguráció



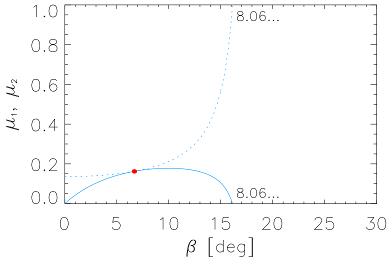
- $0^\circ < \kappa < 15^\circ \rightarrow$ kezdet: Euler–Lagrange-megoldások

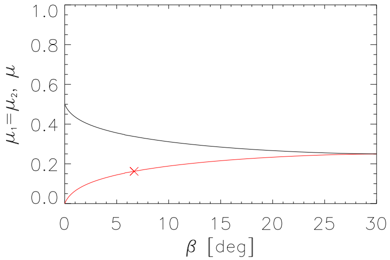


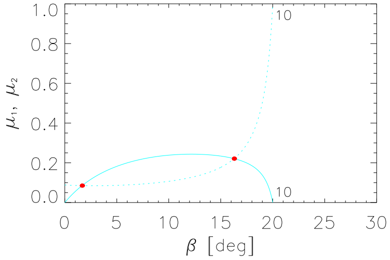
- $\kappa = 15^\circ \rightarrow$ S, $(\alpha = 60^\circ,\ \beta = 0^\circ - 30^\circ)$: Lagrange-megoldások



1. konkáv eset: tömegek



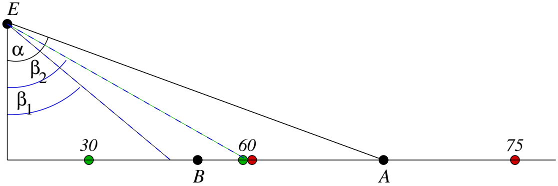




- metszéspontok: $\mu_1 = \mu_2$
- $\kappa_{C1} = 8.06°$:
  egy metszéspont ($\beta = 6.67°$)
- $\kappa_{C1} < \kappa < 15°$:
  két metszéspont $\Rightarrow \exists$ 2 konfiguráció:
  α azonos, β különbözik

2. konkáv eset: egy-paraméteres családok

- egy-paraméteres családok:



- határok:

  $\alpha = 60° - 75°$

  $\beta = 30° - 60°$

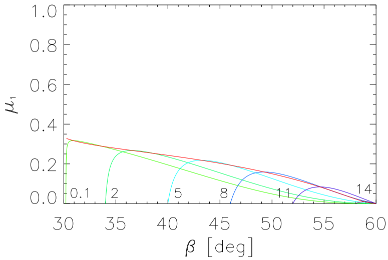
- rögzített α-ra:

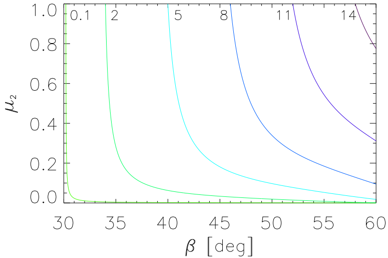
  $\alpha = 60° + \kappa$

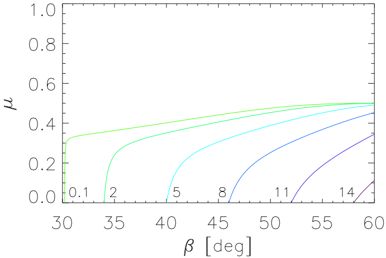
  $30° + 2\kappa \leq \beta \leq 60°$

  $0° \leq \kappa \leq 15°$

2. konkáv eset: tömegek



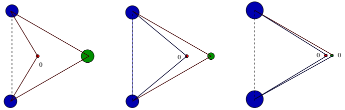




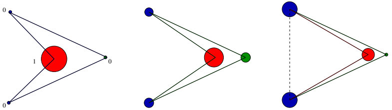
- kezdet: egytest "probléma" (B, $\mu_2 = 1$)
- vég: Lagrange-féle háromszög megoldás (B,E,E')

2. konkáv eset: konfigurációk

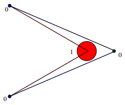
- $\kappa = 0°$ S-ből indul ($\alpha = 60°$, $\beta = 30° - 60°$): Lagrange-megoldások



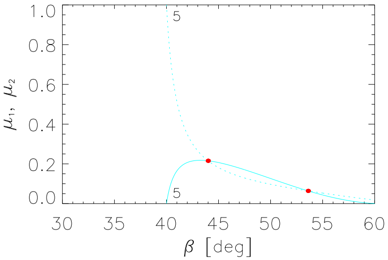
- $0° < \kappa < 15°$ egytest-problémától Lagrange-megoldásig

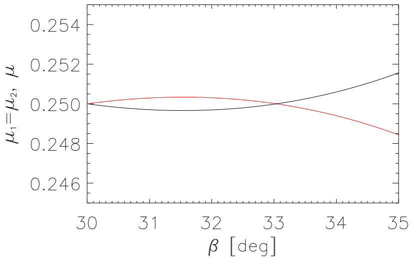


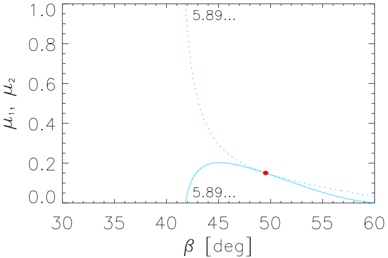
- $\kappa = 15°$



2. konkáv eset: tömegek







- metszéspontok: $\mu_1 = \mu_2$
- $\kappa_{C2} = 5.89^\circ$:
  egy metszéspont ($\beta = 49.49^\circ$)
- $0^\circ < \kappa < \kappa_{C2}$:
  két metszéspont $\Rightarrow \exists$ 2 konfiguráció:
  α azonos, β különbözik
- speciális: 4 egyenlő tömeg
  $\alpha = 61.17^\circ$, $\beta = 33.04^\circ$

Összegzés

- deltoid (sárkány) alakú centrális konfigurációk feltételi egyenletrendszere:

$$\mu_2\left(\frac{a-b}{d_{12}^3}+\frac{b}{d_1^3}-\frac{a}{d_2^3}\right)-(1-\mu_1-\mu_2)\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{d_1^3}\right)a=0,$$

$$\mu_1\left(\frac{a-b}{d_{12}^3}+\frac{b}{d_1^3}-\frac{a}{d_2^3}\right)+(1-\mu_1-\mu_2)\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{d_2^3}\right)b=0$$

$$d_1=\sqrt{\left(a+\frac{\mu_1 a+\mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2+1},\quad d_2=\sqrt{\left(b+\frac{\mu_1 a+\mu_2 b}{1-\mu_1-\mu_2}\right)^2+1}$$

  - nemlineáris, numerikusan is nehéz, részmegoldások
- explicit algebrai megoldás:

$$a=(1-\mu_1)\tan\alpha+\mu_2\tan\beta,$$

$$b=\mu_1\tan\alpha+(1-\mu_2)\tan\beta$$

$$\mu_1=\frac{(b_1+a_0-b_0)b_0}{a_0b_1+a_1b_0-a_1b_1},\quad \mu_2=\frac{(a_1+b_0-a_0)a_0}{a_0b_1+a_1b_0-a_1b_1}$$

  - összes megoldás, 1 konvex, 2 konkáv konfiguráció
  - α, β adott tartományokban, egy-paraméteres családok
  - kapcsolat a Lagrange-megoldásokkal

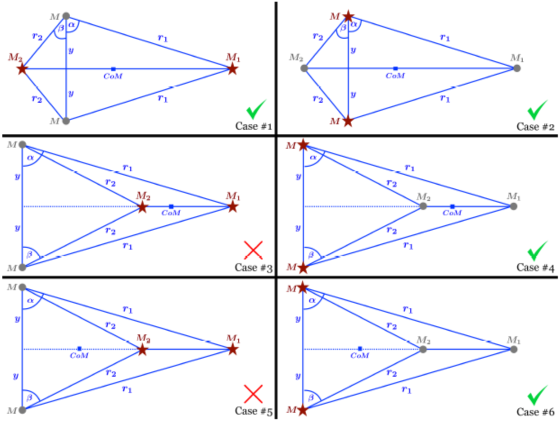
Távlatok

sok kutatási irány:

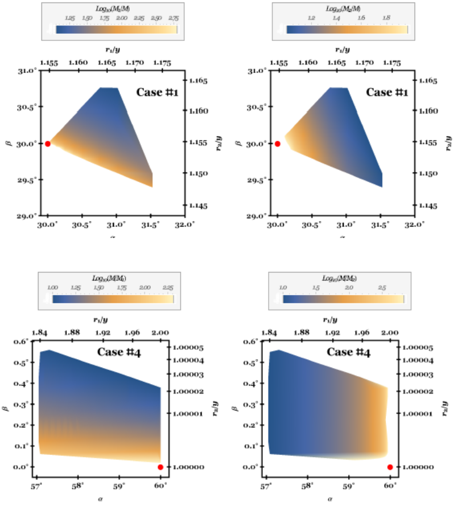
- $g \neq 0$
- stabilitás, konvex és konkáv koorbitális esetek
- $n > 4$
- alkalmazások
  - négyes rendszerek (s csillag $+$ p bolygó, $s + p = 4$)
  - $n = 3$, L_4, L_5 pontok, trójai kísérők:
    Nap-Jupiter: L_4 4084, L_5 2201
    Nap-Föld: L_4 1, 2010 TK7
    Nap-Mars: 4, Nap-Uránusz: 1, Nap-Neptunusz: 12
    Szaturnusz-Dione: 1, Szaturnusz-Tethys: 2
  - űrhajózás: minimális energiájú pályák
    Nap-Föld L_1: ISEE-3, ACE, SOHO, LISA Pathfinder
    Nap-Föld L_2: WMAP, Herschel, Gaia (James Webb, PLATO)
    Nap-Föld-L_1-L_2: NASA Genesis; Föld-Hold-L_1-L_2: SMART-1

- Egy alkalmazás:

  Veras, D.: Relating binary star-planetary systems with central configurations. MNRAS 462, 3368, 2016

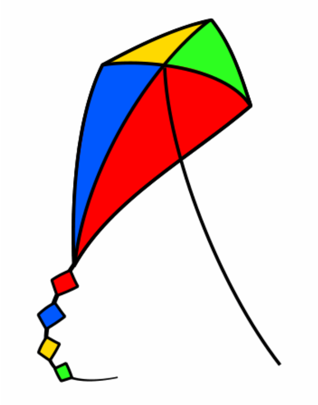


Távlatok



Veras, D.: MNRAS 462, 3368, 2016

Köszönöm a figyelmet



$$\mu_1 = \frac{(b_1 + a_0 - b_0)b_0}{a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1}, \quad \mu_2 = \frac{(a_1 + b_0 - a_0)a_0}{a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1}$$