Inverz kvantum szórás

Apagyi Barnabás
BME, Elméleti Fizika Tanszék

SzTE szeminárium, 2016. november 3.

Tartalom

- **Bevezetés:** Schrödinger egyenlet (SE), Sturm-Liouville (SL) egyenlet SL spektrálproblémák, inverz feladatok.
- **Fix-ℓ inverz szórásprobléma:** Spektrálfüggvény, Gelfand-Levitan integrálegyenlet (GL), fizikai megoldás, Marchenko integrálegyenlet (M), Jost megoldás.
- **Fix-E inverz szórásprobléma:** GLM típusú integrálegyenlet, Newton-Sabatier (NS) és Cox-Thompson (CT) módszer.
- **Példák:** teszt, $n-\alpha$, $e-Ar$, ${}^{12}C$-${}^{12}C$, $\pi-\pi$, stb.
- **Fix-E inverz szórásprobléma:** exponenciális transzformáció, Horváth-Apagyi (HA) módszer (GL alkalmazása), Pálmai-Apagyi (PA) módszer (M alkalmazása).
- **Teszt példák:** box, lépcső, véges hatótávolságú Coulomb.
- **Összefoglalás**

Schrödinger egyenlet, Sturm-Liouville egyenlet

Radiális **Schrödinger egyenlet** (SE) gömbszimmetrikus potenciál esetén (XX.század):

$$-\frac{d^2R_\ell(r)}{dr^2}+\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+q(r)\right)R_\ell(r)=k^2R_\ell(r),$$

$$R_\ell(r)\propto O(r^{\ell+1}),\quad r\to 0,$$

$$R_\ell(r)\propto e^{i\delta_\ell(k)}\sin(kr-\frac{\ell\pi}{2}+\delta_\ell(k))+o(1),\quad r\to\infty.$$

Inverz feladat: $\{k_i^2<0\},\{\delta_\ell(k)\}\Rightarrow q(r)$

Sturm-Liouville (SL) egyenlet (XIX. század):

$$\boxed{-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x),\quad x\in[a,b]\ \to\ [0,\infty)}$$

határfeltételek ($h_a, h_b\in\mathbb{R}$):

$$y'(a)=h_ay(a),\ y'(b)=h_by(b),\Rightarrow\ \{\lambda_n\},\{y_n\}$$

Inverz feladat: $\{\lambda_n\}\Rightarrow q(x)$

Sturm-Liouville (SL) egyenletek

1. Fix$-\ell$ ($s-$hullám) **inverz "szórás"**
$\{y(x) =: R_0(r), q(x) =: q(r), x =: r \in [0, \infty], \lambda =: k^2\}$

$$\boxed{-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)}$$

Inverz feladat: $\{\lambda_i < 0, \delta_0(\sqrt{\lambda})\} \Rightarrow q(x) \in L_1(0, \infty)$
Gelfand-Levitan (GL) és Marchenko (M) integrálegyenlet.

2. Fix$-E$ **inverz szórás** $\{y_\ell(r) =: R_\ell(r)\}$

$$\boxed{-r^2 y_\ell''(r) + r^2(q(r) - k^2)y_\ell(r) = -\ell(\ell+1)y_\ell(r)}$$

Inverz feladat: $\{\delta_l(k)\}_{\ell=0}^{\ell_{max}} \Rightarrow q(r) \in L_1(0, \infty)$ Newton-Sabatier (NS) és Cox-Thompson (CT) [mNS-Scheid és co., CT-Apagyi és co.]

Sturm-Liouville egyenletek (SL) (folyt.)

3. Fix$-E$ inverz feladat (fix$-\ell$ használatával)

$$\boxed{q(b \geq r \geq 0) \neq 0, \quad q(r > b) \equiv 0}$$

Exp. koordináta transzformáció:
$r = b\exp(-x), \qquad r \in [0, b]$
$x = -\ln(r/b), \qquad x \in [\infty, 0]$
Hullámfüggvény transzformáció:

$$y_\lambda(x) =: R_\ell(r)/\sqrt{r}$$

$$\boxed{-y_\lambda"(x) + Q(x)y_\lambda(x) = \lambda y_\lambda(x), \quad \lambda = -(\ell + 1/2)^2,}$$

$$\boxed{Q(x) = r^2(q(r) - k^2),}$$

Inverz feladat: $\{\delta_l(k)\}_{\ell=0}^{\ell_{max}} \Rightarrow Q(x) \Rightarrow q(r)$
Horváth-Apagyi (HA&GL) és Pálmai-Apagyi (PA&M)

SL spektrálproblémák

$$\boxed{Ly \equiv -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in [0, \pi]}$$

Határfeltételek ($h, H \in \mathbb{R}$):

$$y'(0) = hy(0),\ y'(\pi) = Hy(\pi),\ \Rightarrow\ \{\lambda_n, n = 1, 2, \ldots\}$$

Általános peremfeltétel ($\alpha, \beta \in [0, \pi]$) :

spektrum

$$\left.\begin{array}{l} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \end{array}\right\} \equiv \{\sigma(\alpha, \beta)\} = \{\lambda_n, n \geq 1\}$$

Megj: ($h = -\cot\alpha,\ H = -\cot\beta \in \mathbb{R}$)
Megj: $q \in L_1[0, \pi], \quad \exists\, \phi(a) = \sin\alpha,\ \phi'(a) = -\cos\alpha, a \in [0, \pi]$

Dirichlet: $\sigma\{0, 0\} = \{\lambda_n = n^2, y_n = \sin(nx), n \geq 1, (q = 0)\}$
Neumann: $\sigma\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\} = \{\lambda_n = n^2, y_n = \cos(nx), n \geq 0, (q = 0)\}$

SL spektrálproblémák, inverz feladatok

0. Tétel: (Ambarzumian, 1929): *Ha* $q(x) \in L_1[0,\pi]$ *Neumann spektruma* $\{\lambda_n = n^2, n \geq 0\}$, *akkor* $q(x) \equiv 0$.

Biz. Felhasználjuk a Neumann spektrum becslését:

$$\lambda_n = n^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x) + o(1), \quad n \geq 0.$$

A tétel szerint a legkisebb s.ért: $\lambda_0 = 0$, ezért $\int_0^\pi q(x) = 0$.
A SL egyenletből: $-y_0''(x) + q(x)y_0(x) = \lambda_0 y_0(x) = 0$, azaz

$$0 = \int_0^\pi q(x) = \int_0^\pi \frac{y_0''(x)}{y_0(x)} = \left[\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{y_0'^2(x)}{y_0^2(x)} = \int_0^\pi \frac{y_0'^2(x)}{y_0^2(x)},$$

tehát $y_0'(x) \equiv 0$ azaz $y_0''(x) \equiv 0$, így LS miatt: $q(x)y_0(x) \equiv 0$, de $y_0(x) \neq 0$(!), ezért $q(x) \equiv 0$. $\square$

SL inverz spektrál tételek

1. Tétel: (Borg, 1945):
A $q(x) = q(\pi - x)$ **szimmetrikus potenciált** *meghatározza*
N-N spektruma: $\sigma\{\pi/2, \pi/2\} \Leftrightarrow (y'(0) = y'(\pi) = 0)$,
D-D spektruma: $\sigma\{0, 0\} \Leftrightarrow (y(0) = y(\pi) = 0)$,
általános spektruma: $\sigma\{\alpha, \beta\}$, *ha* $\alpha + \beta = \pi$.

Megj: Általános potenciál esetén **egy spektrum nem** határozza meg a potenciált.

2. Tétel: (Borg, 1945, Levinson 1949):
Egy $q \in L_1(0, \pi)$ **tetszőleges potenciált két** *spektruma:*
$\boxed{\sigma\{\alpha, \beta\} \cup \sigma\{\alpha, \gamma\} (\beta \neq \gamma)}$ *egyértelműen meghatározza.*
Ennyi sajátérték általában kell is.

Megj: A bal oldali általános peremfeltételek megegyeznek!
Megj: Ha q^* egy másik potenciál ugyanezen spektrumokkal, akkor $q = q^*$.

SL inverz spektrál tételek (folyt.)

3. Tétel: (Borg, 1945):

a) *Ha* $\sin\alpha\ \sin\beta = 0$ *(azaz legalább az egyik oldalon* **nem** *szerepel* y'*), akkor a* $\sigma\{\alpha,\beta\}$ *spektrum* **nem** *határozza meg* q*-t.*

b) *Ha* $\sin\alpha\ \sin\beta \neq 0$ *(azaz mindkét oldalon szerepel* y' *is), akkor a (legkisebb sajátérték nélküli)* $\sigma\{\alpha,\beta\}_R$ **redukált spektrum nem** *határozza meg* q*-t.*

Megj: Az Ambarzumian tételnél a minimális $\lambda_0 = 0$ sajátértéknek döntő szerep jutott!

4. Tétel: (Borg, 1945):

a) *A* $\sigma\{\alpha = 0, \beta = 0\} \cup \sigma\{\alpha = 0, \gamma \neq 0\}$, *azaz a* **két spektrum:**
$y(0) = y(\pi) = 0$ *Dirichlet-Dirichlet (D-D) és*
$y(0) = 0, y(\pi)\cos\gamma + y'(\pi)\sin\gamma = 0$ *Dirichlet-Általános (D-Á)*
együttesen meghatározza q**-t***; ennyi kell is.*

b)*A* $\sigma\{\alpha \neq 0, \beta = 0\}$ *(Á-D) teljes, és a* $\sigma\{\alpha \neq 0, \gamma \neq 0\}_R$ *(Á-Á)* **redukált** *spektrum* **együtt meghatározza** q*-t; ennyi kell is.*

SL inverz spektrál tételek (folyt.)

Megj: A második spektrum $\sigma\{\alpha = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}\}$ választással éppen a $y'(0) = y'(\pi) = 0$ Neumann spektrum (N-N), ami egymaga meghatároz egy (szimm.) potenciált. Ezt redukálttá alakítva (egy sajátértéket ($\lambda_0 = 0$) elhagyva), egy teljes másik (N-D) spektrumra $\sigma\{\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0\}$, azaz ($y'(0) = 0, y(\pi) = 0$)-ra van szükség ahhoz, hogy egyértelműen meghatározzunk egy q potenciált.

Pl. $q(x) \equiv 0$ esetén a N-N spektrum $\{\lambda_n = n^2, n \geq 0\}$ ($y'(\pi) = \sin(\sqrt{\lambda_n}\pi) = 0$ miatt), a N-D spektrum pedig $\{\lambda_n = (n + \frac{1}{2})^2, n \geq 1\}$ ($y(\pi) = \cos(\sqrt{\lambda_n}\pi) = 0$ miatt). Tehát, redukált spektrumot készítve az előbbiből, a fenti tétel értelmében kell $\exists\, q(x) \neq 0$ potenciál, amelynek N-N spektruma $\{\lambda_n = n^2, n \geq 1\}$ és N-D spektruma $\{\lambda_n = (n + \frac{1}{2})^2, n \geq 1\}$ spektrumot ad.
Ezt a potenciált eddig még nem határozták meg!

SL inverz spektrál tételek (folyt.)

Tanulság: Általában két spektrum kell az inverz feladat megoldásához, általános recepet nincsen. Nagyon függ minden a **Peremfeltételektől:** ($\exists y(0) = sin\alpha$, $\exists y'(0) = -\cos\alpha$)

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$$

$$y(0) = 0, \alpha = 0, \text{D}; \quad y'(0) = 0, \alpha = \pi/2, \text{N}$$

Tétel	**spektrum**	**unicitás**
1.	$(0,0)$ v. $(\pi/2, \pi/2)$ v. $(\alpha, \beta = \pi - \alpha)$	igen (szimmetrikusra)
2.	$(\alpha, \beta) \cup (\alpha, \gamma \neq \beta)$	igen (általánosra)
4a.	$(0,0) \cup (0, \gamma \neq 0)$	igen (általánosra)
4b.	$\{(\alpha \neq 0, 0) \cup (\alpha \neq 0, \gamma \neq 0)\}_R$	igen (általánosra)
3a.	$(\alpha = 0, \beta)$ v. $(\alpha, \beta = 0)$ v. $(0,0)$	nem
3b.	$(\alpha \neq 0, \beta \neq 0)_R$	nem

Kitekintés: A terület (unicitás) ma is igen aktív. R. Weder(2000), Gesztesy (2002), B. Simon(2006), Horváth Miklós (2007) stb.

Fix-$\ell = 0$: Gelfand, Levitan, Marchenko (1952)

(1) Általánosított Fourier-tanszformáció: ($\mathcal{H}-$tér $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}-$tér)

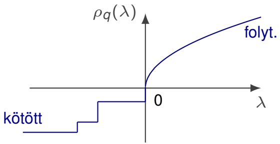
$$-y_q''(x,\lambda) + q(x)y_q(x,\lambda) = \lambda y_q(x,\lambda), \quad y_q(x,\lambda<0) \in L^2(0,\infty)$$

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)y_q(x,\lambda)d\rho_q(\lambda) \Leftrightarrow F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(x)y_q(x,\lambda)dx}$$

Norma (Parsefal): $\boxed{\int_0^{\infty} |f|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F|^2 d\rho_q(\lambda)}$

Teljesség: $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} y_q(x,\lambda)y_q(t,\lambda)d\rho_q(\lambda) = \delta(x-t)}$

Spektrálfüggvény:



$y_0(0) = 1,\ y_0'(0) = h:$

$$\rho_0(\lambda) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + O(1)$$

$y_0(0) = 0,\ y_0'(0) = h:$

$$\rho_0(\lambda) = \frac{2}{3\pi}\sqrt{\lambda^3} + O(\lambda)$$

Fix-$\ell = 0$: Gelfand-Levitan, Marchenko (1952)

(2) Transzformációs operátor technika (két spektrum)

$$-\psi_q''(x,\lambda) + q(x)\psi_q(x,\lambda) = \lambda\psi_q(x,\lambda), \Rightarrow \rho_q(\lambda), \;\; -\varphi''(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda) \Rightarrow \rho_0(\lambda)$$

Transzformációs operátor Povzner-Levitan reprezentációja (Cauchy probléma XIX.sz.):

Fizikai megoldás:

$$\boxed{\psi_q(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\varphi(t,\lambda)dt}$$

$$\boxed{q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x,x)}$$

Gelfand-Levitan integrálegyenlet:

$$\boxed{0 = F(x+t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s+t)ds}$$

Input mennyiségek:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\lambda)d\sigma(\lambda),$$

$$\sigma(\lambda) = \rho_q(\lambda) - \rho_0(\lambda)$$

Jost megoldás:

$$\boxed{\psi_q^{(+)}(x,k^2) = \exp(ikx) + \int_x^{\infty} K(x,t)\exp(ikt)dt}$$

$$\boxed{q(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x)}$$

Marchenko integrálegyenlet

$$\boxed{0 = F(x+t) + K(x,t) + \int_x^{\infty} K(x+s)F(s,t)ds}$$

Input mennyiségek:

$$F(x) = \sum_j \exp(-k_j x)/\int_0^{\infty} |\psi_q^{(+)}(x, i\,k_j)|^2 dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [(1-\exp(2i\delta(k)))]\exp(ikx)dk$$

Fix-E: Newton-Sabatier (1962), Cox-Thompson (1970)

Transzformációs operátor technika (k **fix,** $\mathbf{S} \equiv \{\ell\}, \mathbf{T} \equiv \{L\}, \mathbf{S} \cap \mathbf{T} = \emptyset$**):**

$$-r^2\psi_\ell''(r) + r^2(q(r) - k^2)\psi_\ell(r) = -\ell(\ell+1)\psi_\ell(r),\ \psi_\ell(r) \propto \sin(kr - \ell\pi/2 + \delta\ell(k)),\ r \to \infty$$
$$-r^2u_\ell''(r) + r^2(\ \ 0\ \ - k^2)u_\ell(r) = -\ell(\ell+1)u_\ell(r),\ u \propto r^{\ell+1},\ v \propto r^{-\ell},\ r \to 0$$

Povzner-Levitan (PL) reprezentáció és potenciál:

$$\psi_\ell(r) = u_\ell(r) - \int_0^r K(r,t)u_\ell(t)t^{-2}dt, \qquad q(r) = -(2/r)d(K(r,r)/r)dr$$

GLM "típusú" integrálegyenlet:

$$K(r,t) = g(r,t) - \int_0^r K(r,s)g(s,t)s^{-2}ds$$

Inverz feladat: Input fázistolások, $\{\delta_\ell\}_{\ell\in\mathbf{S}} \in g(r,t) = g(t,r)$ **input szimm. kernel** $\Rightarrow q(r)$

mNS módszer (Scheid (1980), $|S| < \infty$)

$V(r > r_0) = 0,\ |S| \gtrsim kr_0 = 2 - 10 = \ell_{max}$

$g(r,t) = \sum_{\ell\in S} c_\ell u_\ell(r)u_\ell(t) = g(t,r)$

GLM: $K(r,t) = \sum_{\ell\in S} c_\ell \psi_\ell(r)u_\ell(t)$

PL (M ismert, $\ell \in S$):
$\psi_\ell(r) = u_\ell(r) - \sum_{\ell'\in S} c_{\ell'} M_{\ell\ell'}(r)\psi_{\ell'}(r)$

GLM: **lineáris** egyenlet rendszer $\{c_\ell\}$-re

Inverz feladat:
$\{\delta_\ell\}_{\ell\in S} \to \{c_\ell\}_{\ell\in S} \to K(r,r) \to q(r)$

Tulajdonsága:
$\int rV(r) = 0,\ V(r\to 0) \sim 1/r \to \infty$

CT módszer ($|S| = |T|$, $L \in T$ **eltolt imp.mom.**)

$g(r,t) = \sum_{\ell\in S} c_\ell u_\ell(r_<)v_\ell(r_>)$ (Green függvény)

Ansatz: $K(r,t) = \sum_{L\in\mathbf{T}} A_L(r)u_L(t)$

Nemlineáris T-re (Apagyi (1990)):

$$e^{2i\delta_\ell} = \frac{1 + i\mathcal{K}_\ell^+(T)}{1 - i\mathcal{K}_\ell^-(T)}, \quad \ell \in S \to L \in T$$

Lineáris $A_L(x)$-kra:

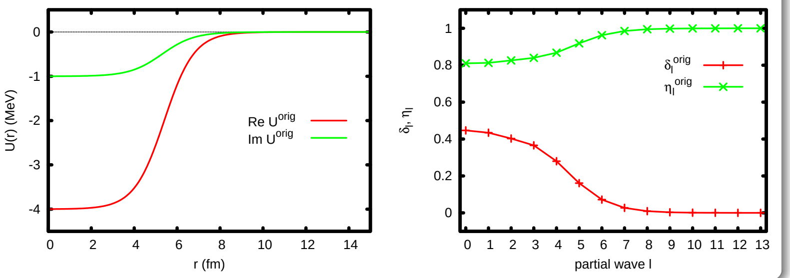
$$\sum_{L\in T} A_L(x)\frac{W[u_L(x), v_\ell(x)]}{\ell(\ell+1) - L(L+1)} = v_\ell(x), \quad \ell \in S$$

Inverz feladat:
$\{\delta_\ell\}_{\ell\in S} \to T \to \{A_L(r)\} \to K(r,r) \to q(r)$

Tulajdonsága:
$\int rV(r) \neq 0,\ V(r\to 0) < \infty (\not\propto 1/r)$

NS és CT teszt: WS potenciál ($n -^{10} Ne$, $E = 25$ MeV)

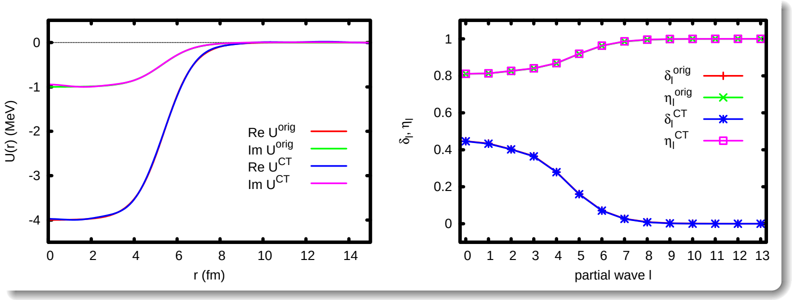
Numerical Results – Uncharged Particles



- spinless particles with mass $A_1 = 1$ and $A_2 = 20$ at $E_{cm} = 25$ MeV
- number of input phase shifts: $n = 14$
- Woods-Saxon model potential

$$U^{\mathrm{orig}}(r) = \frac{-4\ \mathrm{MeV}}{1 + \exp\{(r - 5.4)/0.7\}} + i\,\frac{-1\ \mathrm{MeV}}{1 + \exp\{(r - 5.3)/0.75\}}$$

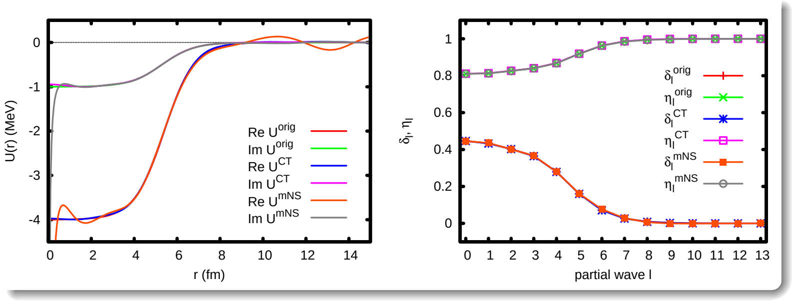
Numerical Results – Uncharged Particles



- spinless particles with mass $A_1 = 1$ and $A_2 = 20$ at $E_{cm} = 25$ MeV
- number of input phase shifts: $n = 14$
- Woods-Saxon model potential

$$U^{\mathrm{orig}}(r) = \frac{-4\ \mathrm{MeV}}{1+\exp\{(r-5.4)/0.7\}} + i\,\frac{-1\ \mathrm{MeV}}{1+\exp\{(r-5.3)/0.75\}}$$

Numerical Results – Uncharged Particles

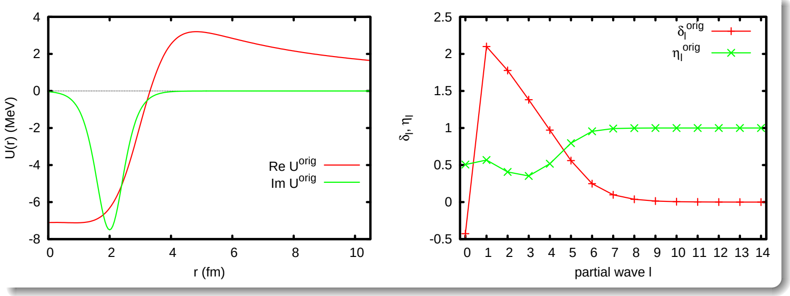


- spinless particles with mass $A_1 = 1$ and $A_2 = 20$ at $E_{cm} = 25$ MeV
- number of input phase shifts: $n = 14$
- Woods-Saxon model potential

$$U^{\text{orig}}(r) = \frac{-4\ \text{MeV}}{1 + \exp\{(r - 5.4)/0.7\}} + i\,\frac{-1\ \text{MeV}}{1 + \exp\{(r - 5.3)/0.75\}}$$

WS+Coulomb potenciál ($\alpha -^{12} C$, $E = 25$ MeV)

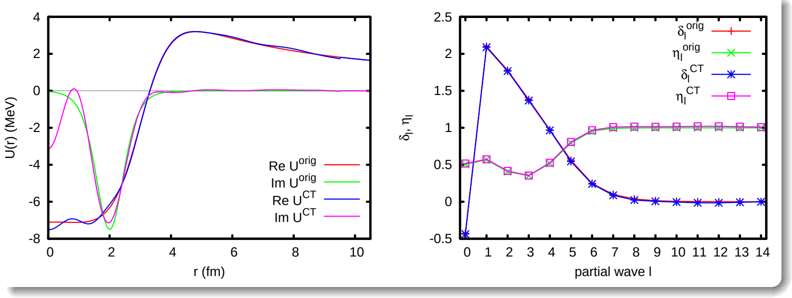
Numerical Results – Charged Particles



- particles with mass $A_1 = 4$ $A_2 = 12$ and charge $Z_1 = 2$ $Z_2 = 6$ at $E_{cm} = 25$ MeV
- number of input phase shifts: $n = 15$
- optical potential model

$$U^{\mathrm{orig}}(r) = U^R(r) + iU^I(r) + U_C(r)$$

Numerical Results – Charged Particles

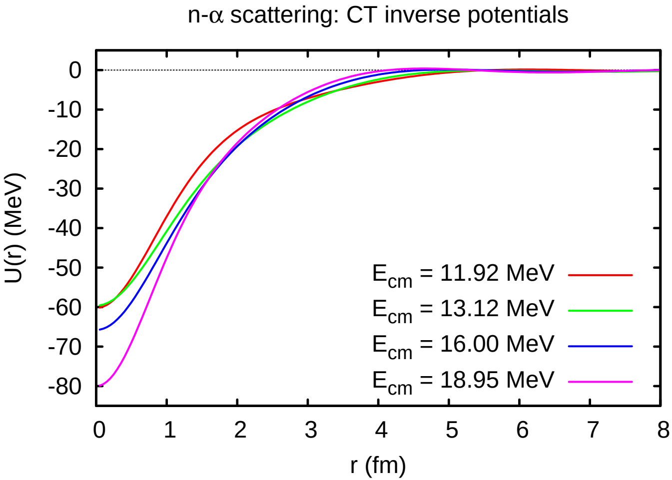


- particles with mass $A_1 = 4$ $A_2 = 12$ and charge $Z_1 = 2$ $Z_2 = 6$ at $E_{cm} = 25$ MeV
- number of input phase shifts: $n = 15$
- optical potential model

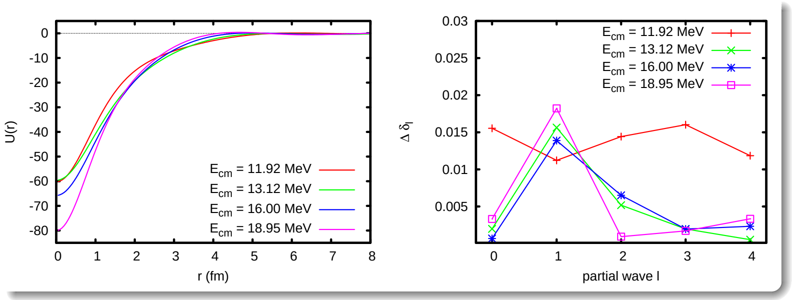
$$U^{\mathrm{orig}}(r) = U^R(r) + iU^I(r) + U_C(r)$$

Fix-*E* (kísérleti) eredmények

$n - \alpha$ kölcsönhatások



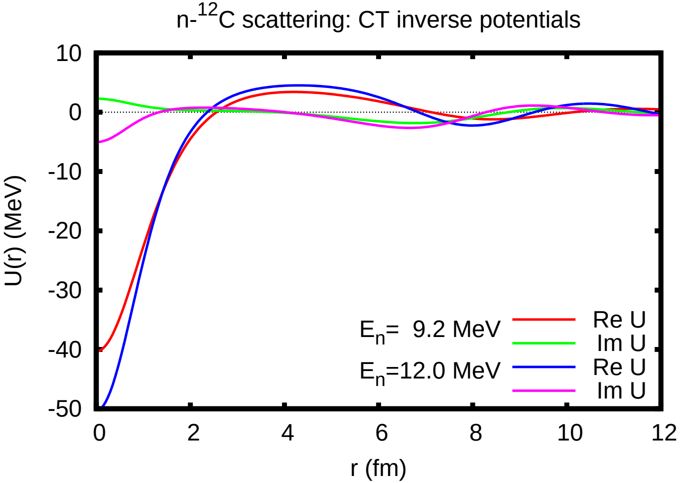
Numerical Results – Experimental Data



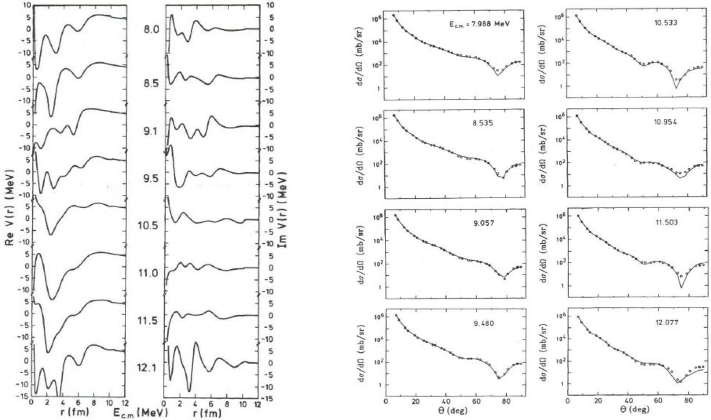
- n-α scattering at different scattering energies
- number of input phase shifts: $n = 5$
- obtained potentials in agreement with microscopic many-body calculations

Fix-*E* (kísérleti) eredmények

$n - {}^{12}C$ kölcsönhatások

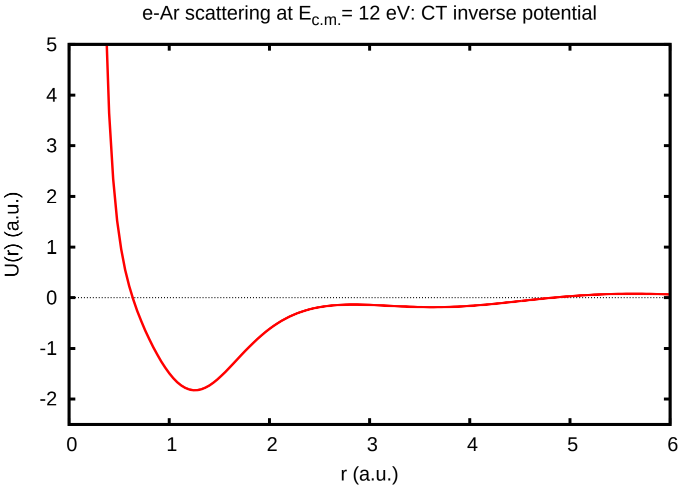


12C-12C komplex potenciálok E=8-12 MeV



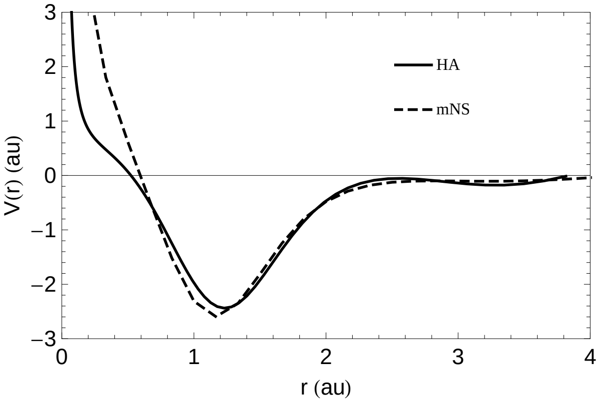
Fix-*E* (kísérleti) eredmények

$e - Ar$ kölcsönhatás (Williams, 12 eV)



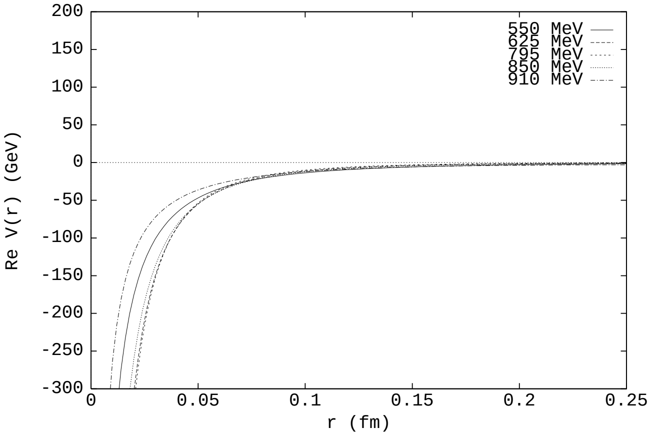
Fix-*E* (kísérleti) eredmények

$e - Ar$ kölcsönhatás (Williams, 12 eV)



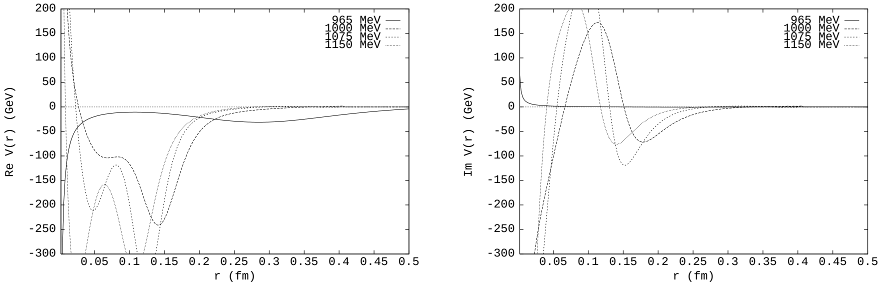
Fix-*E* (kísérleti) eredmények

$\pi - \pi$ kölcsönhatás kaon küszöb alatt (Frogatt)



Fix-E (kísérleti) eredmények

$\pi - \pi$ kölcsönhatás kaon küszöb felett (Frogatt)



Fix$-E$ inverz feladat (GL és M használatával)

$$-\frac{d^2R_\ell(r)}{dr^2} + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + q(r)\right) R_\ell(r) = k^2 R_\ell(r),\ q(r \geq b) = 0,\ R_\ell(r=b) \propto \sin\left(kb - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell(k)\right)$$

Transzformációk: $b\exp(-x) = r \in [0,b] \Rightarrow x = -\ln(r/b) \in [\infty, 0];\ y_\ell(x) = R_\ell(r)/\sqrt{r}$

$$-y_\ell''(x) + Q(x)y_\ell(x) = -(\ell+1/2)^2 y_\ell(x),\ Q(x) = r^2\left(q(r) - k^2\right), \Rightarrow q(r) = Q(-\ln(r/b))/r^2 + k^2$$

Inverz feladat: $\{\delta_l(k)\}_{\ell\in S} \Rightarrow F(x) \Rightarrow Q(x) \Rightarrow q(r)$

A GL egyenletet használata (HA, 2008):

$0 = F(x+t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s+t)ds,$

Az input $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\sqrt{\lambda}x)d\sigma(\lambda)$ egy integrálja kifejezhető az input fázistolásokkal:

$\int_0^\infty F(x)\exp[(\ell+1/2)x]\,dx = \mu_\ell,\ \ell \in S$

$$\mu_\ell = \frac{J_{\ell+3/2}(kb) - \tan\delta_\ell Y_{\ell+3/2}(kb)}{J'_{\ell+1/2}(kb) - \tan\delta_\ell Y'_{\ell+1/2}(kb)}, \quad \ell \in S$$

GL-ből: $2\frac{d}{dx}K(x,x) = Q(x) \Rightarrow q(r)$

Tétel a Weyl-Titchmarsh $m(\lambda)-$függvény és a $\rho(\lambda)$ spektrál függvény meghatározza egymást.

$$\boxed{\frac{1}{y'_\lambda(0)/y_\lambda(0)} = \frac{1}{m(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\rho(t)}{\lambda - t}.} \Rightarrow$$

A Marchenko egyenlet használata (PA, 2014):

$0 = F(x+t) + K(x,t) + \int_x^\infty K(x,s)F(s+t)ds,$

$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - e^{2i\Delta(\kappa)}\right)e^{i\kappa x}d\kappa$

$\Delta(\kappa) = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|f^+(\kappa')|d\kappa'}{\kappa'-\kappa}$, ($Q(x)$ fázisa!)

$\frac{|f^+(\kappa)|^2}{\kappa} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\mathrm{Im}\ m(\kappa^2+i\varepsilon)}, \qquad \kappa > 0,$

Rybkin-Tuan (2009):

$m(\lambda) \approx i\sqrt{\lambda} + \sum_{n=0}^{\ell_{max}} c_n(-i\sqrt{\lambda})\cdot$

$\cdot\sum_{\ell=0}^{n} a_{n\ell}[m(-(\ell+1/2)^2) + \ell + 1/2],$

c_n és $a_{n\ell}$ ismert (függvény) együtthatók.

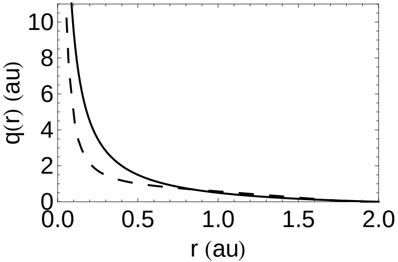
$y'_\ell(0)/y_\ell(0) = m(-(\ell+1/2)^2) =$

$= kb\frac{J'_{\ell+1/2}(kb) - \tan\delta_\ell Y'_{\ell+1/2}(kb)}{J_{\ell+1/2}(kb) - \tan\delta_\ell Y_{\ell+1/2}(kb)}$

Fix-*E* (PA&M): teszt eredmények

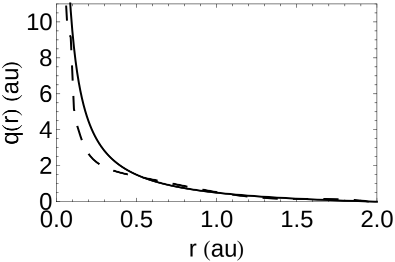
Csonkolt Coulomb potenciál:

$$q(r \le b = 2) = 1/r - 1/b \quad q(r > b) = 0$$



PA rekonstrukciók, $k = 0.8, \ell_{max} = 1$

ℓ	δ_ℓ
0	-0.2991
1	-0.0317

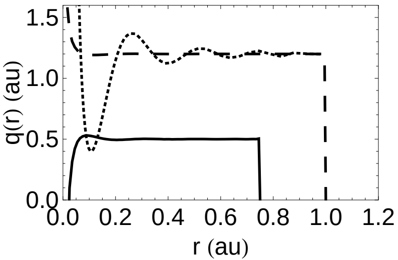


PA rekonstrukciók, $k = 1, \ell_{max} = 3$

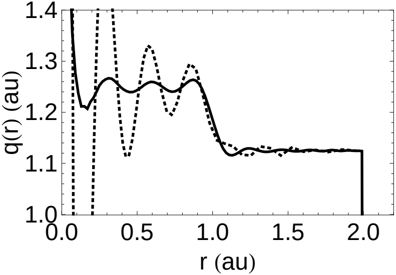
ℓ	δ_ℓ
0	-0.3481
1	-0.0538
2	-0.0046
3	-0.0002

Fix-E (HA&GL és PA&M): teszt eredmények

$q(r \leq 1) = 1.2, q(r \leq 0.75) = 0.5; \quad q(r \leq 1) = 1.25, q(1 < r \leq b = 2) = 1.125$



Box potenciálok, PA rekonstrukciók. (HA pontozott vonal.) $k = 1$, $\ell_{max} = 10$.



Step potenciálok, PA rekonstrukciók. (HA pontozott vonal.) $k = 1$, $\ell_{max} = 20$.

Összefoglalás

- Schrödinger egyenlet és a klasszikus Sturm-Liouville (SL) spektrálprobléma összefüggése.
- SL spektrál (egyértelműségi) feladatok, nem lezárt terület.
- **Fix-$\ell = 0$ inverz szórásprobléma:** GL egyenlet $q(t) \in [0, x]$-en, a Marchenko egyenlet $q(t) \in [x, \infty)$-en.
- **Fix-E inverz szórásprobléma:** Nyitott terület:
  (1) Newton-Sabatier és Cox-Thompson módszer, továbbfejlesztésük (**Scheid**) széleskörűen használható: $n - \alpha$, $e - Ar$, ^{12}C-^{12}C, $\pi - \pi$.
  (2) Új módszer, exponenciális transzformáció (**Horváth**), teszt fázisban: box, lépcső, véges hatótávolságú Coulomb példák.
- **Matematikus/fizikus hallgatóknak tág terület nyílik tdk/diploma/doktori munkára.**

Irodalom

- B Apagyi, A Ostrowski, W Scheid and H Voit: Phase shift analysis and inversion to a potential for 12C+12C elastic scattering at ECM=9.50 and 11.38 MeV, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 18 195-204 (1992)
- Barnabás Apagyi, Alexander Schmidt, Werner Scheid, and Helmut Voit: 12C+12C elastic scattering potentials obtained by unifying phase-shift analysis with the modified Newton-Sabatier inverse method, Phys. Rev. C 49, 2608 (1994)
- N. Alexander, K. Amos, B. Apagyi, and D. R. Lun: Nucleon–alpha-particle interactions from inversion of scattering phase shifts, Phys. Rev. C 53, 88-95 (1996)
- M. Eberspaecher, B. Apagyi, and W. Scheid: Solution of a Coupled Channel Inverse Scattering Problem at Fixed Energy by a Modified Newton-Sabatier Method, Phys. Rev. Lett. 77, 1921-1924 (1996)
- Báthory B, Harman Z, and Apagyi B: Pion-pion potentials by inversion of phase shifts at fixed energy, in *Hadrons, Nuclei and Applications* (A. Zichichi ed., World Scientific Publishing Co, 2001) pp. 140–145
- Barnabás Apagyi, Zoltán Harman and Werner Scheid: Solution of the Cox-Thompson inverse scattering problem using finite set of phase shifts, J. Phys. A: Math. Gen. 36 4815-4826 (2003)
- T. Palmai, M. Horvath and B. Apagyi: Simplified solutions of the Cox-Thompson inverse scattering method at fixed energy, J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 235305
- Miklós Horváth and Barnabás Apagyi: Solution of the inverse scattering problem at fixed energy for potentials being zero beyond a fixed radius, Modern Physics Letters B (MPLB) Volume: 22, Issue: 23, Page 2137 - 2149 (2008)
- Tamás Pálmai, Barnabás Apagyi and Werner Scheid: Development of a Cox-Thompson inverse scattering method to charged particles, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 37 (2010) 025101
- Tamás Pálmai, Barnabás Apagyi: Quantum mechanical inverse scattering problem at fixed energy: a constructive method, Methods and Applications of Analysis 18 (2011) pp. 93-104
- Tamás Pálmai and Barnabás Apagyi: Fixed energy potentials through an auxiliary inverse eigenvalue problem, Inverse Problems 28 085007 (2012)
- Tamás Pálmai and Barnabás Apagyi: The inverse scattering problem at fixed energy based on the Marchenko equation for an auxiliary Sturm-Liouville operator, J. Phys. A: Math. Theor. 46 045303 (2013)