Steven Weinberg:
Mi történik egy kvantummechanikai mérés során?

(magyar hangja Vecsernyés Péter)

Wigner FK, Budapest

CICO, Szeged
2016.01.01.

Kivonat

A kvantumechanika méréselméleti dogmái szerint méréskor "fölfüggesztődik" a vizsgált részrendszer unitér időfejlődése, és a részrendszer a mért mennyiség sajátállapotába (szelektív mérés), avagy az általa generált abeli részalgebrájába (nem-szelektív mérés) "ugrik".
Ezek az "ugrások" teljesen pozitív leképezések a részrendszeren, melyek oda-vissza kapcsolatban vannak egy nagyobb rendszer unitér "szendvicsléseinek" a vizsgált részrendszerre történő megszorításával.
Ezért fölmerül a kérdés: lehet-e egy nem-szelektív mérés dinamikai folyamat "eredménye", azaz teljesen pozitív leképezések időparaméterezett félcsoportjának hatására időben aszimptotikusan előálló állapot?
A szemináriumon Weinberg konstruktív igenlő válaszát és a szükséges fogalmakat, korábbi eredményeket ismertetjük.

Tartalom

Tartalom

Kvantummechanikai időfejlődés

QM jelölések, fogalmak

• megfigyelhető algebra: $\mathcal{A}$

absztrakt nem-kommutatív C^*-algebra vagy ábrázoltja $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$-ban

• dinamika: $\alpha\colon (\mathbb{R},+) \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$

unitéren implementált, ha $\mathcal{A}$-t már ábrázoltuk $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

• $\pi(\alpha_t(A)) = U_t^* \pi(A) U_t$, ahol $U\colon (\mathbb{R},+) \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$

• (kezdő)állapot: $\omega\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, lineáris, pozitív, normált funkcionál

$\omega(\alpha A + \beta B) = \alpha\omega(A) + \beta\omega(B),\ \omega(A^*A) \geq 0,\ \omega(\mathbf{1}) = 1$, ábrázolásban

normális állapot: $\omega(A) = \mathrm{Tr}\,(\rho\pi(A))$, ρ pozitív, $\mathrm{Tr}\,(\rho) = 1$ sűrűségmátrix

vektorállapot: $\omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega)$, egy rangú sűrűségmátrix $\rho = |\Omega\rangle\langle\Omega|$

• Heisenberg kép – időfejlődés operátorokon:

$\mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto A_t := U_t^* A U_t \equiv \alpha_t(A), t \in \mathbb{R}$

pozitív, egységőrző leképezés

• Schrödinger kép — időfejlődés állapotokon:

$\mathcal{S}(\mathcal{A}) \ni \omega \mapsto \omega_t := \omega \circ \alpha_t, t \in \mathbb{R}$, speciálisan $\rho_t = U_t \rho U_t^*$

Kvantummechanikai időfejlődés

QM jelölések, fogalmak

• megfigyelhető algebra: $\mathcal{A}$

absztrakt nem-kommutatív C^*-algebra vagy ábrázoltja $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$-ban

• dinamika: $\alpha\colon (\mathbb{R}, +) \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$

unitéren implementált, ha $\mathcal{A}$-t már ábrázoltuk $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

• $\pi(\alpha_t(A)) = U_t^* \pi(A) U_t$, ahol $U\colon (\mathbb{R}, +) \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$

• (kezdő)állapot: $\omega\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, lineáris, pozitív, normált funkcionál

$\omega(\alpha A + \beta B) = \alpha\omega(A) + \beta\omega(B),\ \omega(A^* A) \geq 0,\ \omega(\mathbf{1}) = 1$, ábrázolásban

normális állapot: $\omega(A) = \mathrm{Tr}\,(\rho\pi(A))$, ρ pozitív, $\mathrm{Tr}\,(\rho) = 1$ sűrűségmátrix

vektorállapot: $\omega(A) = (\Omega, \pi(A)\Omega)$, egy rangú sűrűségmátrix $\rho = |\Omega\rangle\langle\Omega|$

• Heisenberg kép – időfejlődés operátorokon:

$\mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni A \mapsto A_t := U_t^* A U_t \equiv \alpha_t(A), t \in \mathbb{R}$

pozitív, egységőrző leképezés

• Schrödinger kép — időfejlődés állapotokon:

$\mathcal{S}(\mathcal{A}) \ni \omega \mapsto \omega_t := \omega \circ \alpha_t, t \in \mathbb{R}$, speciálisan $\rho_t = U_t \rho U_t^*$

Kvantummechanikai mérés

- $\mathcal{A} \ni M = \sum_i m_i P_i$ spektrálfölbontású önadjungált megfigyelhető szelektív (= "M-sajátállapotba ugrasztó") és nem-szelektív (= "M által generált abeli részalgebrába ugrasztó") mérése
  - Heisenberg kép: $\mu_M : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$
    szelektív: $\mu_M(A) := P_i A P_i / \omega(P_i)$, $\omega(P_i)$ valószínűséggel (gyakorisággal)
    nem-szelektív: $\mu_M(A) := \sum_i P_i A P_i$, egyfajta re-preparáció
  - Schrödinger kép: $\hat{\mu}_M : \mathcal{S}(\mathcal{A}) \to \mathcal{S}(\mathcal{A})$
    szelektív: $\omega_i := \omega \circ \mathrm{Ad}\, P_i / \omega(P_i)$, nem-szelektív: $\omega_M := \sum_i \omega \circ \mathrm{Ad}\, P_i$
    egyaránt "elrontják" az unitéren implementált dinamikát, de mindkét mérés teljesen pozitív (CP) leképezés
- $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ pozitív egységőrző leképezések
  pozitív, ha $\mu(\mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{A}_+ := \{A^* A \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ a pozitív elemek kónusza
  egységőrző, ha $\mu(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, ahol $\mathbf{1}$ az $\mathcal{A}$ egységeleme
  állapotot állapotba visznek: $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \Rightarrow \omega \circ \mu \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$
  azaz "őrzik a valószínűségi interpretáció lehetőségét"
  ha μ nem egységőrző, normálni kell: $\frac{\omega \circ \mu}{\omega(\mu(\mathbf{1}))} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$

Kvantummechanikai mérés

- $\mathcal{A} \ni M = \sum_i m_i P_i$ spektrálfölbontású önadjungált megfigyelhető szelektív (= "M-sajátállapotba ugrasztó") és nem-szelektív (= "M által generált abeli részalgebrába ugrasztó") mérése
  - Heisenberg kép: $\mu_M \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$
  szelektív: $\mu_M(A) := P_i A P_i / \omega(P_i)$, $\omega(P_i)$ valószínűséggel (gyakorisággal)
  nem-szelektív: $\mu_M(A) := \sum_i P_i A P_i$, egyfajta re-preparáció
  - Schrödinger kép: $\hat{\mu}_M \colon \mathcal{S}(\mathcal{A}) \to \mathcal{S}(\mathcal{A})$
  szelektív: $\omega_i := \omega \circ \mathrm{Ad}\, P_i / \omega(P_i)$, nem-szelektív: $\omega_M := \sum_i \omega \circ \mathrm{Ad}\, P_i$
  egyaránt "elrontják" az unitéren implementált dinamikát, de mindkét mérés teljesen pozitív (CP) leképezés
- $\mu \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ pozitív egységőrző leképezések
  pozitív, ha $\mu(\mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{A}_+ := \{A^* A \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ a pozitív elemek kónusza
  egységőrző, ha $\mu(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, ahol $\mathbf{1}$ az $\mathcal{A}$ egységeleme
  állapotot állapotba visznek: $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \Rightarrow \omega \circ \mu \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$
  azaz "őrzik a valószínűségi interpretáció lehetőségét"
  ha μ nem egységőrző, normálni kell: $\frac{\omega \circ \mu}{\omega(\mu(\mathbf{1}))} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$

Kvantummechanikai mérés

- $\mathcal{A} \ni M = \sum_i m_i P_i$ spektrálfölbontású önadjungált megfigyelhető szelektív (= "M-sajátállapotba ugrasztó") és nem-szelektív (= "M által generált abeli részalgebrába ugrasztó") mérése
  - Heisenberg kép: $\mu_M \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$
  szelektív: $\mu_M(A) := P_i A P_i / \omega(P_i)$, $\omega(P_i)$ valószínűséggel (gyakorisággal)
  nem-szelektív: $\mu_M(A) := \sum_i P_i A P_i$, egyfajta re-preparáció
  - Schrödinger kép: $\hat{\mu}_M \colon \mathcal{S}(\mathcal{A}) \to \mathcal{S}(\mathcal{A})$
  szelektív: $\omega_i := \omega \circ \mathrm{Ad}\, P_i / \omega(P_i)$, nem-szelektív: $\omega_M := \sum_i \omega \circ \mathrm{Ad}\, P_i$
  egyaránt "elrontják" az unitéren implementált dinamikát, de mindkét mérés teljesen pozitív (CP) leképezés
- $\mu \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ pozitív egységőrző leképezések
  pozitív, ha $\mu(\mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{A}_+ := \{A^* A \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ a pozitív elemek kónusza
  egységőrző, ha $\mu(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, ahol $\mathbf{1}$ az $\mathcal{A}$ egységeleme
  állapotot állapotba visznek: $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \Rightarrow \omega \circ \mu \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$
  azaz "őrzik a valószínűségi interpretáció lehetőségét"
  ha μ nem egységőrző, normálni kell: $\frac{\omega \circ \mu}{\omega(\mu(\mathbf{1}))} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$

Kvantummechanikai mérés

- $\mathcal{A} \ni M = \sum_i m_i P_i$ spektrálfölbontású önadjungált megfigyelhető szelektív (= "M-sajátállapotba ugrasztó") és nem-szelektív (= "M által generált abeli részalgebrába ugrasztó") mérése
  • Heisenberg kép: $\mu_M \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$
  szelektív: $\mu_M(A) := P_i A P_i / \omega(P_i)$, $\omega(P_i)$ valószínűséggel (gyakorisággal)
  nem-szelektív: $\mu_M(A) := \sum_i P_i A P_i$, egyfajta re-preparáció
  • Schrödinger kép: $\hat{\mu}_M \colon \mathcal{S}(\mathcal{A}) \to \mathcal{S}(\mathcal{A})$
  szelektív: $\omega_i := \omega \circ \mathrm{Ad}\, P_i / \omega(P_i)$, nem-szelektív: $\omega_M := \sum_i \omega \circ \mathrm{Ad}\, P_i$
  egyaránt "elrontják" az unitéren implementált dinamikát, de mindkét mérés teljesen pozitív (CP) leképezés
- $\mu \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ pozitív egységőrző leképezések
  pozitív, ha $\mu(\mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{A}_+ := \{A^* A \mid A \in \mathcal{A}\}$ a pozitív elemek kónusza
  egységőrző, ha $\mu(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, ahol $\mathbf{1}$ az $\mathcal{A}$ egységeleme
  állapotot állapotba visznek: $\omega \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) \Rightarrow \omega \circ \mu \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$
  azaz "őrzik a valószínűségi interpretáció lehetőségét"
  ha μ nem egységőrző, normálni kell: $\frac{\omega \circ \mu}{\omega(\mu(\mathbf{1}))} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$

Teljesen pozitív leképezések és kapcsolatuk részrendszerekkel

- $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ teljesen pozitív (egységőrző) leképezés
  olyan pozitív (egységőrző) leképezés, mely tetszőleges véges részrendszerrel való "triviális" kiterjesztésre is poziív leképezés marad
  azaz ha $\mu_n := \mu \otimes \mathrm{Id}_n\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_n \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_n$ pozitív $\forall\, n \in \mathbb{N}$
- unitér szendvicselés, nem-szelektív mérés: egységőrző CP leképezés
  szelektív mérés: CP, de nem egységőrző
- Két "CP-állítás" S=system és E=environment kapcsolatáról QM-ben
- teljes rendszer $\to$ részrendszer
  Ha $U_t \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E), t \in \mathbb{R}$ unitér dinamika a teljes rendszeren

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \ni A \mapsto \Phi_t(A) := \mathrm{Tr}_E\left[(\mathbf{1}_S \otimes \rho_E)U_t^*(A \otimes \mathbf{1}_E)U_t\right] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$$

  egységőrző CP leképezés $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$-en $\forall t \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ lehetne "CP-dinamikát" nézni a részrendszeren az unitér helyett

Teljesen pozitív leképezések és kapcsolatuk részrendszerekkel

- $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ teljesen pozitív (egységőrző) leképezés
  olyan pozitív (egységőrző) leképezés, mely tetszőleges véges részrendszerrel való "triviális" kiterjesztésre is poziív leképezés marad
  azaz ha $\mu_n := \mu \otimes \mathrm{Id}_n\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_n \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_n$ pozitív $\forall\, n \in \mathbb{N}$
- unitér szendvicselés, nem-szelektív mérés: egységőrző CP leképezés
  szelektív mérés: CP, de nem egységőrző
- Két "CP-állítás" S=system és E=environment kapcsolatáról QM-ben
- teljes rendszer $\to$ részrendszer
  Ha $U_t \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E)$, $t \in \mathbb{R}$ unitér dinamika a teljes rendszeren

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \ni A \mapsto \Phi_t(A) := \mathrm{Tr}_E\left[(\mathbf{1}_S \otimes \rho_E) U_t^* (A \otimes \mathbf{1}_E) U_t\right] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$$

  egységőrző CP leképezés $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$-en $\forall t \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ lehetne "CP-dinamikát" nézni a részrendszeren az unitér helyett

Teljesen pozitív leképezések és kapcsolatuk részrendszerekkel

- $\mu \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ teljesen pozitív (egységőrző) leképezés
  olyan pozitív (egységőrző) leképezés, mely tetszőleges véges részrendszerrel való "triviális" kiterjesztésre is poziív leképezés marad
  azaz ha $\mu_n := \mu \otimes \mathrm{Id}_n \colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_n \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_n$ pozitív $\forall\, n \in \mathbb{N}$
- unitér szendvicselés, nem-szelektív mérés: egységőrző CP leképezés
  szelektív mérés: CP, de nem egységőrző
- Két "CP-állítás" S=system és E=environment kapcsolatáról QM-ben
- teljes rendszer $\to$ részrendszer
  Ha $U_t \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E), t \in \mathbb{R}$ unitér dinamika a teljes rendszeren

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \ni A \mapsto \Phi_t(A) := \mathrm{Tr}_E\left[(\mathbf{1}_S \otimes \rho_E) U_t^* (A \otimes \mathbf{1}_E) U_t\right] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$$

  egységőrző CP leképezés $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$-en $\forall t \in \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$ lehetne "CP-dinamikát" nézni a részrendszeren az unitér helyett

Teljesen pozitív leképezések és kapcsolatuk részrendszerekkel

- $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ teljesen pozitív (egységőrző) leképezés
olyan pozitív (egységőrző) leképezés, mely tetszőleges véges részrendszerrel való "triviális" kiterjesztésre is poziív leképezés marad
azaz ha $\mu_n := \mu \otimes \mathrm{Id}_n\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_n \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}_n$ pozitív $\forall\ n \in \mathbb{N}$
- unitér szendvicselés, nem-szelektív mérés: egységőrző CP leképezés
szelektív mérés: CP, de nem egységőrző
- Két "CP-állítás" S=system és E=environment kapcsolatáról QM-ben
- teljes rendszer $\to$ részrendszer
Ha $U_t \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E)$, $t \in \mathbb{R}$ unitér dinamika a teljes rendszeren

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \ni A \mapsto \Phi_t(A) := \mathrm{Tr}_E\left[(\mathbf{1}_S \otimes \rho_E)U_t^*(A \otimes \mathbf{1}_E)U_t\right] \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$$

egységőrző CP leképezés $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$-en $\forall t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ lehetne "CP-dinamikát" nézni a részrendszeren az unitér helyett

Részrendszer CP leképezései és izometrikus/unitér szendvicselés

- részrendszer $\rightarrow$ kiterjesztett rendszer
  Ha Φ egységőrző, σ-gyengén folytonos CP $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$-en $\Rightarrow$
  $\exists\, \mathcal{H}_E$ és V izometria $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$-n, hogy minden $\forall \rho_E \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_E)$

  $$\Phi(A) = \mathrm{Tr}_E\left[(\mathbf{1}_S \otimes \rho_E)V^*(A \otimes \mathbf{1}_E)V\right], \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$$

  (további kiterjesztéssel V unitérré tehető, de az már ρ_E-függő)
  $\Rightarrow$ részrendszer minden CP-je izometrikus/unitér szendvicselés megszorításából jön
- nem-szelektív mérés: nincs benne stochasztikus elem
  egyfajta egységőrző CP-"újrapreparálása" a részrendszernek a mérőműszer segítségével, a mérőműszerrel kiterjesztett teljes rendszerben
  Weinberg kérdés: eredményezheti-e ezt az egységőrző CP leképezést egy lineáris determinisztikus effektív egységőrző CP-dinamika $t \rightarrow \infty$ aszimptotikus időben?

Részrendszer CP leképezései és izometrikus/unitér szendvicselés

- részrendszer $\rightarrow$ kiterjesztett rendszer
  Ha Φ egységőrző, σ-gyengén folytonos CP $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$-en $\Rightarrow$
  $\exists\, \mathcal{H}_E$ és V izometria $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$-n, hogy minden $\forall \rho_E \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_E)$

  $$\Phi(A) = \mathrm{Tr}_E\left[(\mathbf{1}_S \otimes \rho_E) V^*(A \otimes \mathbf{1}_E) V\right], \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$$

  (további kiterjesztéssel V unitérré tehető, de az már ρ_E-függő)
  $\Rightarrow$ részrendszer minden CP-je izometrikus/unitér szendvicselés megszorításából jön
- nem-szelektív mérés: nincs benne stochasztikus elem
  egyfajta egységőrző CP-"újrapreparálása" a részrendszernek a mérőműszer segítségével, a mérőműszerrel kiterjesztett teljes rendszerben
  Weinberg kérdés: eredményezheti-e ezt az egységőrző CP leképezést egy lineáris determinisztikus effektív egységőrző CP-dinamika $t \rightarrow \infty$ aszimptotikus időben?

Részrendszer CP leképezései és izometrikus/unitér szendvicselés

- részrendszer $\rightarrow$ kiterjesztett rendszer
  Ha Φ egységőrző, σ-gyengén folytonos CP $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$-en $\Rightarrow$
  $\exists\, \mathcal{H}_E$ és V izometria $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$-n, hogy minden $\forall \rho_E \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_E)$

$$\Phi(A) = \mathrm{Tr}_E\left[(\mathbf{1}_S \otimes \rho_E) V^* (A \otimes \mathbf{1}_E) V\right], \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$$

  (további kiterjesztéssel V unitérré tehető, de az már ρ_E-függő)
  $\Rightarrow$ részrendszer minden CP-je izometrikus/unitér szendvicselés megszorításából jön
- nem-szelektív mérés: nincs benne stochasztikus elem
  egyfajta egységőrző CP-"újrapreparálása" a részrendszernek a mérőműszer segítségével, a mérőműszerrel kiterjesztett teljes rendszerben
  Weinberg kérdés: eredményezheti-e ezt az egységőrző CP leképezést egy lineáris determinisztikus effektív egységőrző CP-dinamika $t \rightarrow \infty$ aszimptotikus időben?

CP leképezések félcsoportjának generátora

- megszorítások: CP-leképezések speciális családját nézzük
  - a félcsoportot alkotókat: $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$; $t, s \in \mathbb{R}_+$,
  - ezek közül is a korlátos generátorokkal rendelkezőket
  ($\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ esetén ez nem megszorítás)
- Két Lindblad tétel $\Phi_t := \exp(tL) \in \mathrm{CP}(\mathcal{A})$ korlátos L generátoráról:
  $L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ korlátos lineáris *-leképezés, $L(\mathbf{1}) = 0$
- *Def.* Legyen $D(L; A, B) := L(A^* B) - L(A^*)B - A^* L(B)$
  L teljesen disszipatív, $L \in \mathrm{CD}(\mathcal{A})$,
  ha $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $D(L_n; A, A) \geq 0,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$
  ($D \neq 0$ a reverzibilitás hiányát jelzi, L nem-deriváció voltát)
- T_1 Legyen $\Phi_t := \exp(tL)$. Ekkor $\Phi_t \in \mathrm{CP}_1(\mathcal{A}) \Leftrightarrow L \in \mathrm{CD}(\mathcal{A})$
- T_2 Legyen $L \in \mathrm{CD}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))_\sigma \Leftrightarrow$ ha L az alábbi alakú

$$L(A) = i[H, A] + \sum_k V_k^* A V_k - \frac{1}{2}\{V_k^* V_k, A\}$$

ahol $H = H^*$; V_k, $\sum_k V_k^* V_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

CP leképezések félcsoportjának generátora

- megszorítások: CP-leképezések speciális családját nézzük
  • a félcsoportot alkotókat: $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$; $t, s \in \mathbb{R}_+$,
  • ezek közül is a korlátos generátorokkal rendelkezőket
  ($\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ esetén ez nem megszorítás)
- Két Lindblad tétel $\Phi_t := \exp(tL) \in \mathrm{CP}(\mathcal{A})$ korlátos L generátoráról:
  $L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ korlátos lineáris *-leképezés, $L(\mathbf{1}) = 0$
- *Def.* Legyen $D(L; A, B) := L(A^*B) - L(A^*)B - A^*L(B)$
  L teljesen disszipatív, $L \in \mathrm{CD}(\mathcal{A})$,
  ha $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $D(L_n; A, A) \geq 0,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$
  ($D \neq 0$ a reverzibilitás hiányát jelzi, L nem-deriváció voltát)
- T_1 Legyen $\Phi_t := \exp(tL)$. Ekkor $\Phi_t \in \mathrm{CP}_1(\mathcal{A}) \Leftrightarrow L \in \mathrm{CD}(\mathcal{A})$
- T_2 Legyen $L \in \mathrm{CD}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))_\sigma \Leftrightarrow$ ha L az alábbi alakú

$$L(A) = i[H, A] + \sum_k V_k^* A V_k - \frac{1}{2}\{V_k^* V_k, A\}$$

ahol $H = H^*$; $V_k,\ \sum_k V_k^* V_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

CP leképezések félcsoportjának generátora

- megszorítások: CP-leképezések speciális családját nézzük
  • a félcsoportot alkotókat: $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$; $t, s \in \mathbb{R}_+$,
  • ezek közül is a korlátos generátorokkal rendelkezőket
  ($\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ esetén ez nem megszorítás)
- Két Lindblad tétel $\Phi_t := \exp(tL) \in \mathrm{CP}(\mathcal{A})$ korlátos L generátoráról:
  $L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ korlátos lineáris *-leképezés, $L(\mathbf{1}) = 0$
- *Def*. Legyen $D(L; A, B) := L(A^*B) - L(A^*)B - A^*L(B)$
  L teljesen disszipatív, $L \in \mathrm{CD}(\mathcal{A})$,
  ha $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $D(L_n; A, A) \geq 0,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$
  ($D \neq 0$ a reverzibilitás hiányát jelzi, L nem-deriváció voltát)
- T_1 Legyen $\Phi_t := \exp(tL)$. Ekkor $\Phi_t \in \mathrm{CP}_1(\mathcal{A}) \Leftrightarrow L \in \mathrm{CD}(\mathcal{A})$
- T_2 Legyen $L \in \mathrm{CD}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))_\sigma \Leftrightarrow$ ha L az alábbi alakú

$$L(A) = i[H, A] + \sum_k V_k^* A V_k - \frac{1}{2}\{V_k^* V_k, A\}$$

ahol $H = H^*$; V_k, $\sum_k V_k^* V_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

CP leképezések félcsoportjának generátora

- megszorítások: CP-leképezések speciális családját nézzük
  • a félcsoportot alkotókat: $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$; $t, s \in \mathbb{R}_+$,
  • ezek közül is a korlátos generátorokkal rendelkezőket
  ($\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ esetén ez nem megszorítás)
- Két Lindblad tétel $\Phi_t := \exp(tL) \in \mathrm{CP}(\mathcal{A})$ korlátos L generátoráról:
  $L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ korlátos lineáris *-leképezés, $L(\mathbf{1}) = 0$
- *Def*. Legyen $D(L; A, B) := L(A^*B) - L(A^*)B - A^*L(B)$
  L teljesen disszipatív, $L \in \mathrm{CD}(\mathcal{A})$,
  ha $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $D(L_n; A, A) \geq 0,\ A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$
  ($D \neq 0$ a reverzibilitás hiányát jelzi, L nem-deriváció voltát)
- T_1 Legyen $\Phi_t := \exp(tL)$. Ekkor $\Phi_t \in \mathrm{CP}_1(\mathcal{A}) \Leftrightarrow L \in \mathrm{CD}(\mathcal{A})$
- T_2 Legyen $L \in \mathrm{CD}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))_\sigma \Leftrightarrow$ ha L az alábbi alakú

$$L(A) = i[H, A] + \sum_k V_k^* A V_k - \frac{1}{2}\{V_k^* V_k, A\}$$

ahol $H = H^*$; V_k, $\sum_k V_k^* V_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

Weinberg válasz

- Minden $\mathcal{M}_n \ni M = \sum_i m_i P_i$ önadjungálthoz létezik egységőrző $\hat{L}$ Lindblad dinamika a sűrűségmátrixokon

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \hat{L}(\rho(t)) := -i[H, \rho(t)] + \sum_k V_k \rho(t) V_k^* - \frac{1}{2}\{V_k^* V_k, \rho(t)\}$$

(azaz alkalmas H, V_k választás), hogy $\forall\, \rho_0 \in \mathcal{M}_n$ sűrűségmátrixra $\lim_{t\to\infty} \exp\left(t\hat{L}\right)(\rho_0) =: \rho_\infty = \sum_i P_i \rho_0 P_i$.

- $\hat{L}$ egységőrzésének és Neumann entrópia növekedésének kapcsolata: Benatti, Narnhofer
$\hat{L}$ egységőrző, $\hat{L}(\mathbf{1}/n) = 0 \Leftrightarrow \sum_k V_k^* V_k = \sum_k V_k V_k^* \Leftrightarrow dS(\rho(t))/dt \geq 0$
ahol $S(\rho) := -\mathrm{Tr}\,(\rho \log \rho)$ a Neumann entrópia

- $M = \sum_i m_i P_i$ nem-szelektív mérésének képe:
$\mu_M(\mathcal{M}_n) := \sum_i P_i \mathcal{M}_n P_i = \langle M \rangle' \cap \mathcal{M}_n$

Weinberg válasz

- Minden $\mathcal{M}_n \ni M = \sum_i m_i P_i$ önadjungálthoz létezik egységőrző $\hat{L}$ Lindblad dinamika a sűrűségmátrixokon

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \hat{L}(\rho(t)) := -i[H, \rho(t)] + \sum_k V_k \rho(t) V_k^* - \frac{1}{2}\{V_k^* V_k, \rho(t)\}$$

(azaz alkalmas H, V_k választás), hogy $\forall \rho_0 \in \mathcal{M}_n$ sűrűségmátrixra $\lim_{t\to\infty} \exp(t\hat{L})(\rho_0) =: \rho_\infty = \sum_i P_i \rho_0 P_i$.

- $\hat{L}$ egységőrzésének és Neumann entrópia növekedésének kapcsolata: Benatti, Narnhofer
$\hat{L}$ egységőrző, $\hat{L}(\mathbf{1}/n) = 0 \Leftrightarrow \sum_k V_k^* V_k = \sum_k V_k V_k^* \Leftrightarrow dS(\rho(t))/dt \geq 0$
ahol $S(\rho) := -\mathrm{Tr}\,(\rho \log \rho)$ a Neumann entrópia

- $M = \sum_i m_i P_i$ nem-szelektív mérésének képe:
$\mu_M(\mathcal{M}_n) := \sum_i P_i \mathcal{M}_n P_i = \langle M \rangle' \cap \mathcal{M}_n$

Weinberg válasz

- Minden $\mathcal{M}_n \ni M = \sum_i m_i P_i$ önadjungálthoz létezik egységőrző $\hat{L}$ Lindblad dinamika a sűrűségmátrixokon

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \hat{L}(\rho(t)) := -i[H, \rho(t)] + \sum_k V_k \rho(t) V_k^* - \frac{1}{2}\{V_k^* V_k, \rho(t)\}$$

(azaz alkalmas H, V_k választás), hogy $\forall\, \rho_0 \in \mathcal{M}_n$ sűrűségmátrixra $\lim_{t\to\infty} \exp\,(t\hat{L})(\rho_0) =: \rho_\infty = \sum_i P_i \rho_0 P_i$.

- $\hat{L}$ egységőrzésének és Neumann entrópia növekedésének kapcsolata: Benatti, Narnhofer
  $\hat{L}$ egységőrző, $\hat{L}(\mathbf{1}/n) = 0 \Leftrightarrow \sum_k V_k^* V_k = \sum_k V_k V_k^* \Leftrightarrow dS(\rho(t))/dt \geq 0$
  ahol $S(\rho) := -\mathrm{Tr}\,(\rho \log \rho)$ a Neumann entrópia

- $M = \sum_i m_i P_i$ nem-szelektív mérésének képe:
  $\mu_M(\mathcal{M}_n) := \sum_i P_i \mathcal{M}_n P_i = \langle M \rangle' \cap \mathcal{M}_n$

Weinberg konstrukció kiegészítésekkel

- Lindblad egyenlet lineáris mátrix-differenciálegyenlet $\mathcal{M}_n$-ben $\Rightarrow$
  1. "sajátmátrix-probléma" megoldása: $\hat{L}S_\alpha = \lambda_\alpha S_\alpha, \; S_\alpha \in \mathcal{M}_n$
  2. időfejlődés exponencializált sajátértékekkel:
  $\rho(t) = \sum_\alpha a_\alpha \exp(t\lambda_\alpha) S_\alpha$, ahol $\rho(0) = \sum_\alpha a_\alpha S_\alpha$
  • sajátmátrixok tere teljes, ha $\hat{L}$ normális operátor $\mathcal{M}_n$-en mint Hilbert téren, de $(A, B) := \mathrm{Tr}\,(A^* B)$-re nem az
- releváns sajátértékek $t \to \infty$ aszimptotikában: $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0$
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha < 0$: sajátmátixaik "elfogynak" a kifejtésből
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha > 0$: nem szerepelhetnek $\rho(0)$ kifejtésében
  mert $\mathrm{Tr}\,\rho(t) = \mathrm{Tr}\,\rho(0)$ miatt $a_\alpha \neq 0$ ellentmondásra vezet:
  1. ha $\mathrm{Tr}\,S_\alpha \neq 0$, akkor $\mathrm{Tr}\,\rho(t)$ fölrobbanna,
  2. ha $\mathrm{Tr}\,S_\alpha = 0$, akkor a nempozitív S_α dominálná a pozitív $\rho(t)$-t
- $\hat{L}$ alakjából + kirótt egységőrzéséből (entrópianövekedésből):
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha \geq 0$ és $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0 \Leftrightarrow [S_\alpha, V_k^*] = 0, \forall k$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,(S_\alpha^* S_\alpha)\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(S_\alpha^* \hat{L}(S_\alpha)) = & -\frac{1}{2}\sum_k \mathrm{Tr}\,([S_\alpha, V_k^*]^*[S_\alpha, V_k^*]) \\ & -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(S_\alpha S_\alpha^* \sum_k (V_k^* V_k - V_k V_k^*))\end{aligned}$$

Weinberg konstrukció kiegészítésekkel

- Lindblad egyenlet lineáris mátrix-differenciálegyenlet $\mathcal{M}_n$-ben $\Rightarrow$
  1. "sajátmátrix-probléma" megoldása: $\hat{L}S_\alpha = \lambda_\alpha S_\alpha, \; S_\alpha \in \mathcal{M}_n$
  2. időfejlődés exponencializált sajátértékekkel:
  $\rho(t) = \sum_\alpha a_\alpha \exp(t\lambda_\alpha) S_\alpha$, ahol $\rho(0) = \sum_\alpha a_\alpha S_\alpha$
  • sajátmátrixok tere teljes, ha $\hat{L}$ normális operátor $\mathcal{M}_n$-en mint Hilbert téren, de $(A, B) := \mathrm{Tr}\,(A^* B)$-re nem az
- releváns sajátértékek $t \to \infty$ aszimptotikában: $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0$
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha < 0$: sajátmátixaik "elfogynak" a kifejtésből
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha > 0$: nem szerepelhetnek $\rho(0)$ kifejtésében
  mert $\mathrm{Tr}\,\rho(t) = \mathrm{Tr}\,\rho(0)$ miatt $a_\alpha \neq 0$ ellentmondásra vezet:
  1. ha $\mathrm{Tr}\,S_\alpha \neq 0$, akkor $\mathrm{Tr}\,\rho(t)$ fölrobbanna,
  2. ha $\mathrm{Tr}\,S_\alpha = 0$, akkor a nempozitív S_α dominálná a pozitív $\rho(t)$-t
- $\hat{L}$ alakjából + kirótt egységőrzéséből (entrópianövekedésből):
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha \geq 0$ és $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0 \Leftrightarrow [S_\alpha, V_k^*] = 0, \forall k$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(S_\alpha^* S_\alpha)\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(S_\alpha^* \hat{L}(S_\alpha)) = & -\frac{1}{2}\sum_k \mathrm{Tr}\,([S_\alpha, V_k^*]^*[S_\alpha, V_k^*]) \\
& -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(S_\alpha S_\alpha^* \sum_k (V_k^* V_k - V_k V_k^*))
\end{aligned}
$$

Weinberg konstrukció kiegészítésekkel

- Lindblad egyenlet lineáris mátrix-differenciálegyenlet $\mathcal{M}_n$-ben $\Rightarrow$
  1. "sajátmátrix-probléma" megoldása: $\hat{L}S_\alpha = \lambda_\alpha S_\alpha, \;\; S_\alpha \in \mathcal{M}_n$
  2. időfejlődés exponencializált sajátértékekkel:
  $\rho(t) = \sum_\alpha a_\alpha \exp(t\lambda_\alpha) S_\alpha$, ahol $\rho(0) = \sum_\alpha a_\alpha S_\alpha$
  • sajátmátrixok tere teljes, ha $\hat{L}$ normális operátor $\mathcal{M}_n$-en mint Hilbert téren, de $(A, B) := \mathrm{Tr}\,(A^* B)$-re nem az
- releváns sajátértékek $t \to \infty$ aszimptotikában: $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0$
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha < 0$: sajátmátixaik "elfogynak" a kifejtésből
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha > 0$: nem szerepelhetnek $\rho(0)$ kifejtésében
  mert $\mathrm{Tr}\,\rho(t) = \mathrm{Tr}\,\rho(0)$ miatt $a_\alpha \neq 0$ ellentmondásra vezet:
  1. ha $\mathrm{Tr}\,S_\alpha \neq 0$, akkor $\mathrm{Tr}\,\rho(t)$ fölrobbanna,
  2. ha $\mathrm{Tr}\,S_\alpha = 0$, akkor a nempozitív S_α dominálná a pozitív $\rho(t)$-t
- $\hat{L}$ alakjából + kirótt egységőrzéséből (entrópianövekedésből):
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha \geq 0$ és $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0 \Leftrightarrow [S_\alpha, V_k^*] = 0, \forall k$

$$\mathrm{Tr}\,(S_\alpha^* S_\alpha)\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(S_\alpha^* \hat{L}(S_\alpha)) = -\frac{1}{2}\sum_k \mathrm{Tr}\,([S_\alpha, V_k^*]^*[S_\alpha, V_k^*]) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(S_\alpha S_\alpha^* \sum_k (V_k^* V_k - V_k V_k^*))$$

Weinberg konstrukció kiegészítésekkel

- Lindblad egyenlet lineáris mátrix-differenciálegyenlet $\mathcal{M}_n$-ben $\Rightarrow$
  1. "sajátmátrix-probléma" megoldása: $\hat{L}S_\alpha = \lambda_\alpha S_\alpha, \;\; S_\alpha \in \mathcal{M}_n$
  2. időfejlődés exponencializált sajátértékekkel:
  $\rho(t) = \sum_\alpha a_\alpha \exp(t\lambda_\alpha) S_\alpha$, ahol $\rho(0) = \sum_\alpha a_\alpha S_\alpha$
  • sajátmátrixok tere teljes, ha $\hat{L}$ normális operátor $\mathcal{M}_n$-en
  mint Hilbert téren, de $(A, B) := \mathrm{Tr}\,(A^* B)$-re nem az
- releváns sajátértékek $t \to \infty$ aszimptotikában: $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0$
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha < 0$: sajátmátixaik "elfogynak" a kifejtésből
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha > 0$: nem szerepelhetnek $\rho(0)$ kifejtésében
  mert $\mathrm{Tr}\,\rho(t) = \mathrm{Tr}\,\rho(0)$ miatt $a_\alpha \neq 0$ ellentmondásra vezet:
  1. ha $\mathrm{Tr}\,S_\alpha \neq 0$, akkor $\mathrm{Tr}\,\rho(t)$ fölrobbanna,
  2. ha $\mathrm{Tr}\,S_\alpha = 0$, akkor a nempozitív S_α dominálná a pozitív $\rho(t)$-t
- $\hat{L}$ alakjából + kirótt egységőrzéséből (entrópianövekedésből):
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha \geq 0$ és $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0 \Leftrightarrow [S_\alpha, V_k^*] = 0, \forall k$

$$\mathrm{Tr}\,(S_\alpha^* S_\alpha)\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(S_\alpha^* \hat{L}(S_\alpha)) = -\frac{1}{2}\sum_k \mathrm{Tr}\,([S_\alpha, V_k^*]^*[S_\alpha, V_k^*]) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(S_\alpha S_\alpha^* \sum_k (V_k^* V_k - V_k V_k^*))$$

Weinberg konstrukció kiegészítésekkel

- Lindblad egyenlet lineáris mátrix-differenciálegyenlet $\mathcal{M}_n$-ben $\Rightarrow$
  1. "sajátmátrix-probléma" megoldása: $\hat{L}S_\alpha = \lambda_\alpha S_\alpha,\ S_\alpha \in \mathcal{M}_n$
  2. időfejlődés exponencializált sajátértékekkel:
  $\rho(t) = \sum_\alpha a_\alpha \exp(t\lambda_\alpha) S_\alpha$, ahol $\rho(0) = \sum_\alpha a_\alpha S_\alpha$
  • sajátmátrixok tere teljes, ha $\hat{L}$ normális operátor $\mathcal{M}_n$-en mint Hilbert téren, de $(A, B) := \mathrm{Tr}\,(A^* B)$-re nem az
- releváns sajátértékek $t \to \infty$ aszimptotikában: $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0$
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha < 0$: sajátmátixaik "elfogynak" a kifejtésből
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha > 0$: nem szerepelhetnek $\rho(0)$ kifejtésében
  mert $\mathrm{Tr}\,\rho(t) = \mathrm{Tr}\,\rho(0)$ miatt $a_\alpha \neq 0$ ellentmondásra vezet:
  1. ha $\mathrm{Tr}\,S_\alpha \neq 0$, akkor $\mathrm{Tr}\,\rho(t)$ fölrobbanna,
  2. ha $\mathrm{Tr}\,S_\alpha = 0$, akkor a nempozitív S_α dominálná a pozitív $\rho(t)$-t
- $\hat{L}$ alakjából + kirótt egységőrzéséből (entrópianövekedésből):
  $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha \geq 0$ és $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0 \Leftrightarrow [S_\alpha, V_k^*] = 0, \forall k$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(S_\alpha^* S_\alpha)\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,(S_\alpha^* \hat{L}(S_\alpha)) = & - \frac{1}{2}\sum_k \mathrm{Tr}\,([S_\alpha, V_k^*]^*[S_\alpha, V_k^*]) \\
& - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(S_\alpha S_\alpha^* \sum_k (V_k^* V_k - V_k V_k^*))
\end{aligned}
$$

Weinberg konstrukció kiegészítésekkel

- $\hat{L}$ *-leképezés: $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0 \Leftrightarrow [S_\alpha, V_k] = 0, \forall k$
  $L(S_\alpha^*) = L(S_\alpha)^* = \lambda_\alpha^* S_\alpha^*$: sajátmátrix* sajátmátrix konjugált sajátértékkel
  azaz $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0 \Leftrightarrow S_\alpha \in \mathcal{V}' := \langle\{V_k, V_k^*, k\}\rangle' \cap \mathcal{M}_n$
- $Q \in \mathcal{V}' \Rightarrow \hat{L}(Q) = -i[H, Q] \Rightarrow$
  $\mathcal{M}_n \supset \mathcal{V}' \cap [H, \mathcal{V}']$ unitális *-részalgebrában
  • $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0$ sajátértékű $\hat{L}$-sajátmátrixok lineáris bázist alkotnak
  hisz $(A, B) := \mathrm{Tr}\,(A^* B)$-re a $-i[H, -]$ normális (antihermitikus) operátor invariáns altere $\mathcal{M}_n$-ben
- ha V_k-k és H választásával $\langle M\rangle' = \mathcal{V}' \cap [H, \mathcal{V}'] \Rightarrow$
  1. $\rho_\infty \in \langle M\rangle' = \mu_M(\mathcal{M}_n)$, de nem föltétlenül konstans
  2. $\rho_\infty = \sum_i P_i \rho P_i \Leftrightarrow -i[H, -]$ operátor $\langle M\rangle'$-beli sajátértékei zérusok
  • $-i[H, -]$ tisztán képzetes sajátértékei additív monoidot alkotnak
  egyrészt: S_α^*-hoz $\lambda_\alpha^* = -\lambda_\alpha =: \lambda_{\alpha^{-1}}$,
  másrészt: $-i[H, S_\alpha S_\beta] = -i[H, S_\alpha]S_\beta - iS_\alpha[H, S_\beta] = (\lambda_\alpha + \lambda_\beta)S_\alpha S_\beta$
  $\Rightarrow S_\alpha S_\beta \neq 0$, akkor $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$
  következmény: • ha $\langle M\rangle'$ abeli, azaz $\langle M\rangle \subset \mathcal{M}_n$ maximális abeli $\Rightarrow$ 2.
  $S_\alpha^k \neq 0$ ha $\langle M\rangle'$ abeli, hisz $S_\alpha^{*k} S_\alpha^k = (S_\alpha^* S_\alpha)^k \Rightarrow \lambda_{\alpha^k} = k\lambda_\alpha \neq 0, k \in \mathbb{N}$
  ellentmond $\langle M\rangle' \subset \mathcal{M}_n$ véges dimenziós voltának

Weinberg konstrukció kiegészítésekkel

- $\hat{L}\ ^*$-leképezés: $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0 \Leftrightarrow [S_\alpha, V_k] = 0, \forall k$
  $L(S_\alpha^*) = L(S_\alpha)^* = \lambda_\alpha^* S_\alpha^*$: sajátmátrix* sajátmátrix konjugált sajátértékkel
  azaz $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0 \Leftrightarrow S_\alpha \in \mathcal{V}' := \langle\{V_k, V_k^*, k\}\rangle' \cap \mathcal{M}_n$
- $Q \in \mathcal{V}' \Rightarrow \hat{L}(Q) = -i[H, Q] \Rightarrow$
  $\mathcal{M}_n \supset \mathcal{V}' \cap [H, \mathcal{V}']$ unitális *-részalgebrában
  • $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0$ sajátértékű $\hat{L}$-sajátmátrixok lineáris bázist alkotnak
  hisz $(A, B) := \mathrm{Tr}\,(A^* B)$-re a $-i[H, -]$ normális (antihermitikus) operátor invariáns altere $\mathcal{M}_n$-ben
- ha V_k-k és H választásával $\langle M\rangle' = \mathcal{V}' \cap [H, \mathcal{V}'] \Rightarrow$
  1. $\rho_\infty \in \langle M\rangle' = \mu_M(\mathcal{M}_n)$, de nem föltétlenül konstans
  2. $\rho_\infty = \sum_i P_i \rho P_i \Leftrightarrow -i[H, -]$ operátor $\langle M\rangle'$-beli sajátértékei zérusok
  • $-i[H, -]$ tisztán képzetes sajátértékei additív monoidot alkotnak
  egyrészt: S_α^*-hoz $\lambda_\alpha^* = -\lambda_\alpha =: \lambda_{\alpha^{-1}}$,
  másrészt: $-i[H, S_\alpha S_\beta] = -i[H, S_\alpha]S_\beta - iS_\alpha[H, S_\beta] = (\lambda_\alpha + \lambda_\beta)S_\alpha S_\beta$
  $\Rightarrow S_\alpha S_\beta \neq 0$, akkor $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$
  következmény: • ha $\langle M\rangle'$ abeli, azaz $\langle M\rangle \subset \mathcal{M}_n$ maximális abeli $\Rightarrow$ 2.
  $S_\alpha^k \neq 0$ ha $\langle M\rangle'$ abeli, hisz $S_\alpha^{*k} S_\alpha^k = (S_\alpha^* S_\alpha)^k \Rightarrow \lambda_{\alpha^k} = k\lambda_\alpha \neq 0, k \in \mathbb{N}$
  ellentmond $\langle M\rangle' \subset \mathcal{M}_n$ véges dimenziós voltának

Weinberg konstrukció kiegészítésekkel

- $\hat{L}$ *-leképezés: $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0 \Leftrightarrow [S_\alpha, V_k] = 0, \forall k$
  $L(S^*_\alpha) = L(S_\alpha)^* = \lambda^*_\alpha S^*_\alpha$: sajátmátrix* sajátmátrix konjugált sajátértékkel
  azaz $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0 \Leftrightarrow S_\alpha \in \mathcal{V}' := \langle\{V_k, V^*_k, k\}\rangle' \cap \mathcal{M}_n$
- $Q \in \mathcal{V}' \Rightarrow \hat{L}(Q) = -i[H, Q] \Rightarrow$
  $\mathcal{M}_n \supset \mathcal{V}' \cap [H, \mathcal{V}']$ unitális *-részalgebrában
  • $\mathrm{Re}\,\lambda_\alpha = 0$ sajátértékű $\hat{L}$-sajátmátrixok lineáris bázist alkotnak
  hisz $(A, B) := \mathrm{Tr}\,(A^* B)$-re a $-i[H, -]$ normális (antihermitikus) operátor invariáns altere $\mathcal{M}_n$-ben
- ha V_k-k és H választásával $\langle M\rangle' = \mathcal{V}' \cap [H, \mathcal{V}'] \Rightarrow$
  1. $\rho_\infty \in \langle M\rangle' = \mu_M(\mathcal{M}_n)$, de nem föltétlenül konstans
  2. $\rho_\infty = \sum_i P_i \rho P_i \Leftrightarrow -i[H, -]$ operátor $\langle M\rangle'$-beli sajátértékei zérusok
  • $-i[H, -]$ tisztán képzetes sajátértékei additív monoidot alkotnak
  egyrészt: S^*_α-hoz $\lambda^*_\alpha = -\lambda_\alpha =: \lambda_{\alpha^{-1}}$,
  másrészt: $-i[H, S_\alpha S_\beta] = -i[H, S_\alpha]S_\beta - iS_\alpha[H, S_\beta] = (\lambda_\alpha + \lambda_\beta)S_\alpha S_\beta$
  $\Rightarrow S_\alpha S_\beta \neq 0$, akkor $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$
  következmény: • ha $\langle M\rangle'$ abeli, azaz $\langle M\rangle \subset \mathcal{M}_n$ maximális abeli $\Rightarrow$ 2.
  $S^k_\alpha \neq 0$ ha $\langle M\rangle'$ abeli, hisz $S^{*k}_\alpha S^k_\alpha = (S^*_\alpha S_\alpha)^k \Rightarrow \lambda_{\alpha^k} = k\lambda_\alpha \neq 0, k \in \mathbb{N}$
  ellentmond $\langle M\rangle' \subset \mathcal{M}_n$ véges dimenziós voltának

Weinberg konstrukció kiegészítésekkel

- ha $\langle M\rangle'$ nem-abeli, akkor ρ_∞ lehet nem konstans

például:
$\mathcal{M}_4 \supset \oplus 2\mathcal{M}_2 \simeq \langle M\rangle'$, azaz $\langle M\rangle \simeq \oplus 2\mathcal{M}_1$, továbbá
$\mathcal{M}_4 \supset \oplus 4\mathcal{M}_1 \simeq \langle H\rangle \supset \langle M\rangle \simeq \oplus 2\mathcal{M}_1$
$\langle M\rangle' \ni E_1^{12}$ mátrixegységre $\lambda_{E^{12}} = -i(h_1 - h_2) \neq 0$
de ez nem szükségszerű, például $H \in \mathcal{V}$ választás $\Rightarrow$ 2.
$H \in \mathcal{V} \Rightarrow \langle M\rangle' = \mathcal{V}' \cap [H, \mathcal{V}'] = \mathcal{V}'$
azaz $\langle M\rangle'$-ben $-i[H, -]$ sajátértékei zérusok és $\langle M\rangle = \mathcal{V}$

Irodalom

- G. Lindblad: On the generators of quantum dynamical semigroups
  Commun.Math.Phys. 48, 119–130 (1976)
- F. Benatti, H. Narnhofer: Entropy behaviour under completely positive maps
  Letters in Math.Phys. 15, 325–334 (1988)
- S. Weinberg: What happens in a measurement
  arXiv: 1603.06008v1