VALÓSZÍNŰSÉGI ÁRAM A NULLA SPINŰ RELATIVISZTIKUS KVANTUMMECHANIKÁBAN

Fülöp Tamás
BME GPK EGR Tsz.

Matolcsi Tamás
ELTE TTK Alk. Anal. Szm. Tsz.

2017.12.14, Szeged

A Klein–Gordon-egyenlet, skalár hullámfüggvényre:

$$\left(\Box + m^2\right) \varphi = 0$$

a $\frac{1}{2im} \left(\varphi^* \partial_\mu \varphi - \partial_\mu \varphi^* \varphi\right)$ megmaradó áram nem pozitív definit

("pozitív definit": időszerű komponens nemnegatív függvény)

nem valószínűségi áram, hanem töltésáram

időben másodrendű egyenlet: φ, φ' kezdeti feltétel

Feshbach–Villars-formalizmus: $\begin{pmatrix} \varphi + \frac{\mathrm{i}}{m}\left(\partial_0 + \mathrm{i}eA_0\right)\varphi \\ \varphi - \frac{\mathrm{i}}{m}\left(\partial_0 + \mathrm{i}eA_0\right)\varphi \end{pmatrix}$

a pozitívos megoldásokra sem pozitív definit a töltéssűrűség

Szabad eset: $\mathrm{i}\partial_0\varphi = \sqrt{-\triangle + m^2}\,\varphi$ megoldásaira a szokásos

L^2-skalárszorzat időfüggetlen $\Longrightarrow$ valószínűségi leírás OK

nem-szabad rendszerekre általánosítás nem megy: $[\partial_\mu, A_\nu] \neq 0$

$$\Longrightarrow \quad \left[\left(\partial^\mu + \mathrm{i}eA^\mu\right)\left(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu\right) - m^2\right]\varphi \neq 0$$

1/2 spin: $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ pozitív definit, nem kell erőfeszítés, A_μ is OK

(154) $$(U_{h,x}\varphi)(p) = \exp i\{x,p\}\varphi(\delta(h)^{-1}p)^h.$$

$U \simeq U^{m,+,j}$ by theorem 6.20.

The reader might have noticed that we have not treated the spinless case in terms of the spinor calculus. This can also be done provided we consider, instead of the bundle (149), the bundle where the fibers are made up of *skew symmetric* tensors. More precisely, let

(155) $$B_m^{+,0} = \{(p,t) : p \in X_m^{+}, t \in \mathbf{C}^4 \otimes \mathbf{C}^4, t \text{ skew symmetric}, (\textstyle\sum p_r\gamma_r^{\nu})t = mt, \nu = 1, 2\},$$

with the norm defined for any Borel section φ of the bundle by

(156) $$\|\varphi\|^2 = \int_{R^3} \langle\varphi(p),\varphi(p)\rangle_2 d\beta_m^{+,2}(\mathbf{p}).$$

The representation of G^* is then defined in the same way as (154). For a given $p \in X_m^{+}$, the fiber of $B_m^{+,0}$ at p consists of all skew symmetric elements of $B_m^{+,1/2}(p) \otimes B_m^{+,1/2}(p)$ which form an one-dimensional space. As the unitary group K^* has no nontrivial one-dimensional representations,

it induces the trivial representation on the fiber of $B_m^{+,0}$ at $(m,0,0,0)$. Hence the representation of G^* defined in the Hilbert space of sections of $B_m^{+,0}$ is equivalent to $U^{m,+,0}$.

The Representations $U^{+,\pm n}$. These representations may be obtained by passing to the limit in $U^{m,+,j}$ as $m \to 0+$. We write

Varadarajan: Geometry of quantum theory I–II. (1968–70) csak a szabad eset

csak impulzustérben (lendülettérben)

csak az ábrázolást és a Hilbert-teret adja meg

koordinátatér?

fizikailag érdekes vizsgálatok?

kiterjesztés nem-szabad esetekre?

(mindenekelőtt: hogyan működik ez a konstrukció?)

Az 1/2 spin esete: geometriai kép $\Longrightarrow$ a 0 spinű eset könnyű

Jelölések:

$\hbar \equiv c \equiv 1$,

g szignatúrája $(+---)$,

négyes indexek: $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

hármas indexek: $j, k = 1, 2, 3$

komplex konjugálás: *, transzponálás: $^{\mathrm{T}}$, kombinációjuk: †

csak $m > 0$, $p \in \mathcal{P}_m$: $p_0 = \sqrt{p_j p_j + m^2}$, $\int_{\mathcal{P}_m} \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{p_0}$

Mátrixok:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságaik:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu}, \qquad \gamma_0^\dagger = \gamma_0, \qquad \gamma_j^\dagger = -\gamma_j,$$

$$\alpha_j = -\beta \gamma_j, \qquad \gamma_\mu^\dagger \beta = \beta \gamma_\mu, \qquad \alpha_j^\dagger = \alpha_j$$

Gyakran: $\theta \in \mathbb{C}^4$, $\Theta \in \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$: $\qquad \overline{\theta} = \theta^\dagger \beta, \quad \overline{\Theta} = \Theta^\dagger \beta$

Geometriai hozzávalók:

Ha $p \in \mathcal{P}_m$: $p_\mu \gamma^\mu : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ sajátértékei $+m$, $-m$

a sajátalterek: $N_+(p)$, $N_-(p)$, mindkettő kétdimenziós

Például: $\check{p} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\check{p}_\mu \gamma^\mu = m\gamma^0 = m\beta$,

$$N_+(\check{p}): \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad N_-(\check{p}): \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha_j p_j + \beta m$ sajátértékei, -alterei: $+p_0$, $-p_0$, $N_+(p)$, $N_-(p)$

1/2 spinű szabad kvantummechanika:

$$\gamma^\mu p_\mu \psi(p) = m\psi(p) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi(p) \in N_+(p)$$

Például: $\check{p} = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Egy L Lorentz-transzformáció D_L ábrázolása $\mathbb{C}^4$-en:

$$\beta D_L^\dagger \beta = D_L^{-1}, \qquad D_L \left(\gamma^\mu p_\mu\right) D_L^{-1} = \gamma^\mu (Lp)_\mu$$

a $\psi : \mathcal{P}_m \to \mathbb{C}^4$ függvényeken $\left(U_{(a,L)}\psi\right)(p) = \mathrm{e}^{\mathrm{i} p_\mu a^\mu} D_L \psi(L^{-1}p)$

a Poincaré-csoport irreducibilis sugárábrázolása

A Hilbert-tér: $\int_{\mathcal{P}_m} \overline{\psi(p)}\psi(p)\frac{m\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{p_0} = \int_{\mathcal{P}_m} \psi(p)^\dagger\psi(p)\frac{m^2\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{p_0^2}$

a $\gamma^\mu p_\mu\psi(p) = m\psi(p)$, azaz $(\alpha_j p_j + \beta m)\,\psi(p) = p_0\psi(p)$

megoldásterére megszorítva Hilbert-tér

Foldy–Wouthuysen-transzformáció: minden p-re $\psi^W = \begin{pmatrix} \psi_1^W \\ \psi_2^W \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\psi^W(p) = W(p)\psi(p)$, $W(p) = \frac{1}{\sqrt{2m(p_0+m)}}\left[(p_0+m)I_4 - \alpha_j p_j\right]$

Koordinátatér:

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_\mu x^\mu}\psi(p)\frac{m\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{p_0} = \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_0 x_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_j x_j}\psi(p)\frac{m\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{p_0} = (2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\psi(t,\mathbf{x})$$

$$\int \left(\psi^\dagger\psi\right)(t,\mathbf{x})\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}$$

időfüggetlen, egyenlő a lendülettérbeli normanégyzettel

$$\psi(p)\in N_+(p),\qquad \gamma^\mu p_\mu\psi = m\psi,\qquad (\alpha_j p_j+\beta m)\,\psi = p_0\psi$$

$$\Longrightarrow$$

$$\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu)\psi(x) = m\psi(x),\qquad \mathrm{i}\partial_t\psi(t,\mathbf{x}) = \left[\alpha_j\left(-\mathrm{i}\partial_j\right)+\beta m\right]\psi(t,\mathbf{x})$$

Áram és Lagrange-sűrűség:

$\psi^\dagger \psi = \overline{\psi}\beta\psi = \overline{\psi}\gamma^0\psi$: komponense $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ -nek

Ez egy valós, pozitív definit, megmaradó Noether-áram:

$\left[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu) - m\right]\psi = 0$: E–L-egyenlet $\mathcal{L} = \overline{\psi}\left[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu) - m\right]\psi$ -ből,

a $\psi \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}\psi$ globális mértéktranszformáció Noether-árama

Megjegyzés: beszorozva $\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu) + m$ -mel:

$$\left(\Box + m^2\right)\psi = 0: \quad \text{Klein–Gordon-egyenlet komponensenként}$$

0 spinű szabad kvantummechanika: analóg módon:

ψ: $\mathbb{C}^4$

$\psi(p) \in N_+(p)$

$\gamma^\mu p_\mu \psi = m\psi$

$\int \overline{\psi}\psi \frac{m\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{p_0} = \int \psi^\dagger \psi \frac{m^2\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{p_0^2}$

Poincaré irred. ábr.-a

lényegileg 2 szab. fok

ζ: $\mathbb{C}^4 \wedge \mathbb{C}^4$

$\zeta(p) \in N_+(p) \wedge N_+(p)$

$\gamma^\mu p_\mu \zeta = m\zeta$

$\int \mathrm{Tr}\big(\overline{\zeta}\zeta\big) \frac{m\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{p_0} = \int \mathrm{Tr}\big(\zeta^\dagger \zeta\big) \frac{m^2\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{p_0^2}$

Poincaré irred. ábr.-a

lényegileg $2 \wedge 2 = 1$ szab. fok

$n_1, n_2 \in N_+(p), \quad n_3, n_4 \in N_-(p)$ bázis $\mathbb{C}^4$-ben:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\,(c_{12}\, n_1 \wedge n_2 + c_{13}\, n_1 \wedge n_3 + \cdots + c_{34}\, n_3 \wedge n_4) = 0$$

$\Longrightarrow$ egyedül $c_{12} \neq 0$

Foldy–Wouthuysen:

$$W\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^W \\ \psi_2^W \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad W\zeta W^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_{12}^W & 0 & 0 \\ -\zeta_{12}^W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$j^\mu = \mathrm{Tr}\left(\overline{\zeta}\gamma^\mu\zeta\right)$$

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu) - m\right]\psi$$

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\left\{\overline{\zeta}\left[\gamma^\mu(\mathrm{i}\partial_\mu) - m\right]\zeta\right\}$$

KG komponensenként

KG komponensenként

Nem-szabad kvantummechanika:

$$\partial_\mu \;\rightsquigarrow\; \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu$$

$$\partial_\mu \operatorname{Tr}\left(\overline{\zeta}_1 \gamma^\mu \zeta_2\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \partial_t \int \operatorname{Tr}\left(\overline{\zeta}_1 \gamma^0 \zeta_2\right) \equiv \partial_t \int \operatorname{Tr}\left(\zeta_1^\dagger \zeta_2\right) = 0:$$

időfüggetlen Hilberttér-skalárszorzat

$$\left[\left(\partial^\mu + \mathrm{i}eA^\mu\right)\left(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu\right) - m^2\right]\zeta \neq 0 \;:$$

nem a Klein–Gordon-egyenlet minimális csatolása

Jövő, tennivalók:

KG-nal való viszony (szabad, nem-szabad)

Coulomb-probléma

másodkvantálás

új típusú térelméleti kölcsönhatások?

1 spin, ...

Jövő, tennivalók:

KG-nal való viszony (szabad, nem-szabad)

Coulomb-probléma

másodkvantálás

új típusú térelméleti kölcsönhatások?

1 spin, ...

KÖSZÖNÖM A FIGYELMET!