Hasznos korrelációk kötötten összefonódott állapotokból

Vértesi Tamás
Atomki, Debrecen

Nicolas Brunnerrel, Pál Károllyal és Tóth Gézával közös munkák alapján

SZTE Elméleti Fizikai Tanszék,
2019. március 14.

Absztrakt

A kötötten összefonódottság egy nagyon gyenge formáját képviseli az összefonódott állapotoknak. Ezen állapotok olyannyira gyengén összefontak, hogy végtelen számú példányukból sem nyerhető ki tiszta összefonódottság. Ennek ellenére hasznosnak bizonyulnak a kvantumos kulcskiosztásban, vagy metrológiai feladatokban. Ebben az előadásban megmutatjuk, hogy a kötötten összefonódott állapotokat Bell-egyenlőtlenségek sértésére is lehet használni. Ez egyúttal ellenpéldát ad Asher Peres sejtésére. Az eredményünk a kvantuminformatika eszközfüggetlen alkalmazásaiban is hasznosulhatnak.

Tartalom

1. (Kötött) összefonódottság

Egy kétrészű állapot szeparálható:

$$\rho_{AB} = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \rho_A^{\lambda} \otimes \rho_B^{\lambda}$$

Az állapot összefonódott, hogy ha nem írható fel a fenti formában.

1. (Kötött) összefonódottság

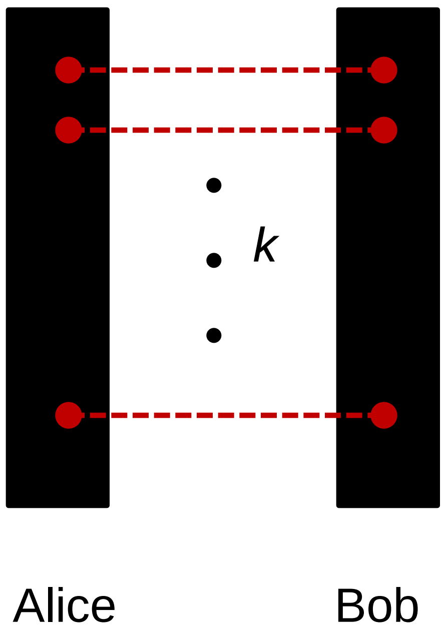
A szinglet állapot egy tiszta állapot, amely két kvantumbit maximálisan összefonódott állapota:

$$\left|\Psi_{-}\right\rangle = \frac{\left|0\right\rangle \otimes \left|1\right\rangle - \left|1\right\rangle \otimes \left|0\right\rangle}{\sqrt{2}}$$

Kísérleti körülmények között a zaj elkerülhetetlen, így csak a tiszta állapotok keveréke valósul meg. Azonban a kvantum-informatikai protokollok jellemzően a szinglet állapotra épülnek, mint erőforrásra. Pl. kriptográfia, teleportáció. Létezik-e megoldás erre a problémára?

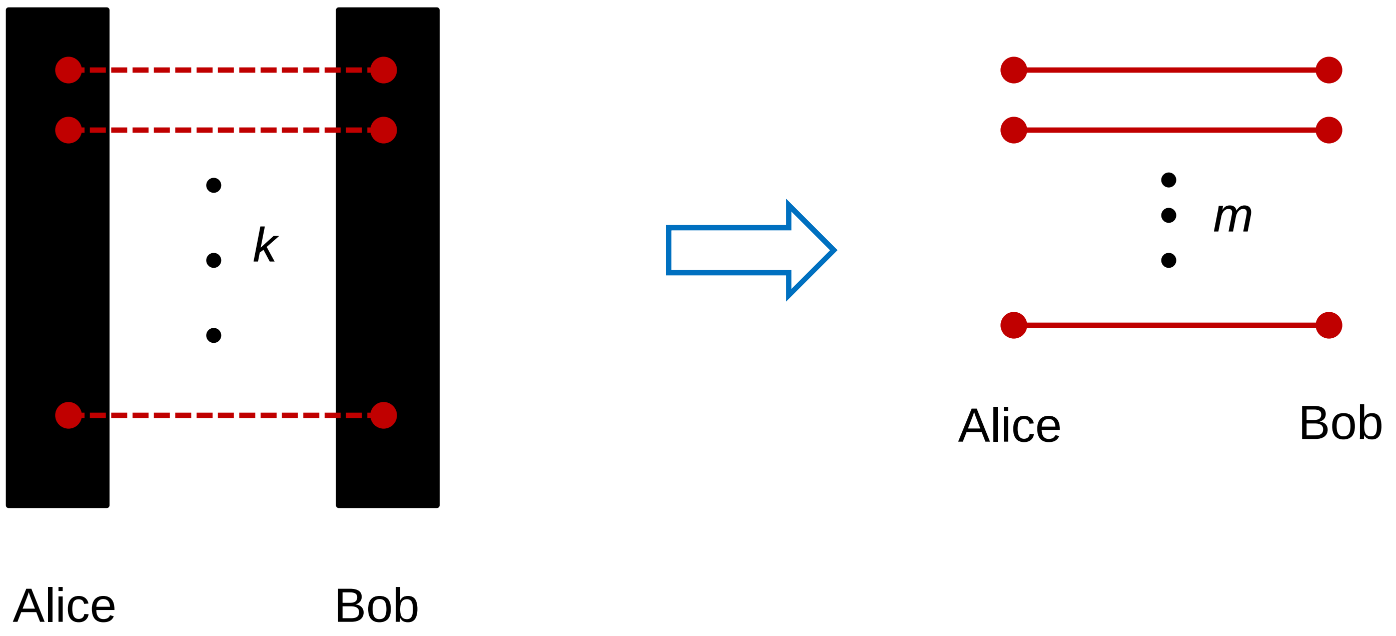
1. (Kötött) összefonódottság

Alice és Bob *k* példányát osztja meg egy ρ_{AB} kevert állapotnak:

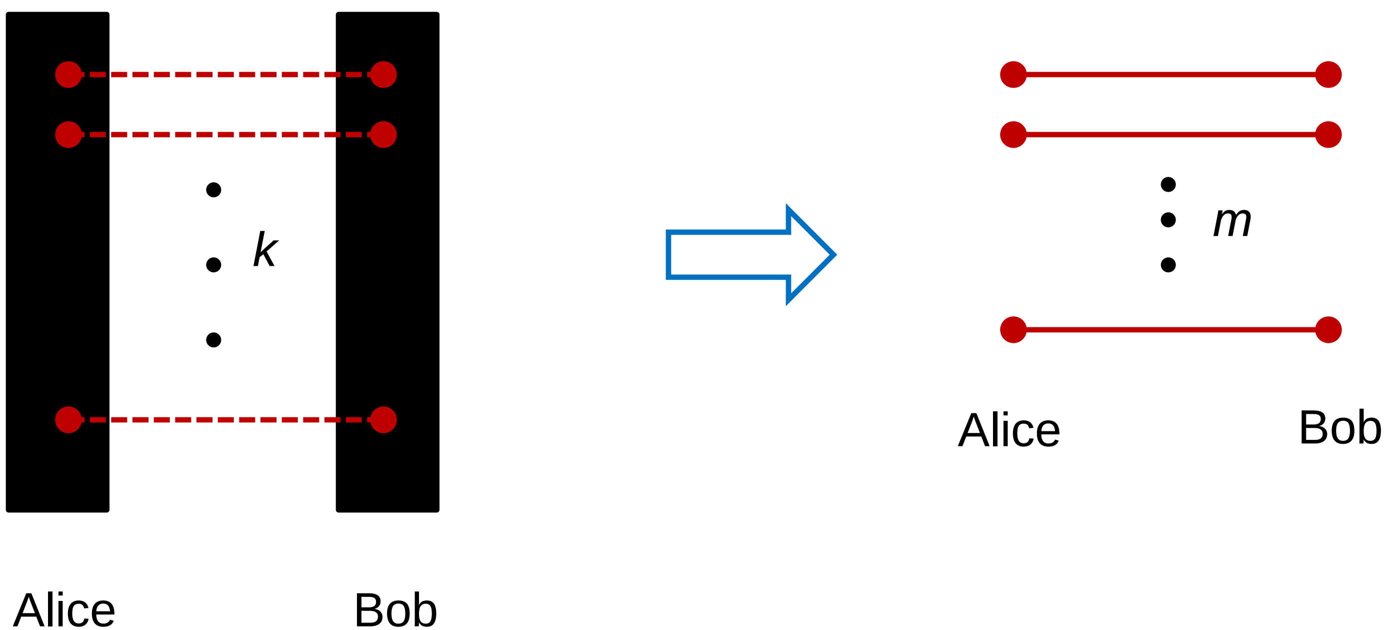


1. (Kötött) összefonódottság

Ezután egy desztillációs eljárást végeznek el (LOCC = lokális műveletek és klasszikus kommunikáció):



1. (Kötött) összefonódottság



Ennek eredményeképpen, *m*<*k* példányát kapják meg a szinglet állapotnak, amelyet már felhasználhatnak kvantuminformatikai célokra.

1. Kötött összefonódottság

Minden két-kvantumbites (kétqubites) összefonódott ρ_{AB} állapotból desztillálható szinglet állapot a fenti desztillációs eljárással.

Vajon igaz lesz-e ez magasabb dimenziós rendszerek esetén is?

1. Kötött összefonódottság

Minden két-kvantumbites (kétqubites) összefonódott ρ_{AB} állapotból desztillálható szinglet állapot a fenti desztillációs eljárással.

Vajon igaz lesz-e ez magasabb dimenziós rendszerek esetén is?

Horodeckiék 1998-ban megmutatták, hogy nincs így. Találtak olyan zajos, gyengén összefonódott állapotokat, amelyekből nem lehet szinglet állapotot kinyerni desztillációs eljárással (vagyis LOCC műveletekkel).

Ezen állapotokat kötötten összefonódott állapotoknak nevezzük. Erre a legegyszerűbb példa egy 3x3 dimenziós állapot, amely az ún. UPB-konstrukción alapszik.

1. Kötött összefonódottság

Adott egy összefonódott ρ_{AB} állapot. Hogyan dönthető el, hogy desztillálható-e vagy sem (vagyis az állapot kötötten összefonódott-e)?

Ez egy nehéz kérdés, mivel nem létezik egy általános recept a desztillációs eljárásra: bármilyen LOCC művelet megengedett, illetve az állapot példányainak a száma is tetszőleges lehet.

1. Kötött összefonódottság

Egy elégséges, gyakorlatban könnyen igazolható feltétel mégis adható a nem-desztillálhatóságra. Ez a feltétel a részleges transzponálás (Partial Transpose) műveleten alapszik:

$$\mathrm{PT}\left(\rho_{AB}\right) = \left(\mathrm{I} \otimes T_B\right)\left(\rho_{AB}\right)$$

Ha egy állapoton a fenti PT-műveletet elvégezve, az állapot pozitív marad (vagyis az állapot egy fizikai állapotba kerül vissza), akkor biztosan nem desztillálható.

Az ilyen állapotokat PPT kötötten összefonódott állapotoknak nevezzük.

1. Kötött összefonódottság

Hasznosak-e a kötötten összefonódott állapotok?

1. Kötött összefonódottság

Hasznosak-e a kötötten összefonódott állapotok?

Igen, például:

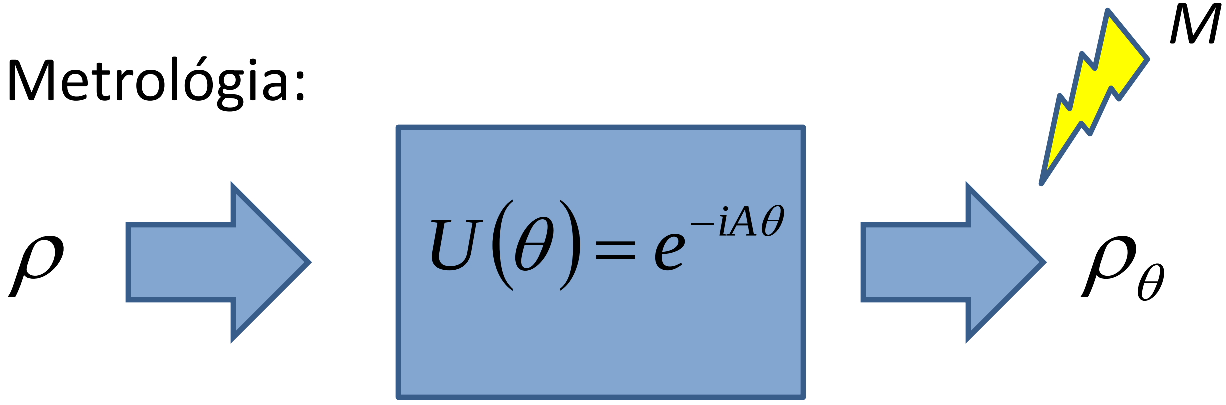
• Kvantumkulcs-kiosztásban (Horodecki et al.: *Secure key from bound entanglement,* PRL 2005).

• Adatelrejtésben: ún. private állapotokhoz tetszőlegesen közeli PPT kötötten összefonódott állapotok állíthatók elő. Ilyen típusú PPT állapotokból sok kulcsot lehet gyártani. (L. Lami, C. Palazuelos, and A. Winter: *Ultimate data hiding in quantum mechanics and beyond*, 2018).

• Metrológiában, lineáris interferométerekben.

1. Kötött összefonódottság

- Metrológia:



A feladat a (kicsi) θ paraméter becslése a dimanikában. Azt mondjuk, hogy a ρ állapot hasznos, hogy ha bármely szeparálható állapotnál pontosabb becslést tudunk vele elérni adott A mellett.

(G. Tóth and T. Vértesi: *Quantum states with a positive partial tranpose are useful in metrology*, PRL ’18)

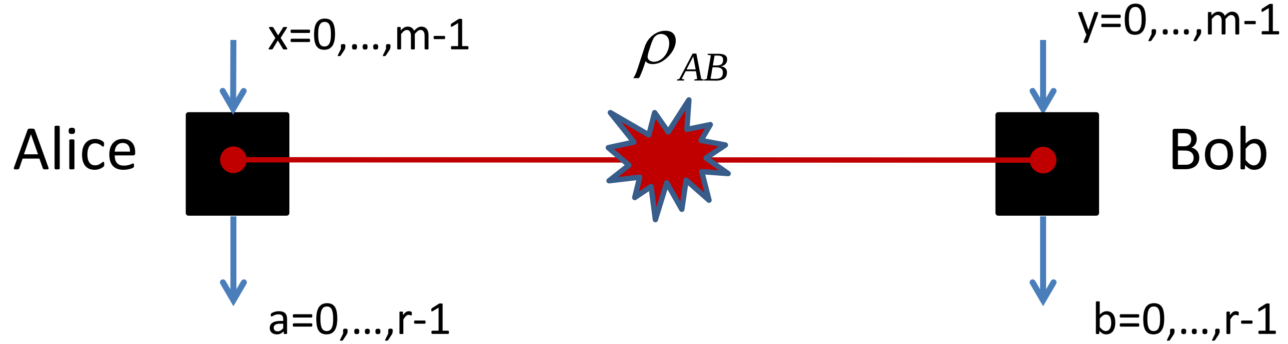
1. Kötött összefonódottság

- Kérdés: Az előbbi példákon túl hasznosak lehetnek-e a kötötten összefonódott állapotok a nemlokális korrelációk keltésében? Lehet-e segítségükkel olyan korrelációkat előállítani, amelyek klasszikusan nem szimulálhatóak? Nevezetesen, lehet-e velük Bell-egyenlőtlenséget sérteni?

- A következő diákon ezt fogjuk megvizsgálni.

2. Bell-nemlokalitás

Kísérleti Bell-féle elrendezés: Távoli felhasználók (Alice és Bob) *m* különböző mérést végezhet, és minden mérésnek *r* különböző kimenetele lehet.

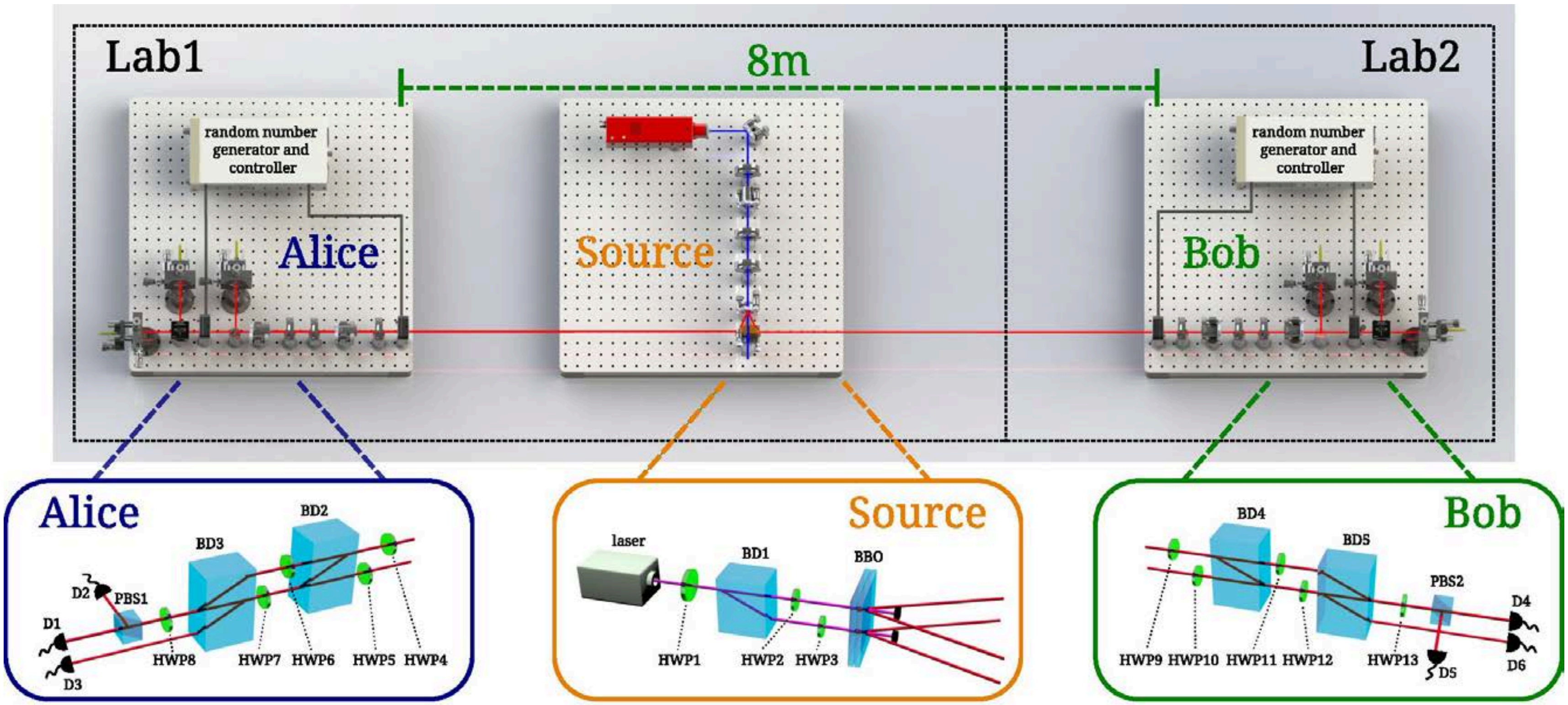


Kísérletből kinyerhető adat: P(a,b|x,y)

J.S. Bell: On the einstein-podolsy-rosen paradox, 1964

2. Bell-nemlokalitás

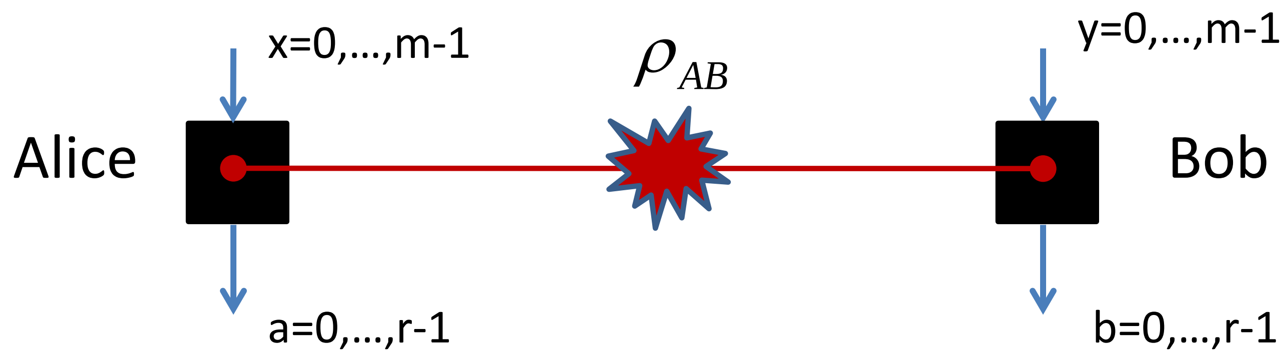
- Egy optikai Bell-kísérlet elrendezése (2 be, 3 kimenet, 2 qutrit):



- Forrás: X.M. Hu, B.H. Liu, Y. Guo, G.Y. Xiang, Y.F. Huang, C.F. Li, G.C. Guo, M. Kleinmann, T. Vértesi, A. Cabello: *Observation of stronger-than-binary correlations with entangled photonic qutrits,* PRL ’18

2. Bell-nemlokalitás

Kísérleti Bell-féle elrendezés: kvantumos eset.



P(a,b|x,y)

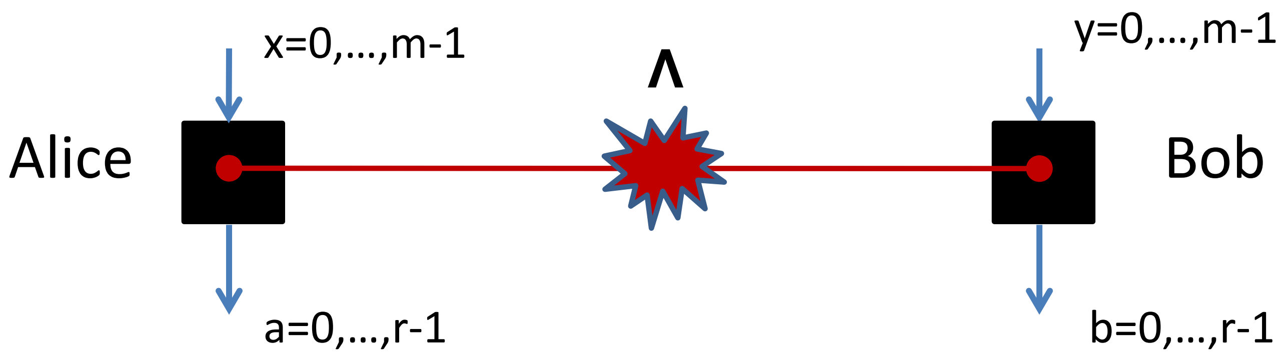
A lehetséges kvantumkorrelációk:

$$P(a,b\,|\,x,y) = \mathrm{tr}\left(\rho_{AB} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$$

2. Bell-nemlokalitás

Kísérleti Bell-féle elrendezés: klasszikus eset

Λ egy közös véletlen változó.



P(a,b|x,y)

A lehetséges lokális korrelációk:

$$P(a,b\,|\,x,y)=\sum_{\lambda} p_{\lambda} P(a\,|\,x,\lambda) P(b\,|\,y,\lambda)$$

2. Bell-nemlokalitás

A P(a,b|x,y) valószínűségi eloszlást nemlokálisnak nevezzük, hogy ha az előbbi alakban nem írható fel. Mi ennek a jelentése? **Λ** egy közös véletlen változó, ami külön-külön befolyásolja az A és B helyi eloszlásokat.

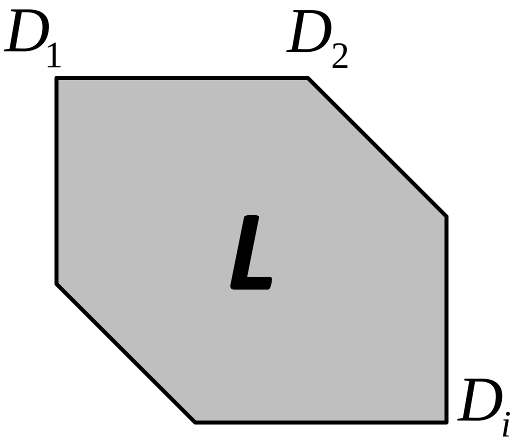
Ugyanakkor, ha a $P(a,b\,|\,x,y) = \mathrm{tr}\left(\rho_{AB} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$ eloszlás nemlokális, akkor azt mondjuk, hogy a ρ_{AB} állapot nemlokális.

2. Bell-nemlokalitás

$$P(a,b\,|\,x,y)=\sum_{\lambda} p_{\lambda} P(a\,|\,x,\lambda) P(b\,|\,y,\lambda)$$

Geometriailag, a lehetséges lokális eloszlások ***L*** halmaza véges számú pontnak a konvex burka. Vagyis ***L*** egy politópot határoz meg.

A politóp D_i csúcsai az ún. determinisztikus stratégiákhoz tartoznak. Ilyenkor a p_{λ} súlyok a 0/1 értékeket vehetik fel.

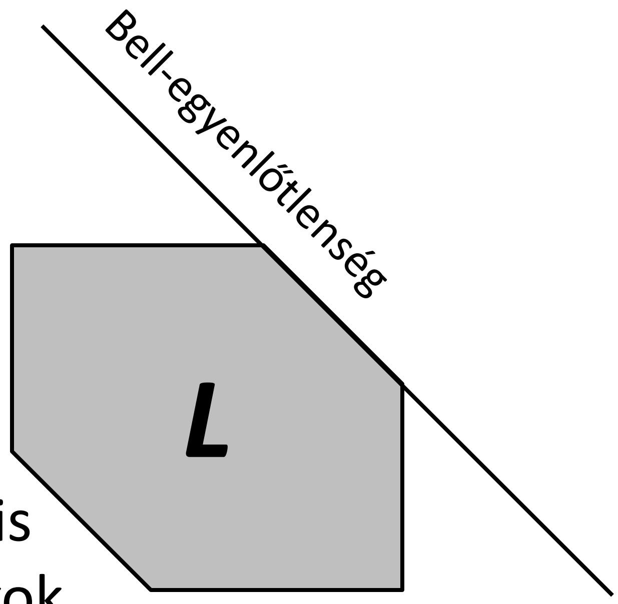


2. Bell-nemlokalitás

$$P(a,b\,|\,x,y)=\sum_{\lambda}p_{\lambda}P\left(a\,|\,x,\lambda\right)P\left(b\,|\,y,\lambda\right)$$

Geometriailag, a lehetséges lokális eloszlások ***L*** halmaza véges számú pontnak a konvex burka. Vagyis ***L*** egy politópot határoz meg.

A politóp D_i csúcsai az ún. determinisztikus stratégiákhoz tartoznak. Ilyenkor a p_λ súlyok a 0/1 értékeket vehetik fel.

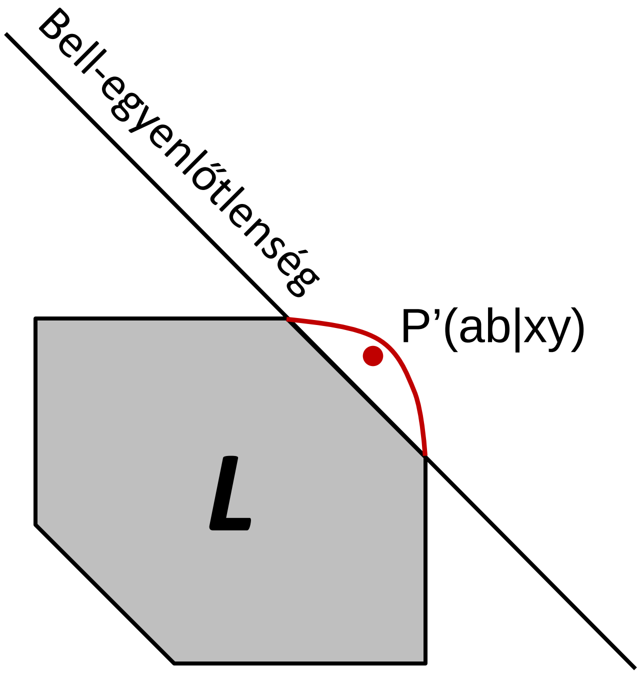


A Bell-egyenlőtlenségek ezen lokális korrelációk halmazát határoló félsíkok.

2. Bell-nemlokalitás

$$P(a,b\,|\,x,y)=\sum_{\lambda}p_{\lambda}P(a\,|\,x,\lambda)P(b\,|\,y,\lambda)$$

Az ábrán a Bell-egyenlőtlenség a P’ korrelációt nemlokálisnak detektálja.



3. Összefonódottság / nemlokalitás

Szeparálható állapot mindig felírható ilyen formában:

$$\rho_{AB} = \sum_{\lambda} p_{\lambda} \rho_A^{\lambda} \otimes \rho_B^{\lambda} \quad .$$

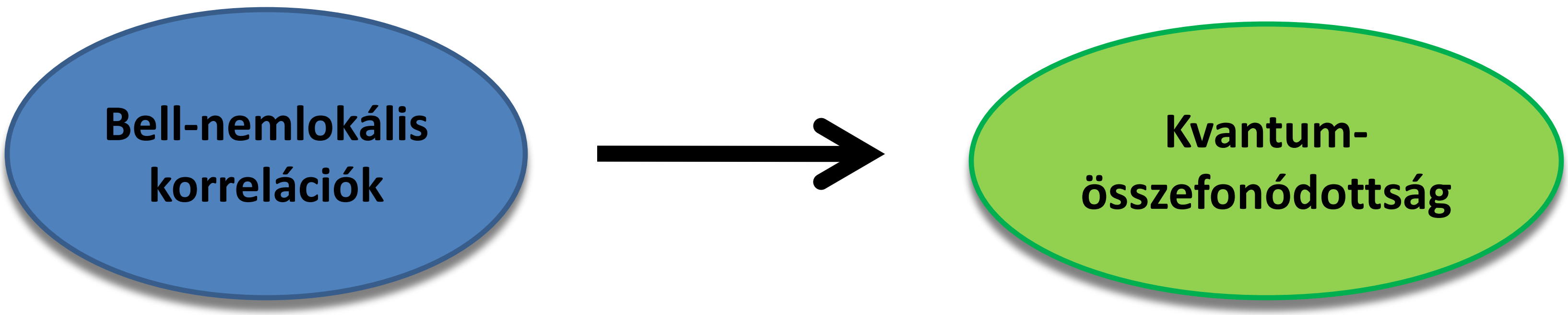
Alice és Bob méréseket végeznek az állapot hozzájuk tartozó felén. Az ebből származó korrelációk matematikailag így írhatóak:

$$\begin{aligned} P(a,b \mid x,y) &= \mathrm{tr}\left(\rho_{AB} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right) = \mathrm{tr}\left(\sum_{\lambda} p_{\lambda} \rho_{\mathrm{A}}^{\lambda} \otimes \rho_{\mathrm{B}}^{\lambda} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right) \\ &= \sum_{\lambda} p_{\lambda} \mathrm{tr}\left(\rho_{\mathrm{A}}^{\lambda} M_{a|x}\right) \mathrm{tr}\left(\rho_{\mathrm{B}}^{\lambda} M_{b|y}\right) \\ &= \sum_{\lambda} p_{\lambda} P(a \mid x,\lambda) P(b \mid y,\lambda) \end{aligned}$$

amely utóbbi képlet pontosan a korrelációk lokális formáját adja meg.

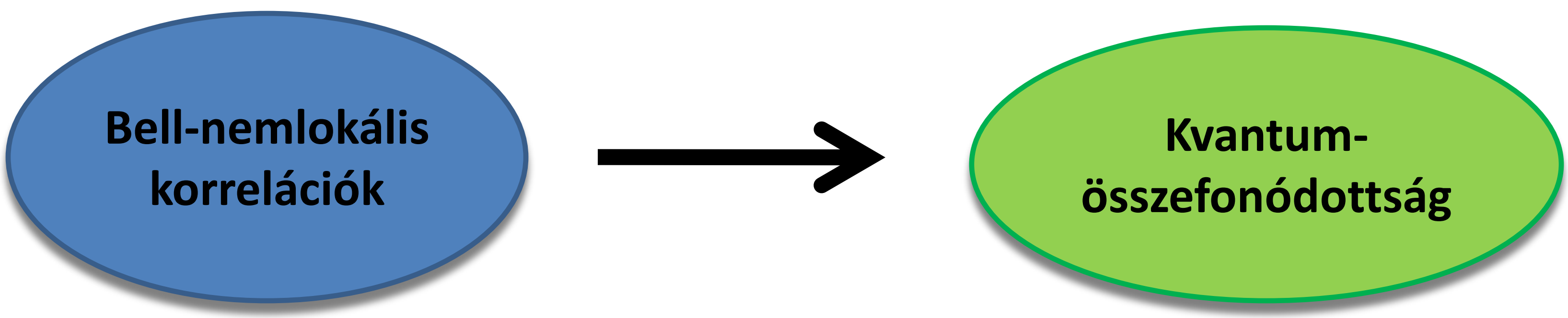
3. Összefonódottság / nemlokalitás

Megfordítva a fenti eredményt, azt kapjuk, hogy nemlokális korrelációk észlelése összefonódottság jelenlétére utal.



3. Összefonódottság / nemlokalitás

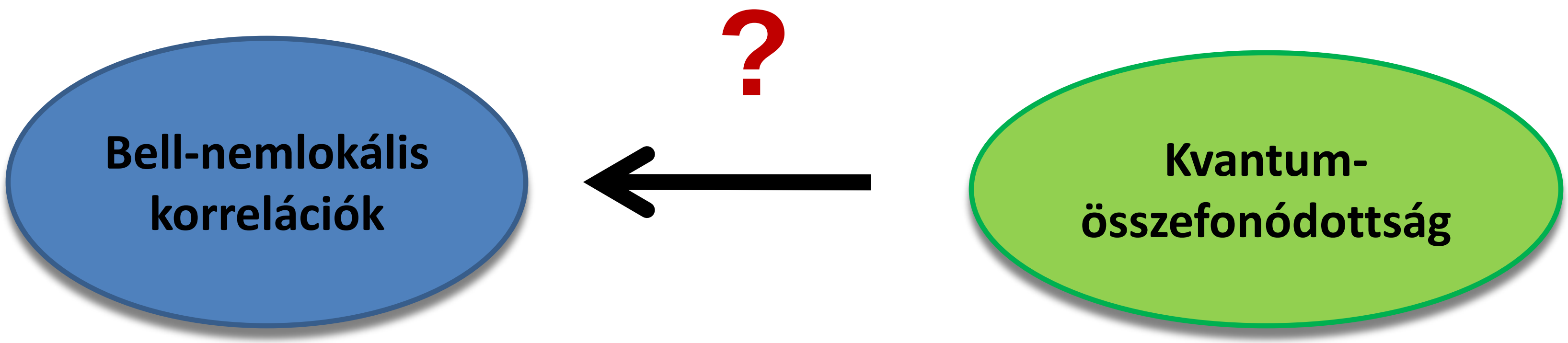
Megfordítva a fenti eredményt, azt kapjuk, hogy nemlokális korrelációk észlelése összefonódottság jelenlétére utal.



Ez példa az összefonódottság ún. eszközfüggetlen észlelésére: Összefonódottság megléte igazolható anélkül, hogy a két kísérletező, Alice és Bob, ismerné a mérőműszerei működésének részleteit.

3. Összefonódottság / nemlokalitás

Megfordítható-e a fenti irány ?



3. Összefonódottság / nemlokalitás

Tiszta állapotokra a válasz: Igen. ✓

Az egyedüli tiszta állapot, amely nem sért Bell-egyenlőtlenséget (vagyis lokális), a szorzatállapot:
(Gisin ’91, Popescu and Rohrlich ’92):

$$\left|\Psi\right\rangle = \left|\Psi_A\right\rangle \otimes \left|\Psi_B\right\rangle$$

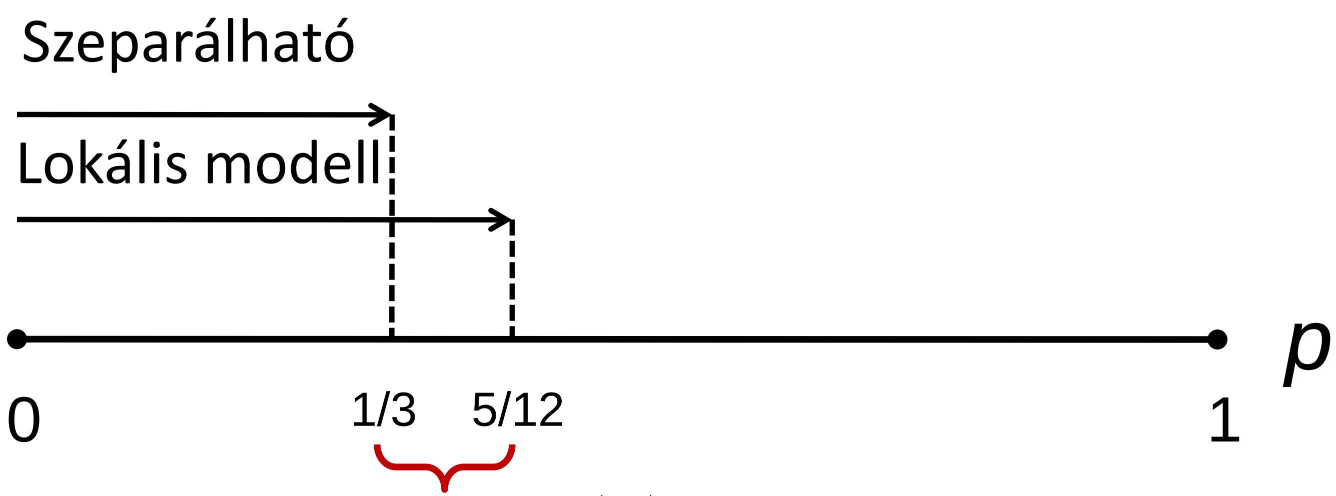
3. Összefonódottság / nemlokalitás

Kevert állapotokra: A válasz nem ismert. ✗

3. Összefonódottság / nemlokalitás

Példaként vegyük a *p* paraméteres kétqubites Werner-állapotokat:

$$\rho(p) = p|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| + (1-p)\frac{\mathrm{I}}{2}\otimes\frac{\mathrm{I}}{2}$$



Ebben a tartományban a $\rho(p)$ összefonódott, *de lokális*.

3. Összefonódottság / nemlokalitás

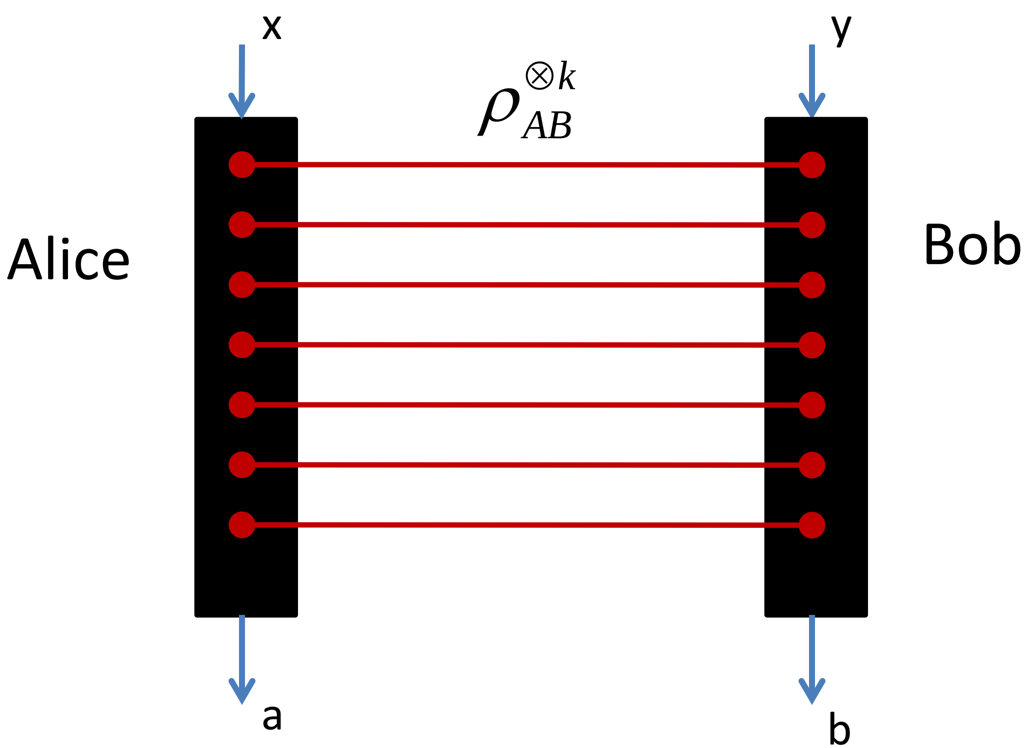
A fenti Bell-féle elrendezésben csak *egyszeri* méréseket feltételezünk, és ezek is csak $\rho(p)$ *egyetlen* példányán hatnak.

Lehetséges-e a $\rho(p)$ nemlokális tartományát kibővíteni azáltal, hogy ennél általánosabb elrendezést tekintünk?

A következőkben ilyen általánosított Bell-féle teszteket mutatunk be.

4. Nemlokalitás tesztek

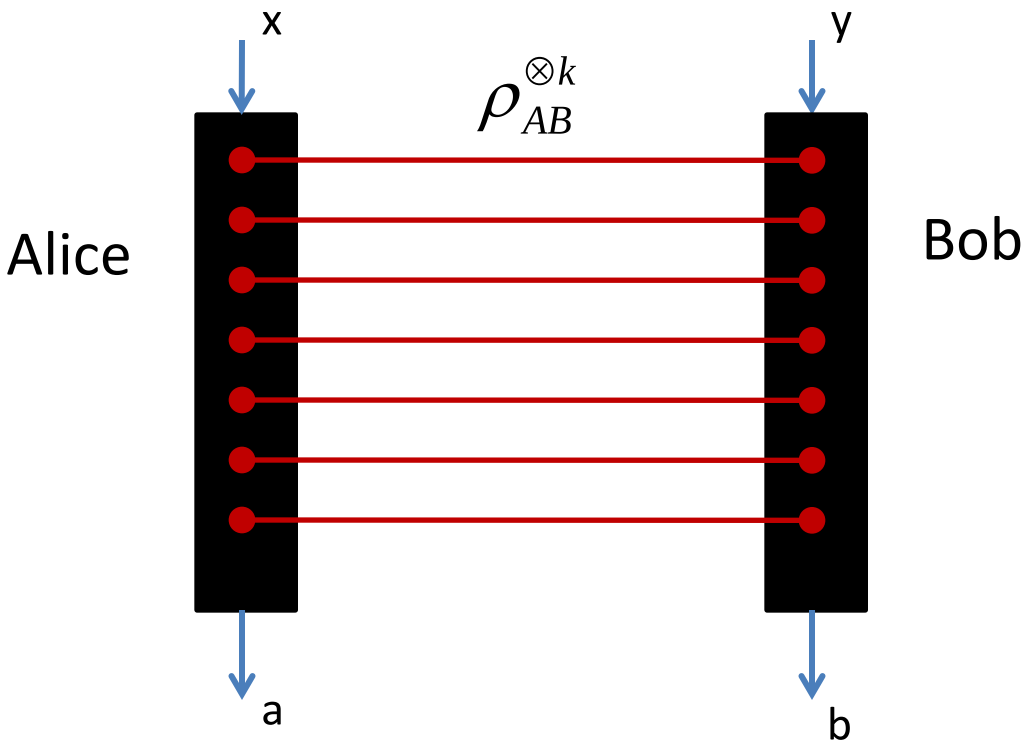
Sok példány: Alice és Bob együttes méréseket végezhet a ρ_{AB} állapot több példányán.



$$P(a,b|x,y) = \mathrm{tr}\left(\rho_{AB}^{\otimes k} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$$

4. Nemlokalitás tesztek

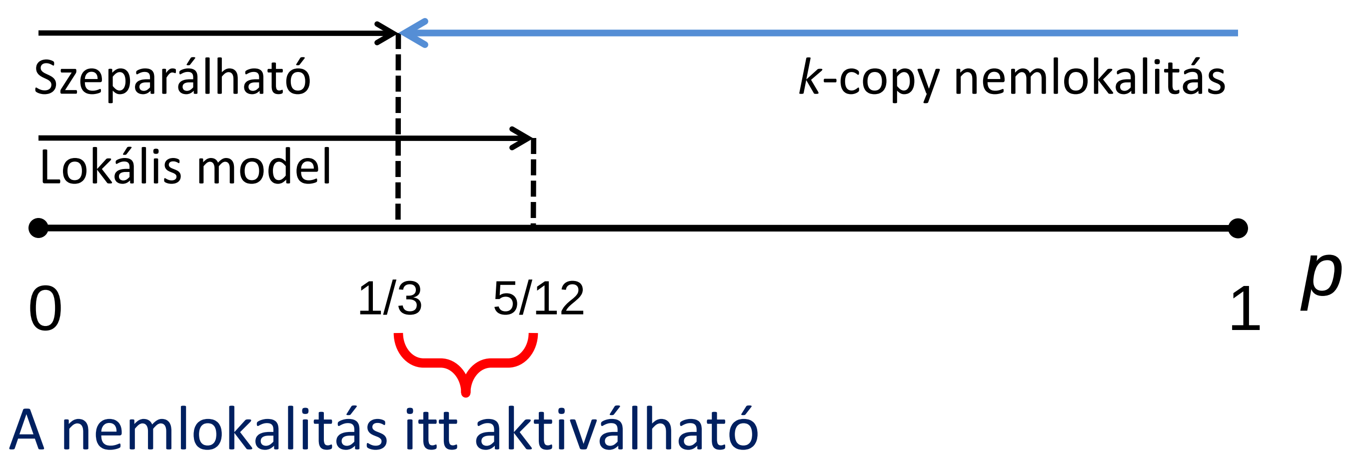
Sok példány: Ha P(a,b|x,y) nemlokális, akkor azt mondjuk, hogy ρ_{AB} k-copy nemlokális.



P(a,b|x,y) $= \mathrm{tr}\left(\rho_{AB}^{\otimes k} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$

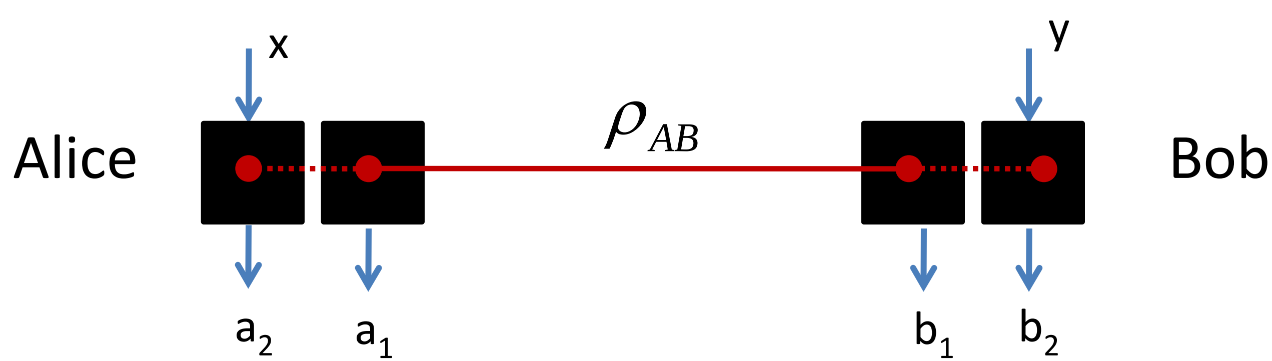
4. Nemlokalitás tesztek

Sok példány: Palazuelos (PRL, 2012) a Khot-Vishnoi játékon alapuló Bell-egyenlőtlenség segítségével mutat ki nemlokalitás aktiválását. Palazuelos munkáját továbbfejlesztve megmutatható, hogy bármely összefonódott kétqubites Werner állapot *k*-copy nemlokális (D. Cavalcanti, A. Acin, N. Brunner, T. Vértesi, PRA 2013):



4. Nemlokalitás tesztek

Szűrés: Rejtett nemlokalitás kimutatása (Popescu 1995, Gisin 1996).

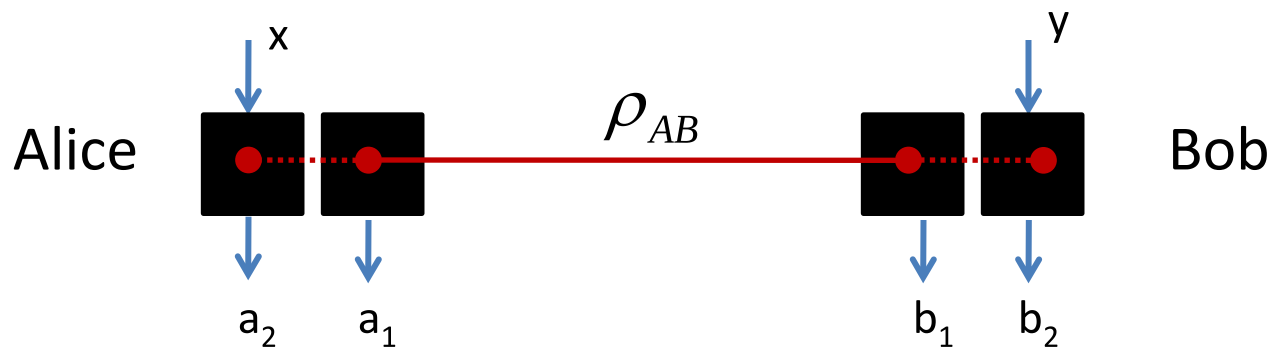


$p(a,b|x,y, a_1=0,b_1=0)$

Egyetlen mérés helyett most Alice és Bob mérések sorozatát végezheti az állapoton (tipikusan kettőt egymás után). Amennyiben az első mérések sikeresek voltak, utána egy hagyományos Bell-féle kísérletet végeznek.

4. Nemlokalitás tesztek

Szűrés: Rejtett nemlokalitás (Popescu ’95, Gisin ’96).



$$p(a,b|x,y,a_1=0,b_1=0)$$

Hirsch et al. (PRL, 2013) valódi rejtett nemlokalitásra ad példát: Egy olyan kétqubites állapotot találnak, amelyre lokális modell adható a hagyományos Bell-féle elrendezésben, de Bell-egyenlőtlenséget sért, ha előtte szűrést hajtunk végre az állapoton.

4. Nemlokalitás tesztek

Sok példány és szűrés együtt: = Összefonódottság desztillációja.

4. Nemlokalitás tesztek

Sok példány és szűrés együtt: = Összefonódottság desztillációja.

Emiatt: Bármely desztillálhatóan összefonódott állapotból kinyerhető a szinglet állapot, amely használható Bell-nemlokális korrelációk keltésére.

De léteznek kötötten összefonódott állapotok, amelyekből nem nyerhető ki desztillációval összefonódottság.

Vajon mit mondhatunk ezen állapotok nemlokalitásáról? Sérthetnek-e Bell-egyenlőtlenséget? Erre vonatkozik a következő dián Asher Peres sejtése.

5. Peres-sejtés

Sejtés: Minden nem-desztillálható állapot rendelkezik lokális modellel (A. Peres, Foundations of Physics 29, 589-614 (1999)), így ezen állapotok nem sérthetnek Bell-egyenlőtlenséget:

”Note that there exist inseparable quantum states that cannot be distilled into singlets. In particular, quantum states whose partial transpose has no negative eigenvalue have that property. Thus, if the preceding conjectures are correct, **it follows that these peculiar inseparable quantum states violate no Bell inequality**, and therefore, owing to Farkas’s lemma, their statistical properties are compatible with the existence of local objective variables.”

5. Peres-sejtés

Peres mellett: ✓

- A CHSH-Bell-egyenlőtlenség csakis desztillálható állapotokkal sérthető (Acin ’01, Masanes ’06). Ugyanez vonatkozik a CHSH-nak kettőnél több résztvevős általánosítására is, az ún. Mermin-féle Bell-egyenlőtlenségekre. Tehát ezen egyenlőtlenségek nem sérthetőek PPT kötötten összefonódott állapotokkal.

5. Peres-sejtés

Peres mellett: ✓

- Moroder et al. (PRL, 2013) egy numerikus módszert közölt, amely tetszőleges Bell-egyenlőtlenségnek PPT kötötten összefonódott állapotokkal való sértésére ad felső korlátot. Ezen tanulmányban több száz Bell-egyenlőtlenség ilyen módon való sérülését sikerült kizárni.

5. Peres-sejtés

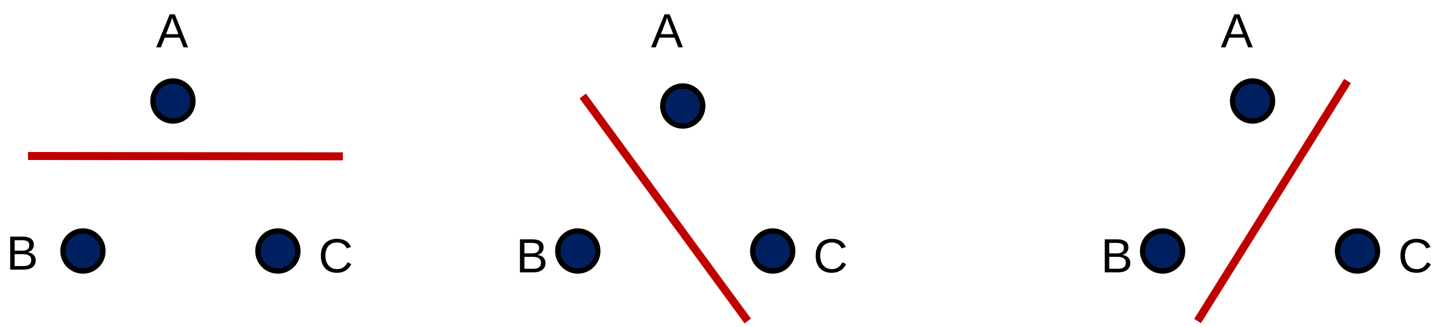
Peres mellett: ✓

- Pusey sejtése (2013): kötötten összefonódott állapotok nem hasznosak az EPR steering (állapotok kormányozhatósága) jelenségében. Az EPR steering a Bell-féle nemlokalitás egy gyengébb formájának tekinthető. Így ezen sejtés a Peres eredeti sejtésénél még erősebb feltételt ad a kötötten összefonódott állapotokkal elérhető korrelációk erősségére.

5. Peres-sejtés

Peres ellen:

Peres sejtése nem igaz három részrendszer esetében:



Egy olyan 3 qubites összefonódott állapotot találtunk, amely minden kétrészű osztásra nézve szeparálható (Vértesi & Brunner, PRL 2012). Emiatt ebből az állapotból nem desztillálható kétrészű összefonódottság.

5. Peres-sejtés

Ugyanakkor megfelelő mérések mellett, ezen 3 qubites állapot sérti az egyik Sliwa-féle Bell-egyenlőtlenséget:

$$\mathrm{Sym}\left[\langle A_1\rangle + \langle A_1 B_2\rangle - \langle A_2 B_2\rangle - \langle A_1 B_1 C_1\rangle - \langle A_2 B_1 C_1\rangle + \langle A_2 B_2 C_2\rangle\right] \leq 3$$

Itt a korrelátorokat a következőképpen definiáltuk:

$$\langle A_x B_y C_z\rangle = \sum_{a,b,c=\pm 1} abc \times P(a,b,c \mid x,y,z)$$

A sértés mértéke: Q = 3.0187. Vagyis a fenti 3 qubites kötötten összefonódott állapot Bell-nemlokális.

5. Peres-sejtés

Peres ellen: ✕

Nem sokkal Pusey 2013-as sejtése után (amely a Peres sejtését erősítette), sikerült azt megcáfolni (Moroder, Gittsovich, Huber, Gühne, PRL, 2014). Egy olyan PPT kötötten összefonódott állapotot találtak, amely sért egy EPR-steering egyenlőtlenséget. Ebben az elrendezésben Bob mérései teljesen karakterizáltak, míg Alice mérései fekete doboznak tekinthetőek (vagyis ez egy hibrid, vagy félig-eszközfüggetlen elrendezés).

6. Ellenpélda

Mit mondhatunk a teljesen eszközfüggetlen esetről, amikor mindkét fél eszközei fekete dobozok? Peres eredeti sejtése erre a kétrészű Bell-féle elrendezésre vonatkozik.

A következő ellenpéldát találtuk. Konkrétan egy 3x3 dimenziós PPT kötötten összefonódott állapotot adtunk meg, amely sért egy kétrészű Bell-egyenlőtlenséget.

[T. Vértesi and N. Brunner: *Disproving the Peres conjecture by showing Bell nonlocality from bound entanglement,* Nat. Commun. 2014]

6. Ellenpélda

A következő ellenpéldát találtuk. Konkrétan egy 3x3 dimenziós PPT kötötten összefonódott állapotot adtunk meg, amely sért egy kétrészű Bell-egyenlőtlenséget.

Az állapot

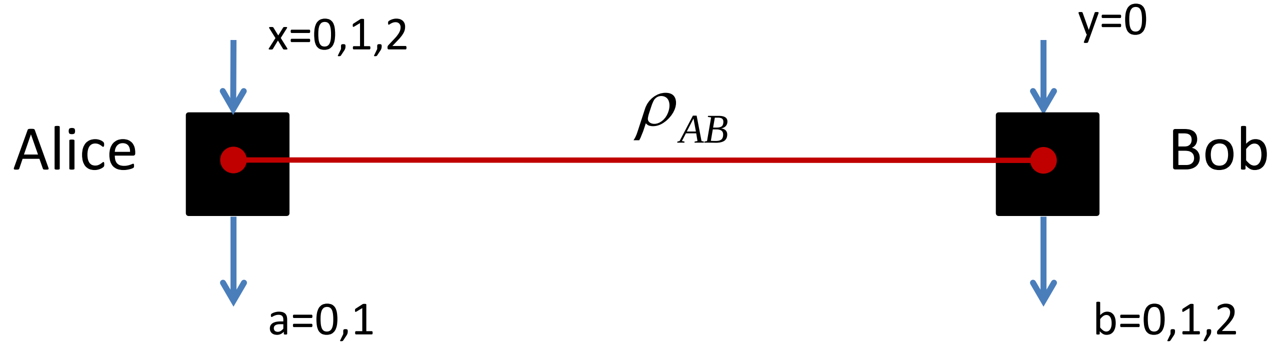
4 rangú: $\rho_{AB} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

Invariáns a PT-műveletre: $\mathrm{PT}(\rho_{AB}) = (\mathrm{I} \otimes T_B)\rho_{AB} = \rho_{AB}$

Ez biztosítja, hogy az állapot PPT és emiatt nem desztillálható. Ezen példa minimális dimenziójú, hiszen 2x3 dimenzióban nem létezik PPT összefonódott állapot.

6. Ellenpélda

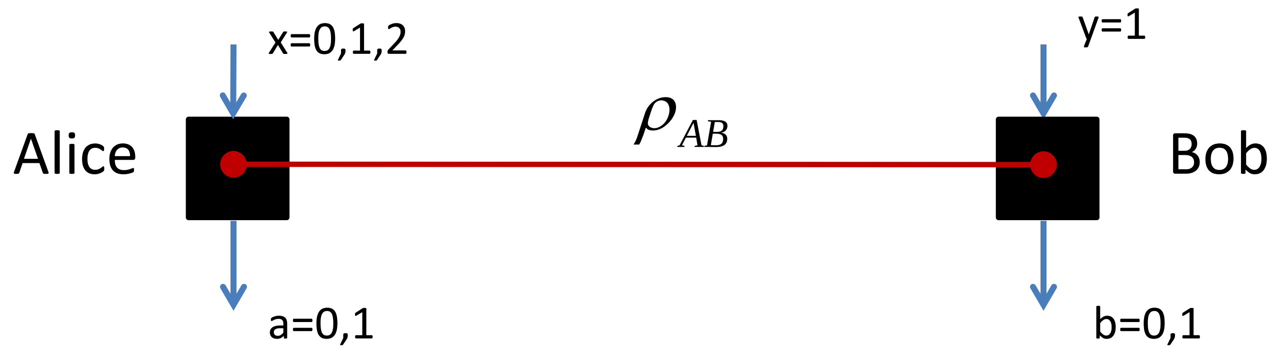
Bell-egyenlőtlenség (S. Pironio, 2014):



P(a,b|x,y)

6. Ellenpélda

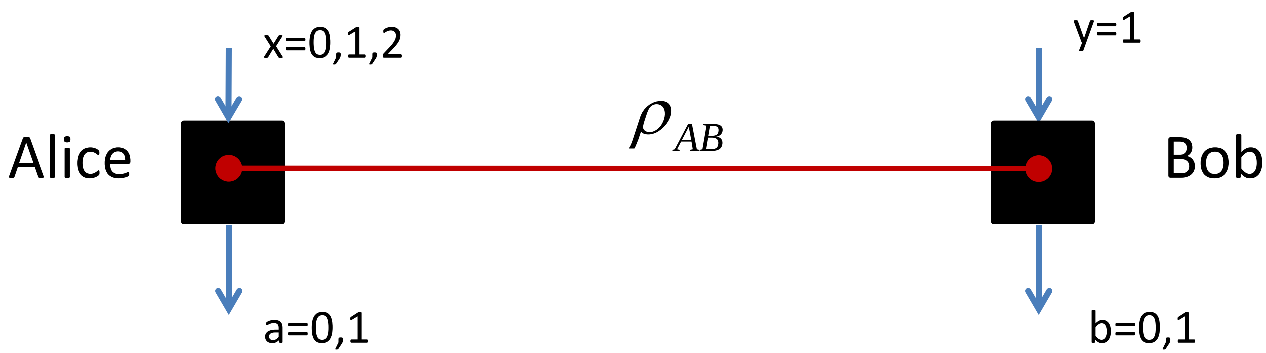
Bell-egyenlőtlenség (S. Pironio, 2014):



P(a,b|x,y)

6. Ellenpélda

Bell-egyenlőtlenség (S. Pironio, 2014):



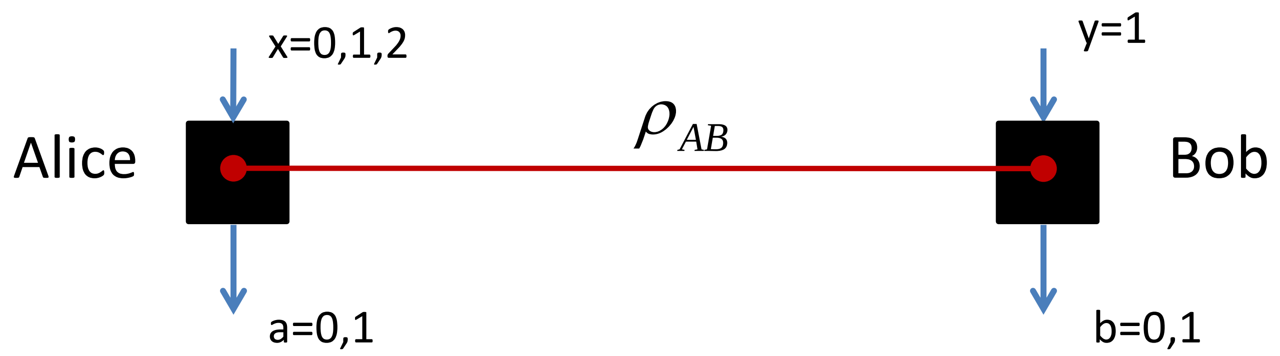
P(a,b|x,y) → Bell-egyenlőtlenség:

$$I = -p_A(0|2) - 2p_B(0|1) - p(01|00) - p(00|10) + p(00|20) \\ + p(01|20) + p(00|01) + p(00|11) + p(00|21)$$

I <= 0 teljesül bármely lokális P(a,b|x,y) eloszlásra.

6. Ellenpélda

Bell-egyenlőtlenség (S. Pironio, 2014):



Kvantumos esetben PPT állapotokkal:

$$P(a,b|x,y) = \mathrm{tr}\left(\rho_{PPT} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$$

$$I_{PPT} = \frac{-3386 + 18\sqrt{42} - 5\sqrt{131} + 45\sqrt{5502}}{43025} \cong 2.63144 \times 10^{-4}$$

6. Ellenpélda

Az előbbi konstrukciónk, amelyre $I_{PPT} \cong 2.63144 \times 10^{-4}$ analitikus (mind a PPT állapot és a mérések is zárt alakban megadhatóak).

A Pironio-féle Bell-egyenlőtlenségre lefuttatva a Moroder et al. SDP algoritmusát a következő felső korlátot kapjuk a PPT állapotokkal a maximális sértésre:

$$I_{PPT}^{\max} \cong 4.8012 \times 10^{-4}$$

Vagyis nincs kizárva, hogy az analitikus eredményünknél egy kicsit nagyobb Bell-sérülés is elérhető egy másik PPT állapottal (esetleg 3x3-nál magasabb dimenziós Hilbert-téren).

6. Ellenpélda

Hogyan találtuk az ellenpéldát?

Vegyünk egy általános kétrészű Bell-kifejezést (*L* lokális korláttal):

$$I = \sum_{a,b,x,y} c_{a,b,x,y} P(a,b \mid x,y) \leq L$$

.

6. Ellenpélda

Hogyan találtuk az ellenpéldát?

Vegyünk egy általános kétrészű Bell-kifejezést (*L* lokális korláttal):

$$I = \sum_{a,b,x,y} c_{a,b,x,y} P(a,b \mid x,y) \leq L$$

A feladatunk ezen kifejezés maximalizálása:

$$I_{PPT} = \sum_{a,b,x,y} c_{a,b,x,y} \mathrm{tr}\left(\rho_{PPT} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$$

a (d x *d)* dimenziós ρ_{PPT} állapotok körében, tetszőleges (*d*-dimenziós) $M_{a|x}$ és $M_{b|y}$ mérési operátorokat megengedve.

6. Ellenpélda

Iteratív eljárás:

$$I_{PPT} = \sum_{a,b,x,y} c_{a,b,x,y} \operatorname{tr}\left(\rho_{PPT} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$$

6. Ellenpélda

Iteratív eljárás:

$$I_{PPT} = \sum_{a,b,x,y} c_{a,b,x,y} \mathrm{tr}\left(\rho_{PPT} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$$

step 0: pick random $\left(M_{a|x}, M_{b|y}\right)$

6. Ellenpélda

Iteratív eljárás:

$$I_{PPT} = \sum_{a,b,x,y} c_{a,b,x,y} \mathrm{tr}\left(\rho_{PPT} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$$

step 0: pick random $\left(M_{a|x}, M_{b|y}\right)$

step 1: $\left(M_{a|x}, M_{b|y}\right) \to \rho_{PPT}$

6. Ellenpélda

Iteratív eljárás:

$$I_{PPT} = \sum_{a,b,x,y} c_{a,b,x,y} \operatorname{tr}\left(\rho_{PPT} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$$

step 0: pick random $\left(M_{a|x}, M_{b|y}\right)$

step 1: $\left(M_{a|x}, M_{b|y}\right) \rightarrow \rho_{PPT}$

step 2: $\left(M_{a|x}, \rho_{PPT}\right) \rightarrow M_{b|y}$

6. Ellenpélda

Iteratív eljárás:

$$I_{PPT} = \sum_{a,b,x,y} c_{a,b,x,y} \operatorname{tr}\left(\rho_{PPT} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$$

step 0: pick random $\left(M_{a|x}, M_{b|y}\right)$

step 1: $\left(M_{a|x}, M_{b|y}\right) \rightarrow \rho_{PPT}$

step 2: $\left(M_{a|x}, \rho_{PPT}\right) \rightarrow M_{b|y}$

step 3: $\left(M_{b|y}, \rho_{PPT}\right) \rightarrow M_{a|x}$

6. Ellenpélda

Iteratív eljárás:

$$I_{PPT} = \sum_{a,b,x,y} c_{a,b,x,y} \mathrm{tr}\left(\rho_{PPT} M_{a|x} \otimes M_{b|y}\right)$$

step 0: pick random $\left(M_{a|x}, M_{b|y}\right)$

step 1: $\left(M_{a|x}, M_{b|y}\right) \to \rho_{PPT}$

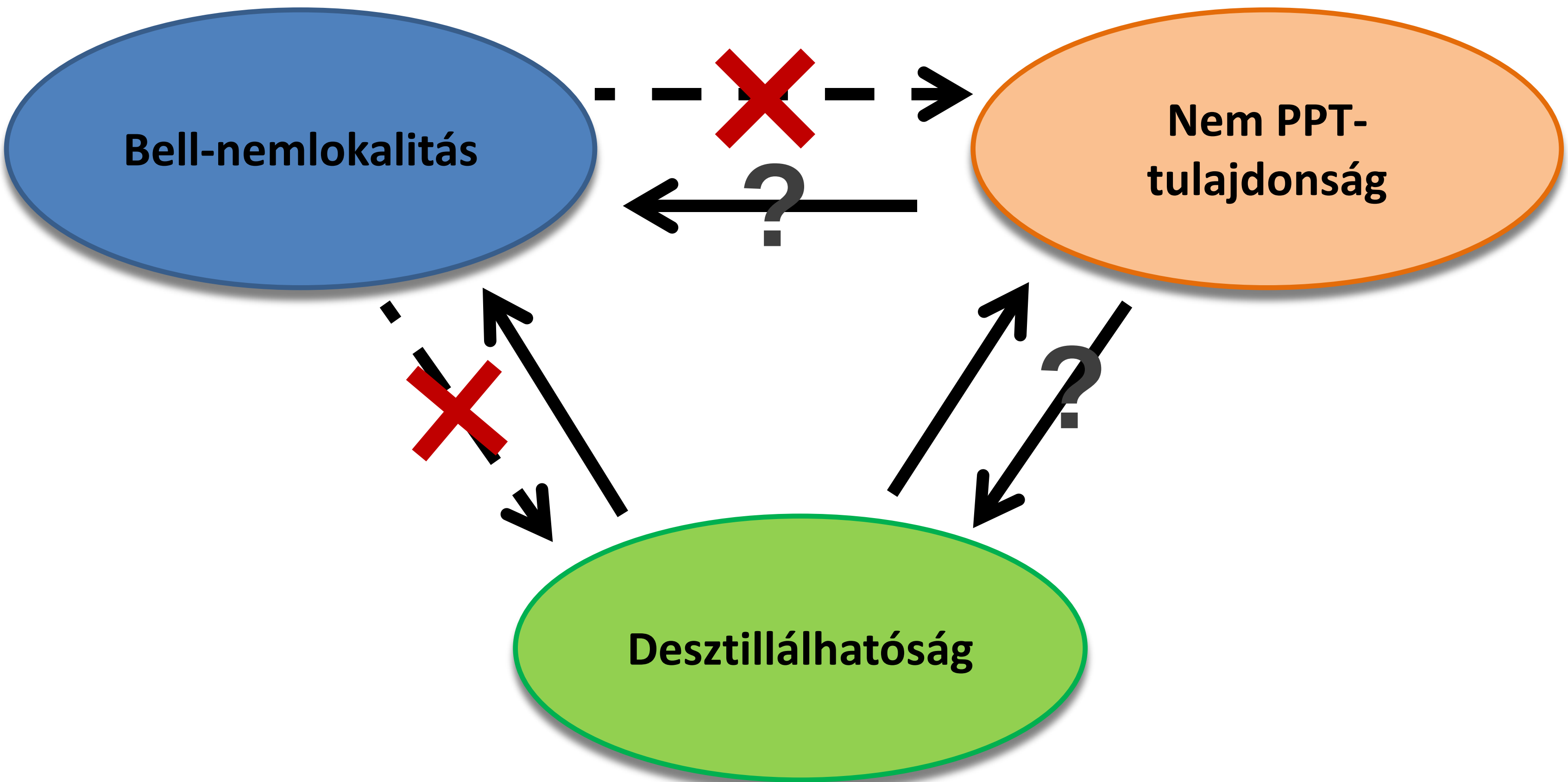
step 2: $\left(M_{a|x}, \rho_{PPT}\right) \to M_{b|y}$

step 3: $\left(M_{b|y}, \rho_{PPT}\right) \to M_{a|x}$

step 4: back to step 1

6. Ellenpélda

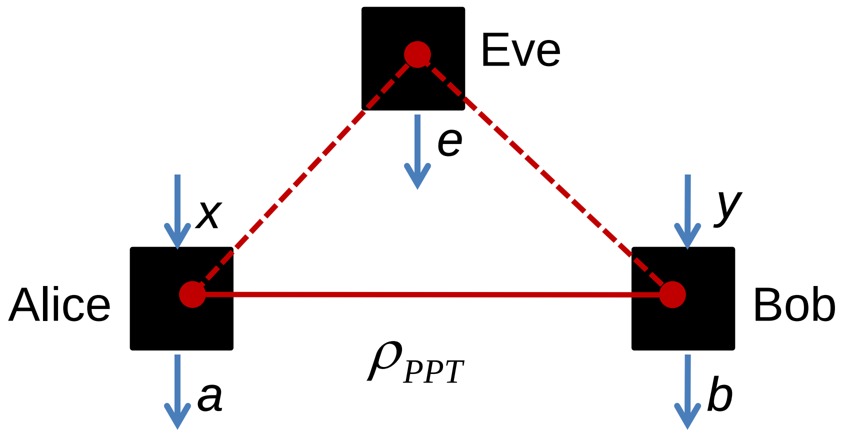
Az összefonódottság három különböző megnyilvánulása közötti kapcsolat:



6. Ellenpélda

Alkalmazási lehetőségek?

• A ρ_{PPT} kötötten összefont állapotunkkal a Pironio-féle Bell-egyenlőtlenséget sértő statisztikából nullánál nagyobb véletlenszerűség nyerhető ki (setup: Pironio et al. 2010):



Adott *x*-re Eve (akinek *e* a kimenetele) nem találhatja el minden esetben Alice (*a*) mérési kimenetelét.

6. Ellenpélda

Alkalmazási lehetőségek?

- Bármely Bell-egyenlőtlenséget sértő statisztikából levezethető egy többszereplős kommunikációs probléma (Buhrman et al, PNAS 2016). Ebből a szempontból a kötötten összefont állapotok a klasszikus erőforrásokhoz képest előnyösek, mivel bizonyos kommunikációs protokollokban csökkenthetik a szükséges klasszikus információátvitel nagyságát.

6. Ellenpélda

Eredmények 3x3-nál magasabb dimenziós nemlokális kötötten összefonódott állapotokra:

Yu és Oh, PRA 2017: *Family of nonlocal bound entangled states*

Yu és Oh tetszőleges $d > 2$ esetén előállít egy PPT kötötten összefonódott d x d dimenziós állapotot, amely Bell-egyenlőtlenséget sért. A $d = 3$ esetén, az állapot és az egyenlőtlenség megegyezik a mienkkel. A konstrukció az ún. Hardy-féle elven alapszik.

6. Ellenpélda

Eredmények 3x3-nál magasabb dimenziós nemlokális kötötten összefonódott állapotokra:

Pál és Vértesi, PRA 2017: *Family of Bell inequalities violated by higher dimensional bound entangled states*

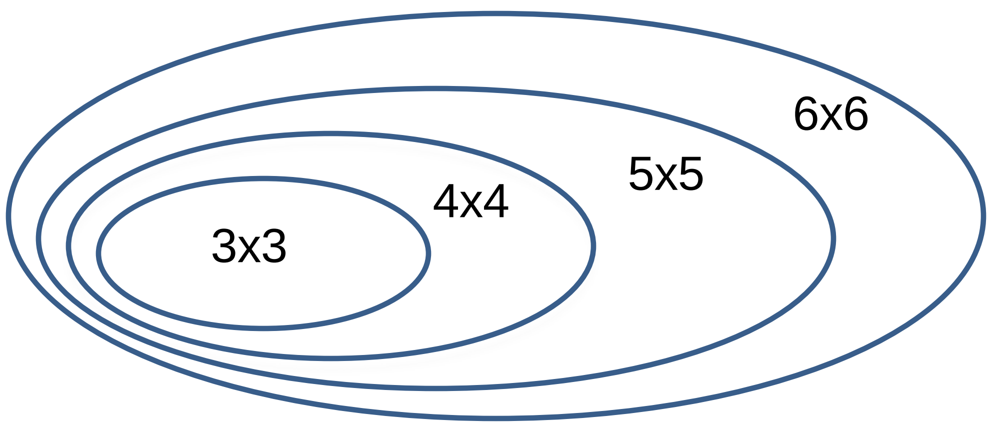
Ebben a cikkben minden véges $d > 2$ dimenzióra találunk egy Bell-egyenlőtlenséget, amely sérthető d x d dimenziós PPT-összefonódott állapotokkal. A konstrukciónk különbözik a Yu-Oh cikkbeli eredménytől. Numerikusan $d = 6$ dimenzióig azt találtuk, hogy ez PPT összefonódott állapotokra egy dimenziótanút határoz meg. Az a sejtésünk, hogy ez az eredmény $d > 6$ dimenzióra is igaz marad.

6. Ellenpélda

Eredmények 3x3-nál magasabb dimenziós nemlokális kötötten összefonódott állapotokra:

A (*d* x *d)* dimenziós PPT-összefonódott állapotokhoz tartozó P(a,b|x,y) korrelációk halmaza adott *d* mellett konvex.

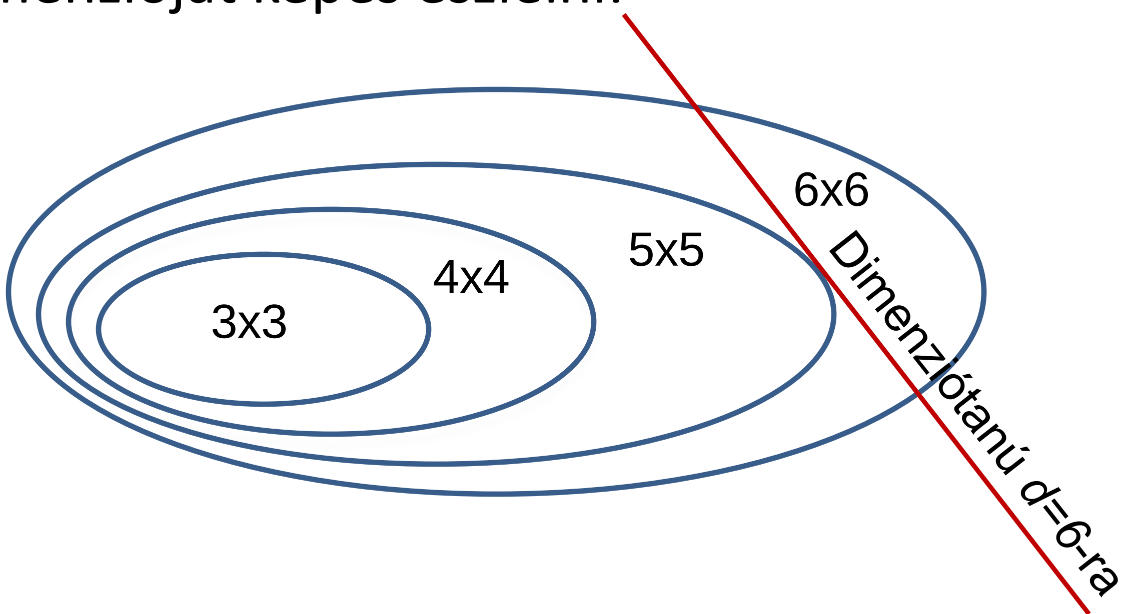
Hagymahéjszerűen egymásba ágyazottak:



6. Ellenpélda

Eredmények 3x3-nál magasabb dimenziós nemlokális kötötten összefonódott állapotokra:

A (*d* x *d)* dimenziós PPT-összefonódott állapotokhoz tartozó P(a,b|x,y) korrelációk halmaza. A Bell-egyenlőtlenségeink olyan hipersíkot határoznak meg, amely PPT-állapotok dimenzióját képes észlelni:



7. Nyitott problémák

Más lehetséges alkalmazások?

• Lehetséges-e PPT kötötten összefonódott állapotokkal kvantumkulcsot előállítani a kvantumkriptográfia eszközfüggetlen keretében?

• Eddigi példákban a sértés mértéke igen kicsi. Elképzelhető-e nagymértékű sértés esetleg magas dimenziós PPT összefonódott állapotokal?

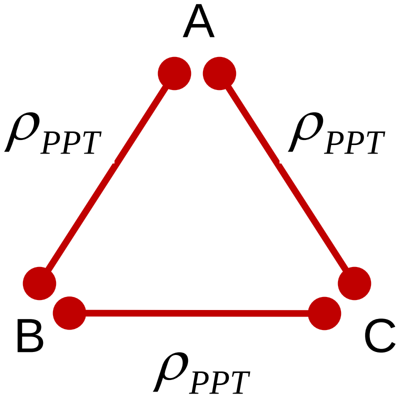
• Van-e kapcsolat a metrológiában hasznos, kriptográfiában hasznos és Bell-nemlokális PPT összefonódott állapotok családjai között?

7. Nyitott problémák

Más lehetséges alkalmazások?

• Többrészű kiterjesztés: Létezik-e olyan (*N* > *2*)-résztvevős teljesen kötötten összefonódott állapot (vagyis PPT minden kétrészű osztásra), amelyre a P(a,b,…|x,y,…) statisztika valódi *N*-részűen nemlokális (Svetlichny-féle értelemben, amely erősebb a Bell-féle nemlokalitásnál)?

Egy lehetséges konfiguráció 3 résztvevőre:



Köszönöm szépen a figyelmet!