1. Az üregsugárzás törvényei

1.1. A Wien féle eltolódási törvény és a Stefan-Boltzmann törvény

Egy zárt, belül üres fémdoboz kis nyílása az úgynevezett abszolút fekete test. A nyílás elektromágneses sugárzást bocsát ki, amely különböző hullámhosszúságú komponenseket tartalmaz. Ha a fémdobozt hevítjük, akkor elegendő magas hőmérsékleten ezt a sugárzást látható fényként is észlelhetjük. A kibocsátott sugárzás (fény) energiájának a hullámhossz vagy (frekvencia) szerinti folytonos eloszlását az üreg azaz a fekete test spektrumának nevezzük.

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mod6.html#c1

http://webphysics.davidson.edu/Applets/BlackBody/BlackBody.html

Az üreg által T hőmérsékleten kibocsátott sugárzás spektrumában, (amelynek alakját a fönti ábra mutatja) a λ hullámhossztól való függés maximumának helyét a Wien féle eltolódási törvény adja meg:

$$\lambda_{\max} T = b = 2,9 \cdot 10^{-3} m \cdot K = 2,9 \cdot 10^{6} nm \cdot K \tag{1.1}$$

A teljes kisugárzott teljesítményt a Stefan-Boltzmann féle törvény adja meg

$$P = \sigma A T^4, \tag{1.2}$$

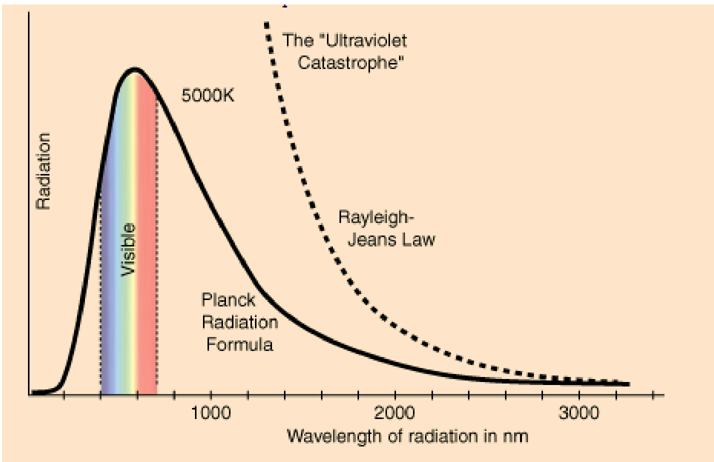
ahol $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/m^2 K^4$ egy állandó, A pedig a sugárzó felülete. Ez a törvény jó közelítéssel érvényes számos olyan test (tehát nem csak egy üreg) esetében is amikor az a hőmérséklete miatt sugároz. A hőmérskleti sugárzás akkor lép föl, amikor a a test energiája nagyszámú belső szabadsági foka között oszlik meg, és ez az energia elektromágneses hullámok formájában elhagyja a testet. Ilyen hőmérsékleti sugárzó pl. egy wolframizzó, vagy a Nap, vagy a csillagok.

1.1 Mennyi energiát sugároz ki másodpercenként egy tízforintos szobahőmérsékleten (20C-on)? A méreteit mérjük meg!
1.2 Mekkora térfogatú levegőnek van ennyi belső energiája?

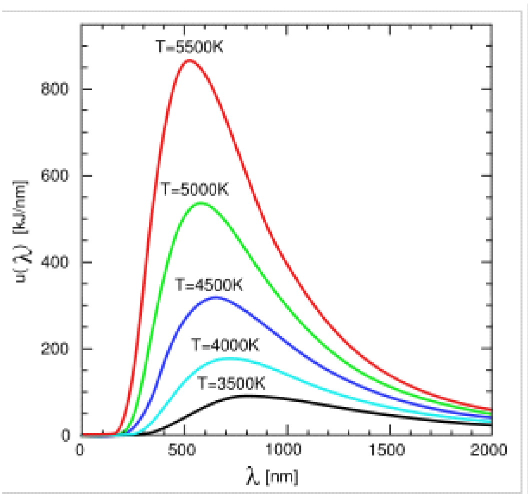
1.2. A hullámhossz szerinti eloszlás magyarázata.

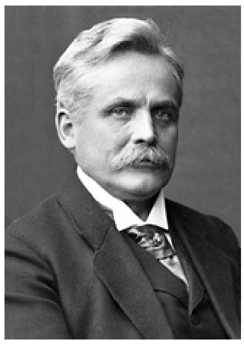
Az üregben elektromágneses állóhullámok alakulnak ki. Egy ilyen, adott hullámhosszú állóhullámot hullámmódusnak vagy csak egyszerűen *módusnak* nevezünk. A módus jellemzésére a λ hullámhossz helyett helyett a fényhullámra vagy általában elektromágneses hullámra gyakran a ν frekvenciát használjuk:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} (= f) \tag{1.3}$$



1. ábra. A fekete test által kisugárzott intenzitás hullámhossz szerinti eloszlása





Wilhelm Wien 1864-1928
Nobel díj 1911

2. ábra.

Jozef Stefan 1879
megmérte

Ludwig Boltzmann, 1884
kiszámította

3. ábra.

Megjegyezzük, hogy ha nem vákuumban, hanem valamilyen közegben tekintünk egy ilyen hullámot a ν ugyanaz, λ viszont változik, mert közegben a fénysebesség (fázissebesség) is más:

$$\lambda = \frac{c_k}{\nu} \tag{1.4}$$

Egy további mennyiség a módus jellemzésésre annak körfrekvenciája:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda} = kc. \tag{1.5}$$

A frekvencia vagy a körfrekvencia megadása azonban nem jellemzi a módust egyértelműen, sok ugyanolyan frekvenciájú módus lehetséges attól függően, hogy milyen irányban alakul ki az állóhullám. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan függ az üregben lévő elektromágneses energia térfogati sűrűsége a a ν frekvenciától. Az első lépésben Lord Rayleigh elgondolását követjük aki a 19. sz. legvégén föltette, hogy egy egy módus, azaz állóhullám tulajdonképpen egy harmonikus rezgést végző test azaz egy harmonikus oszcillátor Valóban, egy módust kiválasztva az egy rezgő objektumnak tekinthető, amelyben az elektromos és a mágneses mező az adott frekvenciával rezeg. A rezgéshez tartozó energia két részből, az elektromos és a mágneses mező energiájából áll össze, hasonlóan ahhoz, ahogyan egy mechanikai oszcillátor (egy rugón rezgő test) energiája is két részből áll, a mozgási és a rugalmas energiából. Az üregben lévő energia a módusok energiájának összege, ahhoz hogy ezt kiszámítsuk két dologra van szükség. Meg kell edni, hogy egy oszcillátornak, azaz egy módusnak mennyi az energiája és hogy hány módus van az üregben. Ez utóbbiak száma függ az üreg térfogatától, de a térfogategységben és $d\nu$ frekvenciaintervallumon a módusok száma, amelyet itt számítás nélkül közlünk:

$$g(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu, \tag{1.6}$$

már nem. A V térfogatú üregben a módusok száma $g(\nu)V$, a számítás részletei a statisztikus fizikai illetve a kvantumoptikai könyvekben találhatók meg.

Az egyes módusok energiája általában különböző és ezért az energia értékének eloszlását, vagy annak csak az átlagát tudjuk memondani. A módusok érintkezésben vannak az üreg falával, azon keresztül egymásnak energiát adhatnak át és így hőmérsékleti egyensúlyba kerülnek. Az átlagos energiát az elemi statisztikus fizikából ismert módon adta meg Rayleigh. Eszerint hőmérsékleti egyensúlyban, adott T hőmérsékleten egy oszcillátormódusra, amely két szabadsági fokkal, jelen esetben egy elektromos és egy mágneses energiával bír

$$\bar{\varepsilon} = k_B T \tag{1.7}$$

energia jut átlagosan (ekvipartíció törvénye), ahol k_B a Boltzmann állandó:

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\ J/K, \tag{1.8}$$

A föntiekből a mező energiasűrűsége (energia/térfogat) a $d\nu$ frekvenciaintervallumon:

$$u_R(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_B T\, d\nu, \tag{1.9}$$

Ennek az összefüggésnek a neve Rayleigh-Jeans törvény, amely azonban csak alacsony frekvencián bizonyult helyesnek, mivel adott T-nél a ν monoton (négyzetesen) növekvő függvénye, míg a kísérletek szerint ez a függés egy ponton maximumot ér el, majd megfordul és közelítőleg exponenciálisan csökkenni kezd. Ezt az ellentmondást "ultraibolya katasztrófának" szokás nevezni, mert a ν^2-el arányosan növekvő energiasűrűség elvileg is lehetetlen. A teljes energiasűrűség ugyanis az összes frekvenciára vett az energiasűrűség integrálja: $\int_0^\infty u_R(\nu)d\nu$, ami a ν^2- es függés miatt végtelen nagynak adódik.

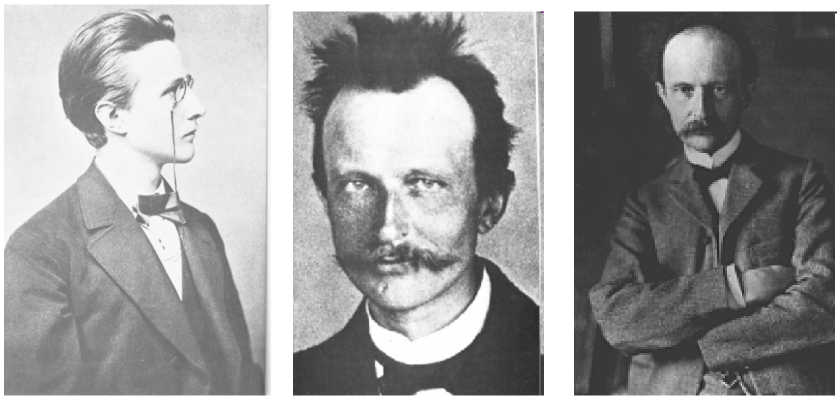
Planck rájött (1900), hogy ha fölteszi, hogy az egyes állóhullámok (oszcillátorok) az energiát csak diszkrét adagokban, kvantumokban adhatják át egymásnak, s ezen adagok nagysága egy ν frekvenciájú rezgés esetén

$$\varepsilon = h\nu \tag{1.10}$$

ahol h egy állandó (Planck állandó), akkor az ekvipartíció $\bar{\varepsilon} = k_B T$ törvénye már nem lesz nem érvényes, és levezethető, hogy egy oszcillátorra ilyenkor átlagosan

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}h\nu \tag{1.11}$$

Max Planck 1858-1947



1878 1901 1925

1918 évi Nobel díj 1919

4. ábra.

energia jut.

Ebből az üregsugárzás energiasűrűsége:

$$u_P(\nu)d\nu = g(\nu)\bar{\varepsilon}d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT} - 1}d\nu \qquad (1.12)$$

Az üregből a kis lyukon kilépő sugárzás teljesítménye hullámhossz illetve és frekvenciafüggését is ez a formula szabja meg, mert az üregből kisugárzott intenzitás az üregben lévő energiával arányos. A felületegységen időegység alatt átsugárzott energia, másnéven teljesítménysűrűség

$$I(\nu, T) = \frac{c}{4}u_P(\nu) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT} - 1}. \qquad (1.13)$$

ahol a $c/4$ együttható geometriai emggondolásokból következik. Ez a Planck féle sugárzási törvény.

Lummer, Pringsheim és Rubens az üregsugárzás spektrumának kísérleti görbéivel összehasonlítva azt találták, hogy a függvény menete tökéletesen egyezett a fönti képlettel. A mérési eredményekkel összevetve a h nagyságát Planck meg tudta határozni, melynek mai értéke:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ Js$$

A fönti képletek részletesebb levezetésére ld. pl.
Hevesi, Szatmári Bevezetés az Atomfizikába, vagy
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/mod6.html#c1

1.3. feladat: Az elméleti fizikában a rezgések és hullámok leírásánál a frekvencia helyett gyakran a körfrekvenciát használjuk, melynek definíciója $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda} = kc$. *Írjuk föl az energiasűrűséget,* ν *helyett* ω*-val, azaz adjuk meg* $u(\omega)d\omega$*-t (majdnem triviális) és használjuk itt a szokásos*

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

jelölést. $\hbar$ *értéke:*

$$\hbar = 1.06 \cdot 10^{-34}\ Js$$

1.4 feladat. Írjuk föl az energiasűrűséget, ν *helyett* λ*-val, azaz adjuk meg* $u(\lambda)d\lambda$*-t. Ez egy kissé kevésbé triviális.*

1.5 feladat. Mutassuk meg, hogy kis frekvenciákon a Planck törvényből viszszakapjuk a Rayleigh-Jeans törvényt. Mit jelent kvantitatíve (mennyiségileg) a "kis" frekvencia?

1.6 feladat. Milyen törbény szerint változik közelítőleg "nagy" frekvenciákon az energiasűrűség. Ez utóbbit nevezzük Wien féle sugárzási törvénynek, amelyet Wien még Planck előtt talált termodinamikai meggondolásoól.

1.7 feladat. Vezessük le a Wien féle eltolódási törvényt, azaz a 4. feladatban kapott eredményből, azaz számítsuk ki az $u(\lambda)$ *függvény maximumának helyét, és számítsuk ki a b állandót.*

1.8 feladat Vezessük le a Stefan-Boltzmann törvényt a Planck törvény $I(\nu)$*-re vonatkozó alakjának frekvencia szerinti integrálásával. Itt használjuk az* $\int_0^\infty \xi^3(e^\xi - 1)^{-1}d\xi = \frac{\pi^4}{15}$ *integrálformulát. Határozzuk meg ennek alapján a Stefan-Boltzmann állandót.*