Kvantummechanika 1.
Feladatok

1. A Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással készítsünk ortonormált bázist a következő vektorokból:

$$|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |v_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad |v_3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Tekintsük a négyzetesen integrálható függvények terét (L^2)! Igazoljuk, hogy az alábbi módon definiált ún. koordinátaoperátor (X) és impulzusoperátor (P_x) önadjungált. Igazoljuk továbbá, hogy $[X, P_x] = i\hbar$.

$$X\psi(x) = x\psi(x), \qquad P_x\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}, \qquad \psi(x) \in L^2.$$

Kvantummechanika 1.
Házi feladatok 5.
Elérhető pontszám: 10p
Beadási határidő: okt. 8.

1. A $P^2_{[-1,1]}$ másodfokú polinomok terén $\{1, x, x^2\}$ bázist alkot az $\langle a|b\rangle = \int\limits_{-1}^{1} a(x)\, b(x)\, dx$ skaláris szorzatra. Ebből kiindulva keressünk egy ortonormált bázist. (A Gram-Schmidt-féle ortogonalizálási eljárással megkapjuk az első három ún. normált Legendre-polinomot.) (3p)

2. Legyen $K_\lambda : L^2 \longrightarrow L^2$, $f(x) \longmapsto f(\lambda x)$, ahol $\lambda \in \mathbf{R}$. Igazolandó, hogy $K^\dagger_\lambda = \frac{1}{\lambda}K_{\frac{1}{\lambda}}$! Az így definiált operátor önadjungált-e, unitér-e? (2p)

3. Tekintsük a $[-1, 1]$ intervallumon akárhányszor folytonosan differenciálható, a határokon eltűnő függvényeket, a szokásos ($\langle f|g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f^*(x)\, g(x)\, dx$) skalárszorzattal. Milyen α és β számokra lesznek az $\alpha\frac{d}{dx}$ és $\beta\frac{d^2}{dx^2}$ operátorok önadjungáltak? (2p)

4. Legyen $\hat{A}$ önajungált operátor a V vektortéren. Bizonyítsuk be, hogy minden $\phi \in V$-re $\left\langle\phi|\hat{A}\phi\right\rangle$ valós, valamint $\left\langle\phi|\hat{A}^2\phi\right\rangle \geq 0$! (1p)

5. Bizonyítandó, hogy $u_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ és $u_2(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ sajátvektorai az $A = \frac{d^2}{dx^2} - x^2$ operátornak. Milyen sajátértékek tartoznak hozzájuk? (1p)

6. Bizonyítsuk be, hogy $\left[\frac{d}{dx}, x^n\right] = nx^{n-1}$. (Megjegyzés: ebben a feladatban az operátorok alkalmas függvények terén hatnak, a differenciáloperátor értelemszerűen differenciál, az x operátor pedig az eredeti függvény x-szeresét adja) (1p)