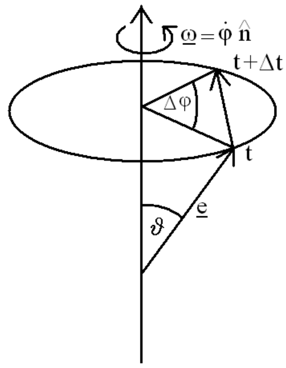
4. Gyorsuló-forgó vonatkoztatási rendszerek

4.1. Előkészítés

Forgó egységvektor idNew-deriváltja:



$$\frac{|\Delta\vec{e}|}{\Delta t}\approx|\vec{e}|\cdot\sin(\vartheta)\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$|\dot{\vec{e}}|=|\vec{e}|\cdot|\vec{\omega}|\cdot\sin(\vartheta)=\sin(\vartheta)\cdot\dot{\varphi}$$

$$\boxed{\dot{\vec{e}}=\vec{\omega}\times\vec{e}}$$

Változási ütem forgó rendszerben:
(K' tengelyei forognak a K rendszerhez képest)

$$\frac{d}{dt}\cdot\vec{e}\,'_1=\vec{\omega}\times\vec{e}\,'_1$$

$$\vec{A}=\sum_{k=1}^{3}A_k\cdot\vec{e}_k=\sum_{i=1}^{3}A'_i\cdot\vec{e}\,'_i$$

Az $\vec{A}$ változási üteme K-ban:

$$\dot{\vec{A}}^{(K)}=\sum\dot{A}_k\cdot\vec{e}_k=\sum\dot{A}'_i\cdot\vec{e}\,'_i+A'_i\cdot\dot{\vec{e}}\,'_i=\dot{\vec{A}}^{(K')}+\sum_{i=1}^{3}A'_i\cdot(\vec{\omega}\times\vec{e}\,'_i)=\dot{\vec{A}}^{(K')}+\vec{\omega}\times\vec{A},$$

ahol $\dot{\vec{A}}^{(K')}$ az $\vec{A}$ változási üteme K'-ben.

4.2. Kinematika

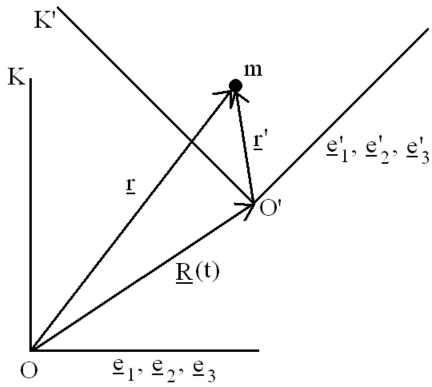
A tömegpont helye K-ban, illetve K'-ben:

$$\boxed{\vec{r}=\vec{R}+\vec{r}\,'}$$

A sebesség a K-ban ülő megfigyelő szerint:

$$\left(\vec{v}^{(K)}=\right)\dot{\vec{r}}^{(K)}=\dot{\vec{R}}^{(K)}+\dot{\vec{r}}\,'^{(K)}$$

$$\vec{v}=\vec{V}_{O'}+\underbrace{\dot{\vec{r}}\,'^{(K')}}_{\vec{v}\,'}+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$



$$\boxed{\vec{v}=\vec{V}_{O'}+\vec{v}\,'+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'}$$

ahol $\vec{v}\,'$ a sebesség a K'-beli megfigyelő szerint.
(Feltesszük, hogy az idő üteme K-ban és K'-ben megegyezik.)
A gyorsulás a K-ban illetve K'-ben ülő megfigyelő szerint:

$$\dot{\vec{v}}^{(K)}=\dot{\vec{V}}^{(K)}_{O'}+\dot{\vec{v}}\,'^{(K)}+\dot{\vec{\omega}}^{(K)}\times\vec{r}\,'+\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}\,'^{(K)}$$

$$\vec{a}=\vec{a}_{O'}+\underbrace{\dot{\vec{v}}\,'^{(K')}}_{\vec{a}\,'}+\vec{\omega}\times\vec{v}\,'+\vec{\omega}\times(\underbrace{\dot{\vec{r}}\,'^{(K')}}_{\vec{v}\,'}+\vec{\omega}\times\vec{r}\,')+\dot{\vec{\omega}}^{(K)}\times\vec{r}\,'$$

$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}_{O'}+\vec{a}\,'+2\cdot\vec{\omega}\times\vec{v}\,'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'}$$

4.3. Dinamika

Ha K inerciarendszer, akkor $\vec{F}=m\cdot\vec{a}$

$$\vec{F}=m\cdot\vec{a}_{O'}+m\cdot\vec{a}\,'+2\cdot m\cdot\vec{\omega}\times\vec{v}\,'+m\cdot\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')+m\cdot\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'$$

$$m\cdot\vec{a}\,'=\vec{F}-\underbrace{m\cdot\vec{a}_{O'}}_{\substack{Euler\\ erő}}-\underbrace{2\cdot m\cdot\vec{\omega}\times\vec{v}\,'}_{\substack{Coriolis\\ erő}}-\underbrace{m\cdot\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,')}_{\substack{centrifugális\\ erő}}-\underbrace{m\cdot\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'}_{\substack{Euler\\ erő}}$$

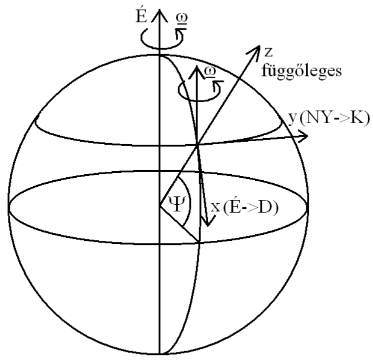
tehetetlenségi, vagy inerciaerők

Feltesszük, hogy a K-beli és a K'-beli megfigyelő ugyanakkora tömeget mér.
Mivel egyetlen koordináta rendszerünk van (a K'), ezért a továbbiakban a vesszőket elhagyjuk.

$$\boxed{m\cdot\ddot{\vec{r}}=\vec{F}-m\cdot\vec{a}_{O'}-2\cdot m\cdot\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}-m\cdot\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})-m\cdot\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}$$

Forgó rendszerben ez a mozgásegyenlet.

4.4. Mozgások a forgó Földön



$$\omega=\frac{2\cdot\pi}{1\ nap}=\frac{2\cdot\pi}{86400\ s}\sim 7{,}3\cdot 10^{-5}\ \frac{1}{s}$$

$\omega\cdot t\ll 1$ kicsiny, ω változását elhanyagoljuk: $\dot{\vec{\omega}}=0$

A Földön minden testre hat a Föld gravitációs ereje:
$\vec{F}=\vec{F}_{grav.}+\vec{K}$

A gravitációs és a centrifugális erő eredőjét nehézségi erőnek nevezzük (súly):
$m\cdot\vec{g}=\vec{F}_{grav.}-m\cdot\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$
(Súlyos és tehetetlen tömeg!)

$\boxed{m\cdot\ddot{\vec{r}}=m\cdot\vec{g}-2\cdot m\cdot\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}+\vec{K}}$ mozgásegyenlet (K az egyéb erőket jelöli)

A forgó Földhöz rögzített koordináta rendszer:
- x-tengely: $É\ \rightarrow\ D$ (a hosszúsági kör érintője)
- y-tengely: $NY\ \rightarrow\ K$ (a Ψ szélességi kör érintője)
- z-tengely: függőlegesen felfelé

$\vec{\omega}(-\omega\cdot\cos(\Psi);\ 0;\ \omega\cdot\sin(\Psi));\ \ \vec{g}(0;\ 0;\ -g)$

Emlékeztető:

$$\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -\omega\cdot\cos(\Psi) & 0 & \omega\cdot\sin(\Psi)\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}$$

$$\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}=(-\omega\cdot\sin(\Psi)\cdot\dot{y};\ \omega\cdot\cos(\Psi)\cdot\dot{z}+\omega\cdot\sin(\Psi)\cdot\dot{x};\ -\omega\cdot\cos(\Psi)\cdot\dot{y})$$

Mozgásegyenlet a forgó Földön az adott koordinátarendszerben:

$$\boxed{\begin{aligned} m\cdot\ddot{x} &= 2\cdot m\cdot\omega\cdot\sin(\Psi)\cdot\dot{y}+K_x\\ m\cdot\ddot{y} &= -2\cdot m\cdot\omega\cdot(\cos(\Psi)\cdot\dot{z}+\sin(\Psi)\cdot\dot{x})+K_y\\ m\cdot\ddot{z} &= -m\cdot g+2\cdot m\cdot\omega\cdot\cos(\Psi)\cdot\dot{y}+K_z \end{aligned}}$$

Példák:

Szabadesés: $t=0$: $z=h$; $x=y=0$; $\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0$

$$m\cdot\ddot{\vec{r}}=m\cdot\vec{g}-2\cdot m\cdot\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$$
$$\ddot{\vec{r}}=\vec{g}-2\cdot\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$$
$$\ddot{x}=2\cdot\omega\cdot\sin(\Psi)\cdot\dot{y} \quad\rightarrow\quad \dot{x}=2\cdot\omega\cdot\sin(\Psi)\cdot y+\alpha$$
$$\ddot{y}=-2\cdot\omega\cdot(\cos(\Psi)\cdot\dot{z}+\sin(\Psi)\cdot\dot{x}) \quad\rightarrow\quad \dot{y}=-2\cdot\omega(\cos(\Psi)\cdot z+\sin(\Psi)\cdot x)+\beta$$
$$\ddot{z}=-g+2\cdot\omega\cdot\cos(\Psi)\cdot\dot{y} \quad\rightarrow\quad \dot{z}=-g\cdot t+2\cdot\omega\cdot\cos(\Psi)\cdot y+\gamma$$

Speciálisan szabadesésnél: $\alpha=\beta=\gamma=0$

$$\ddot{y}=-2\cdot\omega\cdot\left[\cos(\Psi)\cdot\left(-g\cdot t+2\cdot\omega\cdot\cos(\Psi)\cdot y\right)+\sin(\Psi)\cdot 2\cdot\omega\cdot\sin(\Psi)\cdot y\right]=$$
$$=-\left(2\cdot\omega\right)^2\cdot y+\left(2\cdot\omega\cdot g\cos(\Psi)\right)\cdot t$$

A fokozatos közelítések módszere:

$$x=x_0(t)+\omega\cdot x_1(t)+\omega^2\cdot x_2(t)+\ldots$$
$$y=y_0(t)+\omega\cdot y_1(t)+\omega^2\cdot y_2(t)+\ldots$$
$$z=z_0(t)+\omega\cdot z_1(t)+\omega^2\cdot z_2(t)+\ldots$$
$$\dot{x}=\dot{x}_0+\omega\cdot\dot{x}_1+\ldots$$
$$\ddot{x}_0+\omega\cdot\ddot{x}_1+\omega^2\cdot\ddot{x}_2+\ldots=2\cdot\omega\cdot\sin(\Psi)\cdot\left(\dot{y}_0+\omega\cdot\dot{y}_1+\ldots\right)$$
$$\ddot{y}_0+\omega\cdot\ddot{y}_1+\omega^2\cdot\ddot{y}_2+\ldots=-2\cdot\omega\cdot\left[\cos(\Psi)\cdot\left(\dot{z}_0+\omega\cdot\dot{z}_1+\ldots\right)+\sin(\Psi)\cdot\left(\dot{x}_0+\omega\cdot\dot{x}_1+\ldots\right)\right]$$
$$\ddot{z}_0+\omega\cdot\ddot{z}_1+\omega^2\cdot\ddot{z}_2+\ldots=-g+2\cdot\omega\cdot\cos(\Psi)\cdot\left(\dot{y}_0+\omega\cdot\dot{y}_1+\ldots\right)$$
$$\ddot{x}_0+\omega\cdot\left(\ddot{x}\right)+\omega^2\cdot()+O(\omega^3)=0$$

Nulladrendben és elsőrendben:

$$\ddot{x}_0=0 \qquad \ddot{x}_1=2\cdot\sin(\Psi)\cdot\dot{y}_0 \qquad =2\cdot\sin(\Psi)\cdot 0=0$$
$$\ddot{y}_0=0 \qquad \ddot{y}_1=-2\cdot\cos(\Psi)\cdot\dot{z}_0-2\cdot\sin(\Psi)\cdot\dot{x}_0 \qquad =-2\cdot\cos(\Psi)\cdot(-g)\cdot t+0=2\cdot g\cdot t\cdot\cos(\Psi)$$
$$\ddot{z}_0=-g \qquad \ddot{z}_1=2\cdot\cos(\Psi)\cdot\dot{y}_0 \qquad =2\cdot\cos(\Psi)\cdot 0=0$$

Kezdőfeltételből:

$$\dot{x}_0=\alpha=0 \qquad \dot{x}_1=\alpha'=0$$
$$\dot{y}_0=\beta=0 \qquad \dot{y}_1=g\cdot\cos(\Psi)\cdot t^2+\beta'=g\cdot\cos(\Psi)\cdot t^2$$
$$\dot{z}_0=-g\cdot t+\gamma=-g\cdot t \qquad \dot{z}_1=\gamma'=0$$

Nulladrendű megoldás:

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= \alpha=0\\ y_0 &= \beta=0\\ z_0 &= -\frac{g}{2}\cdot t^2+\gamma=-\frac{g}{2}\cdot t^2+h \end{aligned}}$$

Elsőrendű korrekció:

$$x_1 = \alpha'' = 0$$

$$y_1 = \frac{g \cdot \cos(\Psi)}{3} \cdot t^3 + \beta'' = \frac{g \cdot \cos(\Psi)}{3} \cdot t^3$$

$$z_1 = \gamma'' = 0$$

Elsőrendű megoldás:

$$x = x_0 + \omega \cdot x_1 = 0 + \omega \cdot 0 = 0$$

$$y = 0 + \frac{\omega \cdot g \cdot \cos(\Psi) \cdot t^3}{3} > 0$$ (a függőlegestől kelet felé tér el)

$$z = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + h + 0$$

$h = 100\ m;\ \ \Psi = 45°$-nál a függőlegestől eltér $1{,}5\ cm$-t

További példák:

1. Az északi féltekén „a folyók a jobb partjukat mossák”
2. A nyugatról keletre haladó testek a talajt súlyuknál kevésbé, a keletről nyugatra haladók pedig jobban nyomják (Eötvös-effektus)
3. A Foucault-féle ingakísérlet: az északi féltekén lengő inga lengési síkja észak-kelet-dél irányban elfordul $\omega \cdot \sin(\Psi)$ szögsebességgel, a déli féltekén fordítva http://demonstrations.wolfram.com/FoucaultsPendulum/
4. A Föld forgásának hatása a nagy lég- és vízáramlatokra http://en.wikipedia.org/wiki/Coriolis_effect#Coriolis_in_meteorology

4.5. Feladatok

4.5.1. Egy cső egyik végpontja körül vízszintes síkban állandó ω szögsebességgel forog. A csőben egy m tömegű golyó a forgástengelytől r_0 távolságra van. A csőhöz viszonyított kezdősebessége 0. Határozzuk meg
a) a golyó súrlódás nélküli mozgását a csőhöz képest!
b) a golyó által a csőre gyakorolt erőt vízszintes komponensét!

4.5.2. Súlytalan pálcán egy gyöngyszem szabadon mozoghat. A pálcát egy rá merőleges vízszintes tengely körül ω szögsebességgel forgatjuk.
a) Írjuk fel a tömegpont mozgásegyenletét a rúddal együtt forgó koordinátarendszerben!
b) Oldjuk meg a mozgásegyenletet tetszőleges kezdőfeltételekkel!
c) Milyen kezdősebességgel lökje ki a forgástengelytől a rúddal együtt forgó megfigyelő a gyöngyszemet, hogy az számára harmonikus rezgőmozgást végezzen?

4.5.3. A forgó Földön egy ψ északi szélességű pontból nem túl nagy v_0 kezdősebességgel függőlegesen feldobunk egy m tömegű testet. Hol fog leesni? (A közegellenállást hanyagoljuk el!)

4.5.4. Egy autó mozog vízszintesen egyenletes sebességgel először keletre, majd nyugatra. Mikor lesz nagyobb a súlya? Becsüljük meg a súlykülönbséget, ha a mozgás a 45° északi szélességi kör mentén zajlik, az autó tömege 1000 kg, sebessége 10 m/s!