# Newtoni posztulátumok és értelmezésük

Mértékegységek:

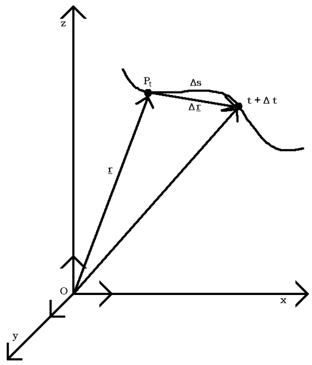
- Méter: annak az útnak a hossza, melyet a fény vákuumban $\frac{1}{299\ 792\ 458}$ másodperc alatt tesz meg.
- Másodperc: a 133-as tömegszámú, alapállapotú céziumatom két hiperfinom energiaszintje közti átmenetnek megfelelő sugárzás $9\ 192\ 631\ 770$ periódusának időtartama.
- Kilogramm: a Sévres-ben őrzött platina-iridium henger tömege

Posztulátumok: Newton – Principia Mathematica Phylosophiae Naturalis (1687)

1. Minden test megtartja nyugalmi állapotát, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, míg valamilyen külső hatás ennek megváltoztatására nem kényszeríti.
2. A mozgásmennyiség változása arányos az erő hatásával és az erő hatásának irányában történik
3. A hatás egyenlő az ellenhatással, vagyis két test hatása egymásra egyenlő és iránya ellentétes

Értelmezés:

1. Jelentés: van olyan vonatkoztatási rendszer (koordináta rendszer), melyben igaz az első posztulátum. Az ilyen rendszer az inerciarendszer:
    1. Helyzet: a tér 3 dimenziós euklideszi tér; a helyzet megadásához három adat kell. Pl.: Descartes-derékszögű koordináták: $(x, y, z);$ helyvektor: $\vec{r}=\vec{OP};$ origó + bázisvektorok: $0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3 \Rightarrow \vec{r}=x\cdot\hat{e}_1+y\cdot\hat{e}_2+z\cdot\hat{e}_3$
    Mozgás: $t \rightarrow \vec{r}=\vec{r}(t)$ a hely ismerete az idő függvényében $(x, y, z)$



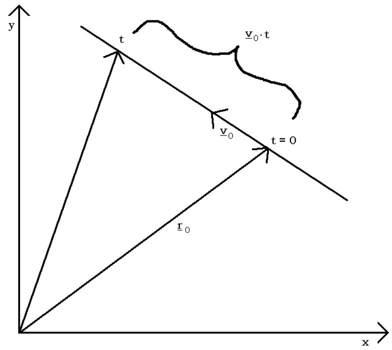

    2. Sebesség: $\Delta\vec{r};\ \Delta t:\ \lim\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\vec{v}$

    $$v=\lim\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

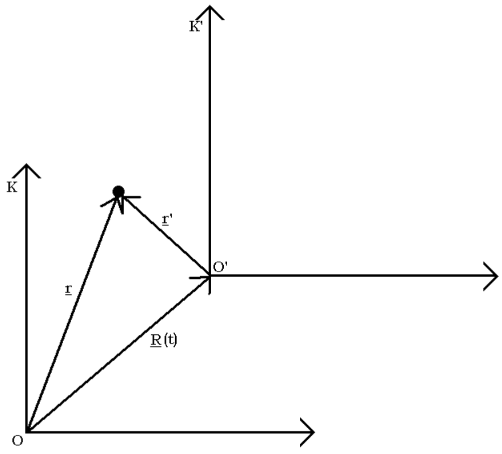
    $\boxed{\vec{v}=\dot{\vec{r}}}$ $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

    3. Gyorsulás: $\boxed{\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}}$ $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$

    Egyenes vonalú egyenletes mozgás:




$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0\cdot t$$
$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\vec{v}_0$$
$$\vec{a}=\dot{\vec{v}}=\ddot{\vec{r}}=0$$



Tegyük fel, hogy $K'$ állandó $\vec{V}$ sebességgel mozog $K$-hoz képest:

$(t=0\text{-ban } O=O')$

$\vec{R}=\vec{V}\cdot t \qquad \dot{\vec{R}}=\vec{V};\ \dot{\vec{V}}=0$

$\vec{r}=\vec{r}'+\vec{R}$

$\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}'+\vec{V}$

$\ddot{\vec{r}}=\ddot{\vec{r}}'$

$\boxed{\vec{a}=\vec{a}'}$

Ha $K$ inerciarendszer, akkor $K'$ is inerciarendszer $\Rightarrow$ ha van inerciarendszer, akkor végtelen sok inerciarendszer van.

2. Mozgásmennyiség: $\vec{p}=m\cdot\vec{v}$ (impulzus, lendület)

   Értelmezés: $\Delta\vec{p} \propto$ erőhatás

   Matematikai: newtoni determináltság elve: a test helyzete és sebessége minden időben meghatározza a test gyorsulását.

   $t,\ \underbrace{\vec{r},\ \vec{v}}_{6\,adat} \rightarrow \vec{a}=\vec{a}(\vec{r},\vec{v},t); \qquad \vec{a}=\frac{1}{m}\cdot\underbrace{\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)}_{erő}$

   $\vec{a}=\dot{\vec{v}} \qquad m\cdot\vec{a}=\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$

   $m\cdot\dot{\vec{v}}=\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$

   $\dot{\vec{p}}=\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$

   $\vec{a}=\ddot{\vec{r}};\ \vec{v}=\dot{\vec{r}}$

   $\ddot{\vec{r}}=\frac{1}{m}\cdot\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$

   $$\boxed{\begin{aligned}\ddot{x}&=\frac{1}{m}\cdot F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\\ \ddot{y}&=\frac{1}{m}\cdot F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\\ \ddot{z}&=\frac{1}{m}\cdot F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)\end{aligned}}\ \text{ODE}$$

3. $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$

   Zárt rendszer impulzusa állandó:

   $m_1\cdot\vec{v}_1+m_2\cdot\vec{v}_2=állandó$

   $\vec{p}_1+\vec{p}_2=állandó$

   $\vec{p}=m\cdot\vec{v}$

   <u>Mozgásegyenlet:</u> (a posztulátumok következménye) $m$ tömegpont mozgása $(\vec{r}(t))$ kielégíti az $\boxed{\ddot{\vec{r}}=\frac{1}{m}\cdot\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)}$ hatodrendű differenciálegyenletet rendszert (ún. mozgásegyenletet)

<u>Példák:</u>

1. Magára hagyott test: $\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{a}=\ddot{\vec{r}}=0$

   $\ddot{x}=0 \Rightarrow \dot{x}=a \Rightarrow x=a\cdot t+b$

   $\ddot{y}=0 \Rightarrow \dot{y}=a' \Rightarrow x=a'\cdot t+b'$ 6 db konstans

   $\ddot{z}=0 \Rightarrow \dot{z}=a'' \Rightarrow x=a''\cdot t+b''$

   Az integrációs konstansok jelentése $t=0$-ban:

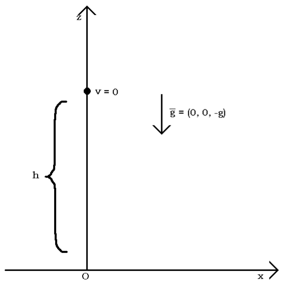
   $x_0=b; \qquad y_0=b'; \qquad z_0=b''$

   $\dot{x}_0=v_{x0}=a; \quad \dot{y}_0=v_{y0}=a'; \quad \dot{z}_0=v_{z0}=a'';$

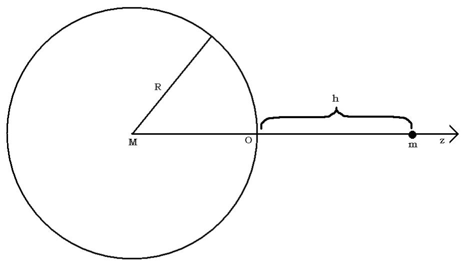
   A 6 db integrációs konstans értékét a kezdeti helyzet és a kezdősebesség rögzíti.

   Vektori alakban: $\vec{r}=\vec{v}_0\cdot t+\vec{r}_0$

2. Szabadesés; mozgás homogén nehézségi erőtérben:
   Homogén nehézségi erőtér: $\vec{g} = \acute{a}lland\acute{o}$ nehézségi gyorsulás
   $\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \vec{g}$ a mozgásegyenlet
   $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0$
   $\vec{r} = \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0 \quad \leftarrow \quad t = 0$-ban $\vec{r} = \vec{r}_0$; $\vec{v} = \vec{v}_0$
   A mozgás pályája: síkgörbe; parabola.
   $\underbrace{(\vec{r}_0, \vec{v}_0)}_{\substack{\text{kezdeti állapot} \\ t=0}} \rightarrow \underbrace{(\vec{r}, \vec{v})}_{t \text{ időbeli állapot}}$
   Szabadesés: $t = 0$-ban: $z = h$; $x = 0$; $y = 0$
   $\dot{z} = 0$; $\dot{x} = 0$; $\dot{y} = 0$




3. Esés nagy magasságból:



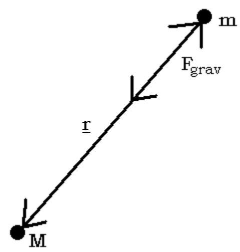

$$F_{grav} = G \cdot \frac{m \cdot M}{(R+h)^2}$$
$$\ddot{z} = -G \cdot \frac{M}{(R+z)^2}$$
$t = 0$: $z = h$; $\dot{z} = 0$
$z(t) = ?$: $z(0) = h$; $\dot{z}(0) = 0$

4. Mozgás súrlódó közegben:
   a) Stokes-féle: $-k \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{\vec{v}_0}{2 \cdot \kappa} \cdot \left(1 - e^{-2 \cdot \kappa \cdot t}\right)$

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = -k \cdot \vec{v} = -k \cdot \dot{\vec{r}} \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$
$$\boxed{m \cdot \dot{\vec{v}} = -k \cdot \vec{v}}$$
$$m \cdot \dot{v}_x = -k \cdot v_x; \quad \frac{k}{m} := 2 \cdot \kappa$$
$$\frac{d}{dt}(\ln v_x) = \frac{\dot{v}_x}{v_x} = -2 \cdot \kappa$$
$$\ln v_x = -2 \cdot \kappa \cdot t + \ln v_{x0}$$
$$\ln v_x - \ln v_{x0} = -2 \cdot \kappa \cdot t$$
$$\ln \frac{v_x}{v_{x0}} = -2 \cdot \kappa \cdot t$$
$$\frac{v_x}{v_{x0}} = e^{-2 \cdot \kappa \cdot t} \Rightarrow \dot{x} = v_x = v_{x0} \cdot e^{-2 \cdot \kappa \cdot t} \Rightarrow x = \frac{v_{x0}}{-2 \cdot \kappa} \cdot e^{-2 \cdot \kappa \cdot t} + \alpha$$
$t = 0$-ra: $x_0 = \frac{v_{x0}}{-2 \cdot \kappa} + \alpha \Rightarrow \alpha = x_0 - \frac{v_{x0}}{-2 \cdot \kappa}$

$$x=\frac{v_{x0}}{-2\cdot\kappa}\cdot e^{-2\cdot\kappa\cdot t}+x_0-\frac{v_{x0}}{-2\cdot\kappa}=x_0+\frac{v_{x0}}{2\cdot\kappa}\cdot\left(1-e^{-2\cdot\kappa\cdot t}\right)$$

5. Kvázielasztikus erőtér: (harmonikus erő)
   Van erőcentrum; az erő arányos és ellentétes a kitéréssel (az origó legyen az erőcentrumban)
   $$\vec{F}=-D\cdot\vec{r}$$
   $$m\cdot\ddot{\vec{r}}=-D\cdot\vec{r}$$
   $$\frac{D}{m}:=\omega^2$$
   $$\ddot{x}=-\omega^2\cdot x \quad\Rightarrow\quad x=a\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha);$$
   $t=0$-ban: $\boxed{x_0=a\cdot\cos(\alpha)}$ (1) és $\dot{x}=\boxed{v_{x0}=-a\cdot\omega\cdot\sin(\alpha)}$ (2)
   $$\ddot{y}=-\omega^2\cdot y$$
   $$\ddot{z}=-\omega^2\cdot z$$
   $$\underbrace{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2}_{\cos^2(\alpha)}+\underbrace{\left(\frac{v_{x0}}{a\cdot\omega}\right)^2}_{\sin^2(\alpha)}=1 \quad\Rightarrow\quad a=\ldots$$
   $$\frac{(2)}{(1)} \quad\Rightarrow\quad tg(\alpha)=\ldots \quad\Rightarrow\quad \alpha=\ldots$$
   Csillapított rezgés:
   $$m\cdot\ddot{\vec{r}}=-D\cdot\vec{r}-k\cdot\underbrace{\vec{v}}_{=\dot{\vec{r}}}$$
   Gerjesztett (kényszer)rezgés:
   $$m\cdot\ddot{x}=-D\cdot x-k\cdot\dot{x}+F_0\cdot\cos(\gamma\cdot t) \qquad (\gamma \text{ gerjesztő frekvencia})$$
6. Kepler probléma; kéttestprobléma:
   $F_{grav}=G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}$; ahol $r$ az $m$ és $M$ távolsága.
   Feltéve, hogy $M$ az origóban nyugszik: $m\cdot\ddot{\vec{r}}=-G\cdot\frac{m\cdot M}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$




7. $m$ tömegű és $q$ töltésű részecske $(\vec{E},\vec{B})$ elektromágneses mezőben; Lorentz-erő:
   $$\vec{E}(\vec{r},t);\ \vec{B}(\vec{r},t)$$
   $$m\cdot\ddot{\vec{r}}=q\cdot\vec{E}+q\cdot\vec{v}\times\vec{B}$$
   Relativisztikusan: $\frac{d}{dt}\left(\frac{m\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=q\cdot\vec{E}+q\cdot\vec{v}\times\vec{B}$

   Dinamikai rendszer:
   $$\ddot{\vec{r}}=\frac{1}{m}\cdot\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$$
   $$x_1=x; \qquad \dot{x}_1=\frac{x_4}{m}$$
   $$x_2=y; \qquad \dot{x}_2=\frac{x_5}{m}$$
   $$x_3=z; \qquad \dot{x}_3=\frac{x_6}{m}$$

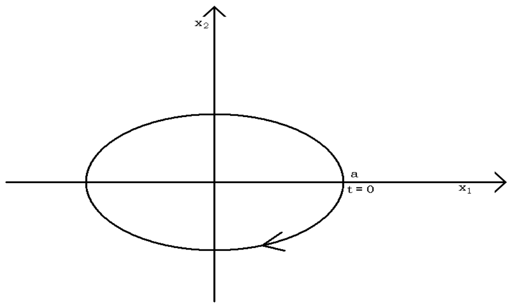
$$x_4 = m \cdot \dot{x}\,; \quad \dot{x}_4 = F_x\left(x_{1,} x_{2,} x_{3,} \frac{x_4}{m}, \frac{x_5}{m}, \frac{x_6}{m}, t\right)$$
$$x_5 = m \cdot \dot{y}\,; \quad \dot{x}_5 = F_y\left(x_{1,} x_{2,} x_{3,} \frac{x_4}{m}, \frac{x_5}{m}, \frac{x_6}{m}, t\right)$$
$$x_6 = m \cdot \dot{z}\,; \quad \dot{x}_6 = F_z\left(x_{1,} x_{2,} x_{3,} \frac{x_4}{m}, \frac{x_5}{m}, \frac{x_6}{m}, t\right)$$
$$\dot{x}_1 \equiv \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, t)$$
$$\dot{x}_2 \equiv \mathcal{F}_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, t)$$
$$\dot{x}_3 \equiv \mathcal{F}_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, t)$$
$$\dot{x}_4 \equiv \mathcal{F}_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, t)$$
$$\dot{x}_5 \equiv \mathcal{F}_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, t)$$
$$\dot{x}_6 \equiv \mathcal{F}_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, t)$$
$$\boxed{\dot{x} = \mathcal{F}(x, t)} \quad x \in \mathbb{R}^6 \quad \mathcal{F} \in \mathbb{R}^6$$

Az x-ek összessége adja az állapotteret (fázisteret): $x \in P$

Mozgás: $t \rightarrow x = x(t)$, fázisgörbe

Például: lineáris harmonikus oszcillátor:

$$m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x\,, \qquad \omega^2 \equiv \frac{D}{m}$$
$$x_1 = x = a \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$x_2 = m \cdot \dot{x} = -a \cdot m \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{m \cdot a \cdot \omega}\right)^2 = 1$$




A lineáris harmonikus oszcillátor fázisgörbéje: ellipszis