

I.C. TÖBBPÓLUSÚ PASSZÍV ÁRAMKÖRÖK

ÖSSZEFOGLALÁS: A négypólusokat három feszültség és három áram jellemzi. A kétpóluspárok az általános négypólusból úgy származtathatók, hogy két pólust bemeneti és két pólust kimeneti kapocsnak tekintünk. A kétpóluspárok (továbbiakban KPP) leírásánál egy bemeneti feszültség és áram, továbbá egy kimeneti feszültség és áram kapcsolatát vizsgáljuk. Ha a KPP passzív lineáris hálózat (továbbiakban PLH), akkor a négy jellemző mennyiség között lineáris kapcsolat van. A négy mennyiség kapcsolatát leíró egyenletekből két mennyiség kifejezhető a másik kettővel. Összesen hat ilyen egyenletpár lehetséges (l. 1.1–1.6). Az egyenletpárok együtthatóiból álló mátrixot paramétermátrixnak nevezzük. A paramétermátrixok egymásba könnyen átszámíthatók (l. 1., 2. táblázat).

A bonyolult felépítésű KPP-ok gyakran előállíthatók egyszerű KPP-ok összekapcsolásával. Az összetett KPP-ok paramétermátrixa ún. reguláris kapcsolásoknál kiszámítható az alkotó KPP-ok mátrixaiból (l. 3.1–3.3). Egy kapcsolat akkor reguláris, ha mindkét alkotó KPP tartalmaz átmenő vezetőket és az átmenő vezetékek össze vannak kötve.

Egy generátor kimenetére kapcsolt KPP úgy hat, mint egy terhelő impedancia. Ezt az impedanciát a KPP bemenő impedanciájának nevezzük. Értéke egyszerűen kifejezhető a paraméter mátrixokkal és a KPP kimenetére kapcsolt impedanciával (l. 4.3).

A hullámimpedancia az a terhelő impedancia, amelyet a KPP kimenetére kapcsolva a KPP bemenő impedanciája megegyezik a terhelő impedanciával (l. 4.15).

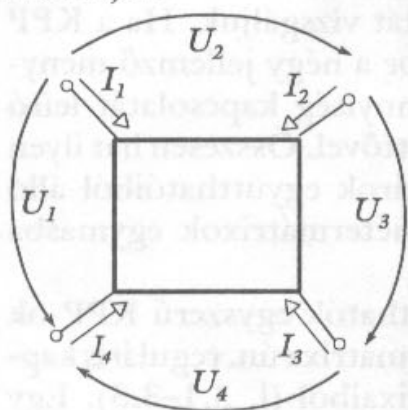
Ha egy fogyasztóra egy generátor jele egy KPP-on keresztül jut, akkor a fogyasztó felől a rendszer egy ekvivalens generátor ellenállással, az ún. kimeneti impedanciával jellemezhető. Ennek értéke a generátor impedanciájából és a KPP paramétereiből számítható ki (l. 4.8).

Egy generátorhoz kapcsolt KPP kimenetén és bemenetén mérhető feszültségek hányadosa a feszültségátviteli függvény (l. 4.12).

A hárompólusokra alkalmazható a KPP leírási mód, ha az egyik pólust egy KPP közös bemenő és kimenő pontjának tekintjük.

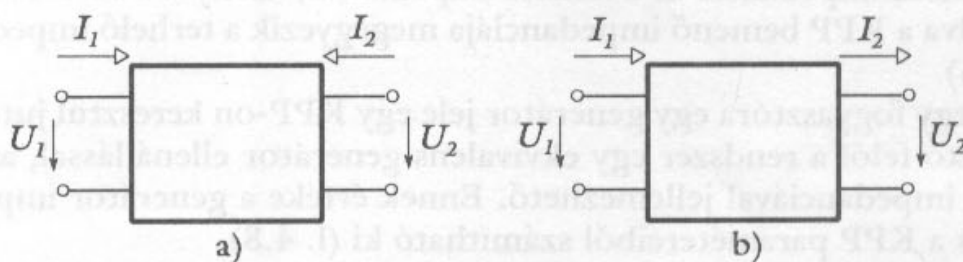
I.C.1. A kétpóluspár fogalma

A korábbiakban láttuk, hogy az áramkörök olyan részei, amelyek az áramkör többi részéhez két vezetéken keresztül kapcsolódnak — kétpólusok —, helyettesíthetők egy ellenállással vagy egy reális feszültséggenerátorral. Ha egy részáramkör három vagy négy vezetékkel kapcsolódik a hálózat többi részéhez, akkor csak három- vagy négypólussal helyettesíthetők. A hárompólusok leírásával csak egy speciális esetben foglalkozunk, egyébként a hárompólusok egyik pólusát kétszer véve figyelembe, formálisan négypólusnak tekinthetjük, és a négypólusokra kidolgozott számítási eljárásokat használjuk.



1. ábra. Áramok és feszültségek a négypólusoknál.

Az általános négypólusok esetén (l. 1. ábra) egy kiválasztott ponthoz viszonyítva 3 független feszültség és három független áram mérhető. (Könnyen belátható, hogy $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$). Az elmélet feladata a mérhető mennyiségek közötti kapcsolat meghatározása. Gyakran a 6 mennyiség közül elegendő 4 mennyiség (2 feszültség és 2 áram) ismerete. Gondoljunk pl. egy biztonsági transzformátorra. Az elsődleges kérdés a primer és a szekunder feszültség viszonya, továbbá az I_p és I_{sz} közötti összefüggés. Nem szokás pl. megkérdezni a primer és szekunder tekercsek kivezetései között mérhető feszültségkülönbséget. Ha a négypólusok leírásánál a vezetéseket 1. oldali és 2. oldali csoportra osztjuk, és csak 2 feszültség és 2 áram kapcsolatát vizsgáljuk, kétpóluspárról beszélünk (l. 2. ábrán). A kétpóluspárok leírásánál az I_2 áram irányát célszerűségi szempontok szerint az a. vagy b. ábrának megfelelően választjuk. A továbbiakban feltesszük, hogy a kétpóluspár



2. ábra. Áram- és feszültségirányok szokásos megválasztása: a. ellenállás, vezetés, hibrid és inverzhibrid mátrixoknál, b. lánc és inverzlánc karakterisztikák esetén.

csak passzív, lineáris elemeket tartalmaz. Ekkor az áramok és feszültségek kapcsolatát lineáris egyenletek írják le. Attól függően, hogy az egyenleteket hogyan rendezzük — tehát milyen mennyiségeket választunk független változóknak —, más lesz az

egyenletrendszer együtthatóiból alkotott mátrix, az ún. karakterisztika. Mivel 4 mennyiségből (sorrendre való tekintet nélkül) kettőt 6 féle módon lehet kiválasztani, így a kétpóluspárokat legfeljebb hatféle karakterisztikával vagy paraméterekkel lehet jellemezni. Az alábbi felsorolásban az első négyenél az áramirányt a 2.a., az utolsó kettőnél pedig a 2.b. ábrának megfelelően értelmezzük.

Ellenállás (impedancia) karakterisztika:

$$\begin{aligned} U_1 &= z_{11} I_1 + z_{12} I_2, \\ U_2 &= z_{21} I_1 + z_{22} I_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Vezetés (admittancia) karakterisztika:

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11} U_1 + y_{12} U_2, \\ I_2 &= y_{21} U_1 + y_{22} U_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Hibrid karakterisztika:

$$\begin{aligned} U_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} U_2, \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} U_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Inverz hibrid karakterisztika:

$$\begin{aligned} I_1 &= h_{11} U_1 + h_{12} I_2, \\ U_2 &= h_{21} U_1 + h_{22} I_2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Lánc karakterisztika:

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11} U_2 + a_{12} I_2, \\ I_1 &= a_{21} U_2 + a_{22} I_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Inverz lánc karakterisztika:

$$\begin{aligned} U_2 &= b_{11} U_1 + b_{12} I_1, \\ I_2 &= b_{21} U_1 + b_{22} I_1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Mégegyszer emlékeztetünk arra, hogy I_2 esetén a lánckarakterisztikáknál a kétpóluspárból kifelé folyó áramirányt tekintjük pozitívnak, míg a másik négy esetén a befelé folyót.

Megjegyezzük, hogy vannak olyan kétpóluspárok, melyekre a fenti karakterisztikák nem mindegyike létezik. (Ilyen pl. a 7. ábrán látható KPP.) Az alábbiakban feltesszük, hogy valamennyi karakterisztika létezik.

Jelöljük az együtthatókból alkotott mátrixot a megfelelő nagybetűvel és kétszeres aláhúzással. Ekkor a fenti egyenletek a következő alakban írhatók:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{Z}}} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.7) \qquad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{Y}}} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{H}}} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (1.9) \qquad \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.11) \qquad \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Ha az (1.8)-cal kifejezett áramvektort (1.7)-be behelyettesítjük, akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{Z}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Y}}} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Mivel U_1 és U_2 mennyiségek függetlenek, így ez csak akkor állhat fenn, ha a két mátrix szorzata egységmátrixot ad:

$$\underline{\underline{\mathbf{Z}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Y}}} = \underline{\underline{\mathbf{Y}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Z}}} = \mathbf{1} \quad \text{vagy} \quad \underline{\underline{\mathbf{Z}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{Y}}} \quad (1.13)$$

Hasonlóan belátható a másik két karakterisztika párra is, hogy

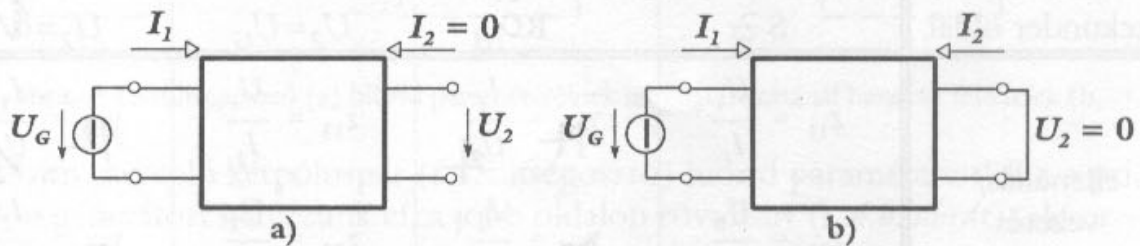
$$\underline{\underline{\mathbf{H}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{K}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{H}}} = \mathbf{1} \quad \text{vagy} \quad \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \quad (1.14)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \mathbf{1} \quad \text{vagy} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{B}}} \quad (1.15)$$

Az (1.13)–(1.15) összefüggések akkor érvényesek, ha a paramétermátrixok invertálhatók, tehát determinánsaik értéke nem zérus.

I.C.2. A kétpólus paraméterek meghatározása

Egy lineáris, passzív kétpóluspár paramétereit gondolati mérésrel lehet megállapítani. Az egyik oldalra ideális feszültséggenerátort kapcsolva különböző áramokat és feszültségeket mérhetünk a kétpóluspáron, melyekből a paraméterek számításával megállapíthatók. A számítások akkor lesznek egyszerűek, ha olyan mérési feltételeket teremtünk, hogy az (1.1)–(1.6) egyenletpárok jobb oldalán az egyik tag értéke zéró



3. ábra. A paraméterek meghatározásánál a szakadás (a) az $I_2=0$ esetet, a rövidzár (b) az $U_2=0$ feltételt biztosítja.

legyen. Keressük pl. az ellenállásmátrix együtthatóit! Kapcsoljunk az 1. oldalra feszültséggenerátort és mérjük az I_1 áramot (l. 3.a. ábra). A 2. oldalra ne kapcsoljunk semmit! (A 2. oldali pólusok között legyen „szakadás”!) Ekkor $I_2=0$ és az (1.1) egyenletből az

$$U_G = z_{11} I_m \quad (2.1)$$

összefüggést kapjuk, ahol I_m a mért áram ($I_m=I_1$). Ha a 2. oldalra nagy belső ellenállású feszültségmérőt kapcsolunk, akkor továbbra is (közelítőleg) fennáll, hogy $I_2=0$, de a mért feszültség (1.1) alapján

$$U_m = z_{21} I_m \quad (2.2)$$

Ily módon z_{11} és z_{21} mérésrel meghatározható. Ha az 1. oldalon gondoskodunk a szakadás feltételének teljesüléséről, és a generátort a 2. oldalra kapcsoljuk, akkor $I_1=0$, és a mért I_2 , $U_m=U_1$ és U_G értékéből z_{12} és z_{22} határozható meg.

Az (1.2) egyenletpár együtthatóinak meghatározásakor az egyik oldalra generátort kapcsolva arról kell gondoskodni, hogy a másik oldalon a feszültség értéke zéró legyen. Ezt úgy érjük el, hogy a pólusokat elvileg rövidre zárjuk (l. 3.b. ábra).

Ha $U_1=U_G$ és $U_2=0$, akkor

$$I_1 = y_{11} U_G \quad (2.3)$$

A rövidzár és a generátor helyének felcserélése esetén

$$I_2 = y_{22} U_G \quad (2.4)$$

A generátor helyzetének megválasztásával és a másik oldalon a szakadás vagy a rövidzár biztosításával az (1.1)–(1.6) egyenletek együtthatói meghatározhatók. A következő táblázatban a mért mennyiségek és az együtthatók közötti kapcsolatokat foglaltuk össze.

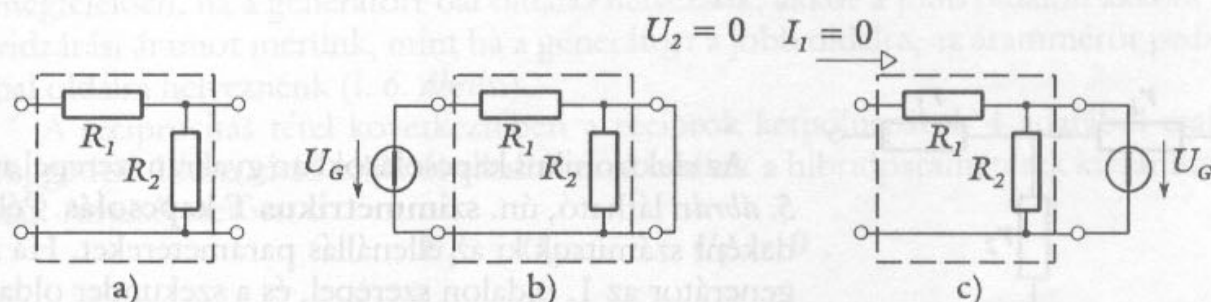
1. táblázat:

primer oldal	$U_1=U_G$	$U_1=U_G$	SZ	$R\ddot{O}$
szekunder oldal	SZ	$R\ddot{O}$	$U_2=U_G$	$U_2=U_G$
ellenállás/ vezetés	$z_{11} = \frac{U_1}{I_1}$ $z_{21} = \frac{U_2}{I_1}$	$y_{11} = \frac{I_1}{U_1}$ $y_{21} = \frac{I_2}{U_1}$	$z_{12} = \frac{U_1}{I_2}$ $z_{22} = \frac{U_2}{I_2}$	$y_{12} = \frac{I_1}{U_2}$ $y_{22} = \frac{I_2}{U_2}$
hibrid/ inverz hibrid	$k_{11} = \frac{I_1}{U_1}$ $k_{21} = \frac{U_2}{U_1}$	$h_{11} = \frac{U_1}{I_1}$ $h_{21} = \frac{I_2}{I_1}$	$h_{12} = \frac{U_1}{U_2}$ $h_{22} = \frac{I_2}{U_2}$	$k_{12} = \frac{I_1}{I_2}$ $k_{22} = \frac{U_2}{I_2}$
lác/ inverz lác	$a_{11} = \frac{U_1}{U_2}$ $a_{21} = \frac{I_1}{U_2}$	$a_{12} = \frac{-U_1}{I_2}$ $a_{22} = \frac{-I_1}{I_2}$	$b_{11} = \frac{U_2}{U_1}$ $b_{21} = \frac{-I_2}{U_1}$	$b_{12} = \frac{U_2}{I_1}$ $b_{22} = \frac{-I_2}{I_1}$

A mérés feltétele a táblázat felső két sorában szerepel. S és R azt jelöli, hogy az adott oldalon szakadás vagy rövidzár található. A táblázatban a mért áramok irányait a 2.a. ábrának megfelelően értelmeztük, így a fenti kifejezések segítségével egy oszlopon belül az együtthatók egymásba átszámíthatók. Például

$$k_{12} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{\frac{I_2}{I_1}} = -\frac{1}{b_{22}}$$

A paraméterek értéke a fenti összefüggésekből ismert felépítésű kétpóluspár esetén — gondolatban elvégzett mérések alapján is — meghatározható. Keressük például a



4. ábra. A feszültségosztó (a) hibrid paramétereinek meghatározásánál használt feltételek (b, c).

4.a. ábrán szereplő kétpóluspár (feszültségosztó) hibrid paramétereit! Ha a primer oldalon generátort helyezünk el, a jobb oldalon rövidzárt (l. 4.b. ábrát), akkor

$$U_1' = U_G, \quad U_2' = 0, \quad I_1' = \frac{U_G}{R_1}, \quad I_2' = -I_1'.$$

Az (1.3) egyenlet alapján

$$h_{11} = \frac{U_1'}{I_1'} = R_1 \quad \text{és} \quad h_{21} = \frac{I_2'}{I_1'} = -1.$$

(A feszültség és áramértékek melletti vessző az első feltételre utal. Az alábbiakban más feltétel mellett számolunk, ezt két vesszővel különböztetjük meg a fentiekől. Hangsúlyozzuk, hogy a táblázat minden oszlopában más a feltétel, tehát a különböző oszlopbeli mennyiségek nem keverhetők!) Legyen most a generátor a 2. oldalon és az 1. oldalon legyen szakadás (l. 4.c. ábrát). Ekkor

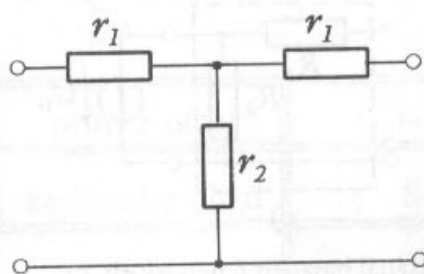
$$U_2'' = U_G, \quad U_1'' = U_2'', \quad I_1'' = 0, \quad I_2'' = \frac{U_2''}{R_2},$$

tehát

$$h_{12} = \frac{U_1''}{U_2''} = 1 \quad \text{és} \quad h_{22} = \frac{I_2''}{U_2''} = \frac{1}{R_2}.$$

A 4.a. ábrán látható feszültségosztó hibrid mátrixa a következő:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} R_1 & 1 \\ -1 & 1/R_2 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$



5. ábra. A szimmetrikus T kapcsolás.

Az elektronikus kapcsolásokban gyakran szerepel az 5. ábrán látható, ún. **szimmetrikus T kapcsolás**. Példaként számítsuk ki az ellenállás paramétereket. Ha a generátor az 1. oldalon szerepel, és a szekunder oldalon szakadás van, akkor

$$U_G = U_1' = z_{11} I_1' = (r_1 + r_2) I_1',$$

$$U_2' = z_{21} I_1' = r_2 I_1',$$

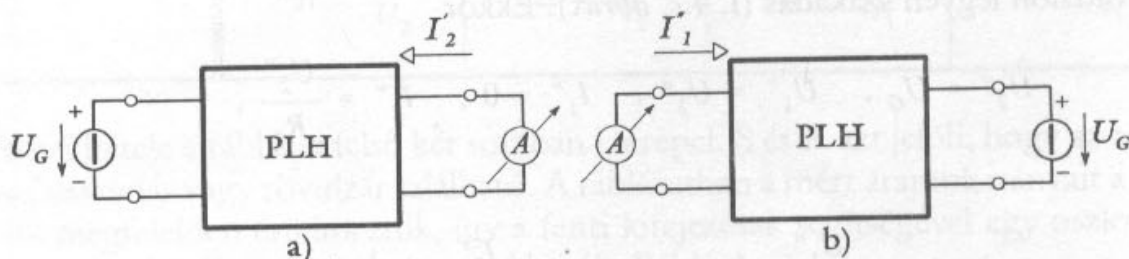
tehát $z_{11} = r_1 + r_2$, $z_{21} = r_2$. Ha a baloldalon van szakadás és a jobboldalon van a generátor, akkor

$$U_1'' = z_{12} I_2'' = r_2 I_2'',$$

$$U_G = U_2'' = z_{22} I_2'' = (r_1 + r_2) I_2''.$$

A szimmetrikus T impedancia mátrixa tehát a következő:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & r_2 \\ r_2 & r_1 + r_2 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$



6. ábra. A reciprocitás tétel alkalmazása kétpóluspároknál a paraméterek meghatározását megkönnyíti.

Ha egy kétpóluspárra teljesül a reciprocitás tétele, akkor azt reciprok kétpóluspárnak nevezzük. Egy passzív elemeket tartalmazó kétpóluspár mindig reciprok. Ennek megfelelően, ha a generátort bal oldalra helyezzük, akkor a jobb oldalon akkora rövidzárási áramot mérünk, mint ha a generátort a jobb oldalra, az árammérőt pedig a bal oldalra helyeznénk (l. 6. ábrán).

A reciprocitás tétel következtében a reciprok kétpóluspárok 4 adatából csak 3 független. Illusztráció céljából alkalmazzuk a tételt a hibridparaméterek kiszámításánál! Az első esetben

$$U_1' = U_G, \quad U_2' = 0,$$

Így

$$U_G = h_{11} I_1' \\ I_2' = h_{21} I_1' = \frac{h_{21}}{h_{11}} U_G.$$

A második esetben

$$U_1'' = 0, \quad U_2'' = U_G,$$

tehát

$$0 = h_{11} I_1'' + h_{12} U_G,$$

melyből

$$I_1'' = -\frac{h_{12}}{h_{11}} U_G.$$

Mivel a reciprocitási tétel szerint $I_1'' = I_2''$ így

$$h_{21} = -h_{12}.$$

További összefüggések nyerhetők, ha a kétpóluspár felépítése szimmetrikus, azaz a primer és szekunder oldal felcserélhető anélkül, hogy az áram- és feszültségértékek megváltoznának. Legyen az egyik oldalon a generátor, a másik oldalon szakadás! Vizsgáljuk ismét a hibrid paraméterek értékeit.

Az első esetben

$$U_G = U_1', \quad I_2' = 0,$$

tehát

$$U_G = h_{11} I_1' + h_{12} U_2' \\ 0 = h_{21} I_1' + h_{22} U_G.$$

melyből

$$U_2' = \frac{h_{21}}{h_{12}h_{21} - h_{11}h_{22}} U_G.$$

A második esetben

$$U_G = U_2'', \quad I_1'' = 0,$$

Így a hibrid egyenletek:

$$U_1'' = h_{21} U_G,$$

$$I_2'' = h_{22} U_G.$$

Az $U_1'' = U_2'$ feltételből $h_{12} = -h_{21}$ összefüggés felhasználásával a

$$\Delta_H \equiv \det(\mathbf{H}) \equiv h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1 \quad (2.7)$$

összefüggést kapjuk.

Hasonló megfontolások végezhetők a többi paraméter esetén is. Belátható, hogy a szimmetrikus, passzív kétpóluspárokat 2 független adattal lehet leírni.

A 2. táblázatban a paraméterek közötti kapcsolatokat foglaltuk össze. A táblázat 3. rovata a 2. ábrára utal, amelyen az áram és feszültségirányokat értelmeztük.

2. táblázat

Karakterisztika	reciprocitás következménye	szimmetria következménye	Áramirányok értelmezése a 2. ábrán
ellenállás	$z_{12} = z_{21}$	$z_{11} = z_{22}$	a
vezetés	$y_{12} = y_{21}$	$y_{11} = y_{22}$	a
hibrid	$h_{12} = -h_{21}$	$\Delta_H = 1$	a
inverz hibrid	$k_{12} = -k_{21}$	$\Delta_K = 1$	a
lánc	$\Delta_A = -1$	$a_{11} = a_{22}$	b
inverz lánc	$\Delta_B = -1$	$b_{11} = b_{22}$	b

Ha egy kétdimenziós mátrix inverze létezik, annak invertálása egyszerű, és az eredmény könnyen megjegyezhető.

Legyen

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

ahol a $\mathbf{P}=(p_{ij})$ és $\mathbf{T}=(t_{ij})$ mátrixok bármilyen (2.8)-at kielégítő mátrixok, akkor

$$p_{11} = \frac{t_{22}}{\Delta_T}, \quad p_{22} = \frac{t_{11}}{\Delta_T}, \quad p_{12} = \frac{-t_{12}}{\Delta_T} \quad \text{és} \quad p_{21} = \frac{-t_{21}}{\Delta_T} \quad (2.9)$$

ahol

$$\Delta_T \equiv t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} \quad (2.10)$$

Megmutatható, hogy $\Delta_T \cdot \Delta_P = 1$.

Ezen összefüggésekkel az 1. és 2. táblázat alapján az egyik karakterisztika ismeretében könnyen kiszámítható a másik. Tegyük fel, hogy pl. egy kétpóluspár ellenállásmátrixát ismerjük. Szükségünk van a hibrid paraméterekre. Első lépésben (2.9) alapján számítsuk ki a vezetés mátrix y_{11} és y_{21} elemét!

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_Z} \quad \text{és} \quad y_{21} = \frac{-z_{21}}{\Delta_Z}.$$

Most már az 1. táblázat 2. és 3. oszlopában — ahol hibrid paraméterekre vonatkozó kifejezések találhatók — a felső két sor ismert mennyiségeket tartalmaz. Rögtön látható, hogy

$$h_{11} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{\Delta_Z}{z_{22}}, \quad h_{21} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{-z_{21}}{z_{22}},$$

$$h_{12} = \frac{z_{12}}{z_{22}} \quad \text{és} \quad h_{22} = \frac{1}{z_{22}}.$$

Ha a kétpóluspár szimmetrikus és reciprok, akkor az $\mathbf{Y}$ meghatározása felesleges. A 2. táblázatból látható, hogy $h_{12} = -h_{21}$ és a $\Delta_H = 1$ relációból kapható

$$h_{11} = \frac{1 - h_{12}^2}{h_{22}}$$

összefüggés alapján az 1. táblázat 3. oszlopának adataiból minden paraméter értéke megkapható.

Példaként számítsuk ki az 5. ábrán látható szimmetrikus T hibrid paramétereit! Az előbb vázolt eljárásnak megfelelően először (2.6)-ból (2.9) és (2.10) alapján az impedancia mátrix inverzét számítjuk ki:

$$\Delta_Z = \det(\mathbf{Z}) = (r_1 + r_2)^2 - r_2^2, \quad (2.11)$$

így

$$y_{11} = y_{22} = \frac{r_1 + r_2}{(r_1 + r_2)^2 - r_2^2}, \quad (2.12a)$$

és

$$y_{12} = y_{21} = \frac{-r_2}{(r_1 + r_2)^2 - r_2^2}. \quad (2.12b)$$

Az 1. táblázat 2. oszlopának kifejezései alapján

$$h_{11} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{(r_1 + r_2)^2 - r_2^2}{r_1 + r_2},$$

és

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = \frac{-r_2}{r_1 + r_2}.$$

A 3. oszlop alapján:

$$h_{12} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{z_{12}}{z_{22}} = \frac{r_2}{r_1 + r_2},$$

továbbá

$$h_{22} = \frac{I_2}{U_2} = \frac{1}{z_{22}} = \frac{1}{r_1 + r_2},$$

tehát a **szimmetrikus T körre**:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{(r_1 + r_2)^2 - r_2^2}{r_1 + r_2} & \frac{r_2}{r_1 + r_2} \\ \frac{-r_2}{r_1 + r_2} & \frac{1}{r_1 + r_2} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Később még használni fogjuk a szimmetrikus T kör láncparamétereit is, ezért most ugyanilyen módszerrel határozzuk meg azokat az eddigi eredmények felhasználásával:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{U_1}{U_2} = \frac{z_{11}}{z_{21}} = \frac{r_1 + r_2}{r_2}, \\
 a_{21} &= \frac{I_1}{U_2} = \frac{1}{z_{21}} = \frac{1}{r_2}, \\
 a_{12} &= \frac{-U_1}{I_2} = \frac{-1}{y_{21}} = \frac{(r_1 + r_2)^2 - r_2^2}{r_2}.
 \end{aligned}$$

A 2. táblázat szerint $a_{22} = a_{11}$, tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{r_1 + r_2}{r_2} & \frac{(r_1 + r_2)^2 - r_2^2}{r_1 + r_2} \\ \frac{1}{r_2} & \frac{r_1 + r_2}{r_2} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

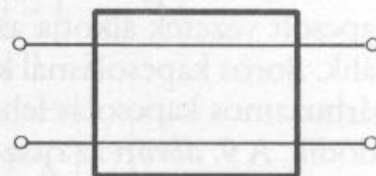
Hasonlóképpen járhatunk el a feszültségosztó láncparamétereinek meghatározásánál is. A hibridparamétereket már ismerjük, ezt a (2.5) egyenlet írja le. Az inverz hibrid paraméterek értéke (2.9) alapján a következő:

$$k_{11} = \frac{1}{R_1 + R_2}, \quad k_{21} = -k_{12} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad k_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.15)$$

A láncparamétereket az 1. táblázat 1. és 2. oszlopában szereplő összefüggések segítségével kapjuk:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{k_{12}} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}, & a_{12} &= \frac{h_{11}}{h_{21}} = R_1, \\
 a_{21} &= \frac{k_{11}}{k_{21}} = \frac{1}{R_2}, & a_{22} &= h_{21} = -1.
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

A legegyszerűbb kétpóluspár az átkötés (l. 7. ábra). Ennek a paraméterei egy kicsit rávilágítanak a paraméterek tartalmára. A feszültségosztóra kapott összefüggésekből $R_1 \rightarrow 0, R_2 \rightarrow \infty$ határesetben megkapjuk a mátrixokat:



7. ábra. Az átkötés mint kétpóluspár.

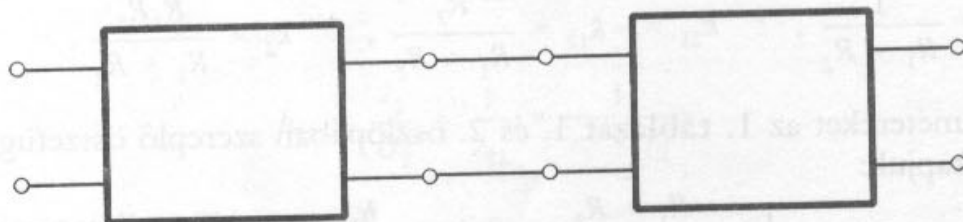
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

A láncparaméterek azt fejezik ki, hogy a két oldalon a feszültségek megegyeznek, és az átfolyó áram nem változtat ezen. Az áramok értéke és irányításuk is megegyezik ($a_{22}=1$). A hibrid mátrix esetén az áramirány értelmezése ellentétes, ezért $h_{21}=-1$. Könnyű meggyőződni arról, hogy az átkötés, ellenállás és vezetés karakterisztikái nem léteznek.

I.C.3. Kétpóluspárok összekapcsolása

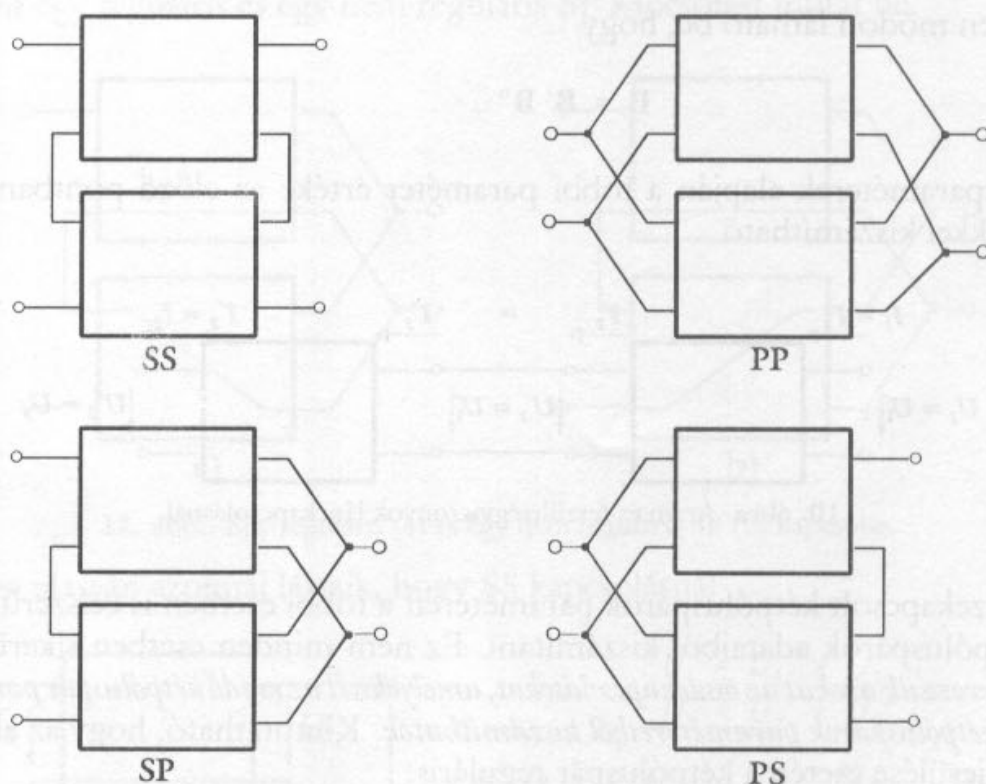
Kétpóluspárokat egymással összekapcsolva újabb kétpóluspárokat kaphatunk. Az eredő KPP paraméterei bizonyos esetekben az alkotó KPP-ok paramétereiből könnyen kiszámíthatók, ezért a bonyolultabb felépítésű KPP-okat gyakran célszerű úgy felfogni, mint egyszerűbb KPP-ok összekapcsolását.

Kétpóluspárok legegyszerűbb kapcsolása a 8. ábrán látható ún. *lánckapcsolás* (vagy *kaszád kapcsolás*). Ennél az egyik kétpóluspár 2. oldalát („kimenetét”) a másik kétpóluspár 1. oldalához („bemenetéhez”) kapcsoljuk.



8. ábra. Kétpóluspárok lánckapcsolása.

Más felépítésű kapcsolásokat nyerünk akkor, ha az 1. oldali kapcsokat az 1. oldali kapcsokkal kötjük össze (l. 9. ábra). Ekkor mindkét oldalon két lehetőség adódik: a párhuzamos kapcsolás és a soros kapcsolás. Párhuzamos kapcsolásnál két-két összekapcsolt vezeték alkotja az eredő kétpólus kapcsait, amely így áramelágazási ponttá válik. Soros kapcsolásnál két vezeték képezi az eredő kétpóluspár kapcsait. A soros és párhuzamos kapcsolás lehetősége mindkét oldalon fennáll, így összesen 4 lehetőség adódik. A 9. ábrán az összekötés módját a soros és a párhuzamos szavak kezdőbetűivel jelöltük.



9. ábra. Kétpólusú párok további összekapcsolási lehetőségei.

Az ábra alapján azonnal látható, hogy párhuzamos kapcsolásnál az eredő KPP kapocsfeszültsége megegyezik az alkotó KPP-ok kapocsfeszültségével, az eredő áram az egyes kétpólusok befolyó áramainak összege. Soros kapcsolásnál az eredő kapocsfeszültsége a tagok kapocsfeszültségeinek összege.

A továbbiakban az egyik, ill. másik kétpólusú párra vonatkozó adatokat egy, ill. két felső vesszővel különböztetjük meg az eredő adataitól. Lánckapcsolásnál a 10. ábra alapján azonnal látható, hogy

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}'' \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}'' = \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

így a lánccparamétereket értelmező (1.5) egyenlet alapján

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}' = \mathbf{A}' \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}'' = \mathbf{A}' \mathbf{A}'' \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}'' = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix},$$

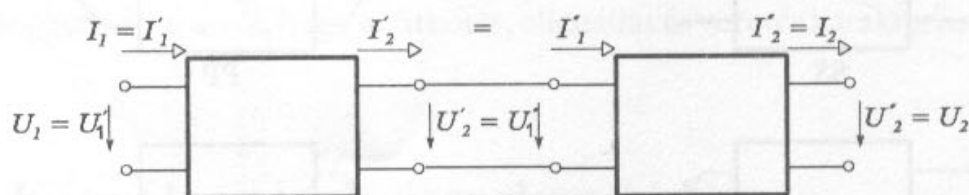
tehát

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' \mathbf{A}'' . \quad (3.1)$$

Ugyanilyen módon látható be, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' \mathbf{B}'' . \quad (3.2)$$

A láncparaméterek alapján a többi paraméter értéke az előző pontban tárgyalt módszerekkel kiszámítható.

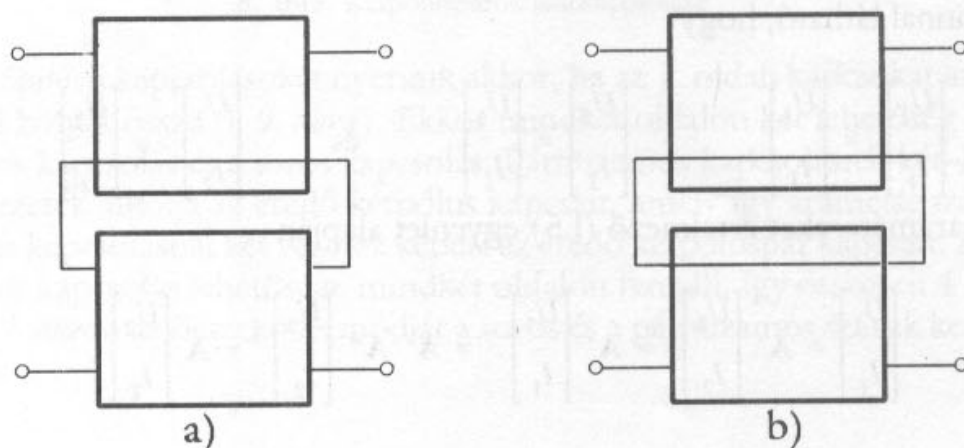


10. ábra. Áram és feszültségviszonyok lánckapcsolásnál.

Az összekapcsolt kétpóluspárok paramétereit a többi esetben is célszerű lenne az egyes kétpóluspárok adataiból kiszámítani. Ez nem minden esetben sikerül. *Regulárisnak nevezzük azokat az összekapcsolásokat, amelyeknél az eredő kétpóluspár paramétereit az alkotó kétpóluspárok paramétereiből kiszámíthatók.* Kimutatható, hogy az alábbi feltételek teljesülése esetén a kétpóluspár reguláris:

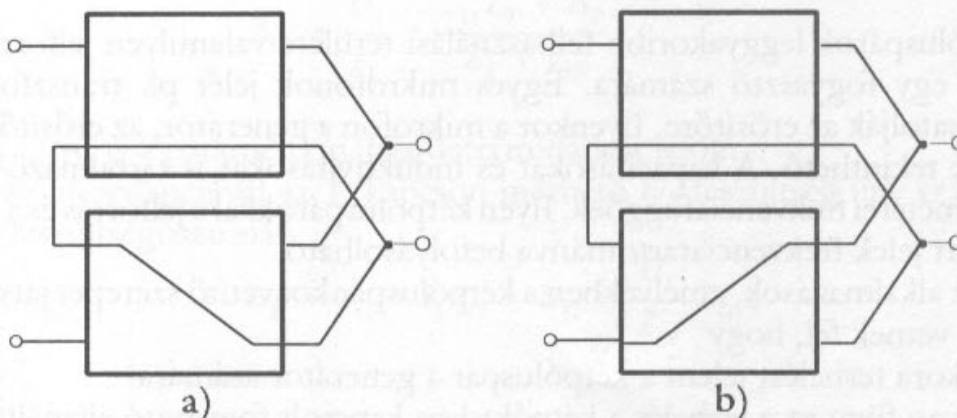
- a. mindkét kétpóluspár tartalmaz átmenő vezetékét,
- b. az átmenő vezetékek össze vannak kötve.

A b. feltételből következik, hogy soros kapcsolásnál a kimenő vezetékek a nem átmenő vezetékek, párhuzamos kapcsolásnál az egyik kimenet az összekötött átmenő, a másikat az összekötött nem átmenő vezetékek alkotják. A 11. ábrán egy nem reguláris és egy reguláris SS kapcsolást látunk.



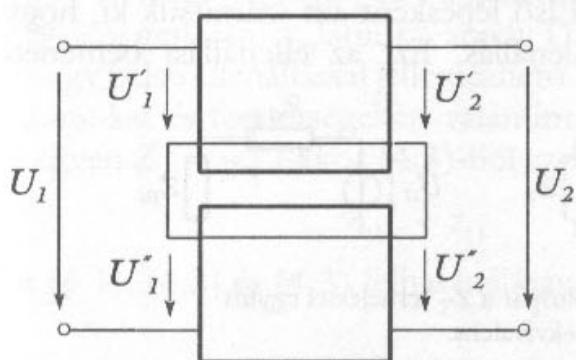
11. ábra. Két SS kapcsolás: a) nem reguláris, b) reguláris.

A 12. ábra egy reguláris és egy nem reguláris SP kapcsolást mutat be.



12. ábra. Egy reguláris (a) és egy nem reguláris SP (b) kapcsolat.

A 13. ábra alapján azonnal látszik, hogy SS kapcsolásnál



13. ábra. SS kapcsolásnál a kapocsfeszültségek összeadódnak.

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1' + U_1'' , \\ U_2 &= U_2' + U_2'' . \end{aligned}$$

Ha a kapcsolat reguláris, akkor megmutatható, hogy

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' + I_1'' , \\ I_2 &= I_2' + I_2'' . \end{aligned}$$

A feszültségeket és áramokat oszlopvektor-ként írva az eredő paraméterei könnyen kifejezhetők:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix} = \mathbf{Z}' \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \mathbf{Z}'' \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{Z}' + \mathbf{Z}'') \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} ,$$

tehát

$$\underline{\underline{\mathbf{Z}}}_{\text{SS}} = \underline{\underline{\mathbf{Z}}}' + \underline{\underline{\mathbf{Z}}}'' \quad (3.3)$$

Kimutatható, hogy PP kapcsolásnál a vezetésmátrix, reguláris SP és PS kapcsolásoknál pedig a hibrid, ill. az inverz hibrid mátrixok adódnak össze:

$$\underline{\underline{\mathbf{H}}}_{\text{SP}} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}' + \underline{\underline{\mathbf{H}}}'' , \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{PS}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}' + \underline{\underline{\mathbf{K}}}'' , \quad \underline{\underline{\mathbf{Y}}}_{\text{PP}} = \underline{\underline{\mathbf{Y}}}' + \underline{\underline{\mathbf{Y}}}'' .$$