A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET

Szerző: Szabó Gábor egyetemi tanár (SZTE Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék)

1. Bevezetés

A speciális relativitáselmélet megszületése magán viselte a fizika nagy forradalmainak összes lényeges ismérvét. Az ismert elméletek nem voltak képesek megmagyarázni lényeges kísérleti eredményeket – sőt néhol maguk az elméletek egymással is ellentmondásba kerültek –, részproblémákra már születtek megoldások, de ezek nem kapcsolódtak egymással, azaz szükség volt egy géniuszra, aki képes megalkotni a nagy fizikai elméletektől elvárt rendszert. Ez a géniusz Albert Einstein személyében nagyjából időben meg is érkezett és a rend – legalábbis addig, amíg a kvantummechanika ismét mindent fel nem borított – helyreállt.

A helyzet annyiban is hasonlított a mechanika XVII. században lezajlott forradalmához, hogy a rendszer, illetve a rendszert megalkotó géniusz – ott Newton – megjelenése máig is nehezen átlátható árnyékot vetett az elődökre. Az utókor mind a mai napig gyakran megfeledkezik azokról, akik Newtont évszázadokkal megelőzve mint a Merton College kutatói, Buridan, Oresme, Stevin, vagy aki kortársként – talán a legtöbb méltánytalanságot elszenvedve – mint Hooke, valamilyen formában lényegesen hozzájárultak a newtoni mechanika megalkotásához. Einstein neve is oly mértékben összeforrt a speciális relativitáselmélettel, hogy Voigt, Poincaré, Fitzgerald és Lorentz az utódoktól gyakran nem a valódi szerepüknek megfelelő megbecsülést kapták meg. Az emberiség kollektív memóriájának az a szokása, hogy hajlamos egy-egy nagy eredményt egy névvel összekötni, általában kiváltja az ellenreakciót is, azaz megjelennek tudománytörténészek, akik megpróbálják a nagyokat deheroizálni. Galileihez vagy Newtonhoz hasonlóan nem kerülte el ezt a sorsot Einstein sem. Edmund Whittaker Einsteinnek az 1905-ös történelmi jelentőségű dolgozatáról az 50-es években a következőket írja „… Einstein egy cikket publikált, amelyben Poincaré és Lorentz relativitáselméletét fejti ki némi kiegészítéssel". Ahelyett, hogy az ilyen – a tudomány lényegét nem érintő, bár kétségkívül érdekes – vitákban megpróbálnánk igazságot tenni, szögezzük le, hogy a természettudományok fejlődésében a kétféle kutatónak, aki részletkérdések tudományos igényű tisztázásával lényeges elméleteket támaszt alá, vagy ingat meg, és aki a tudományosan meglapozott részleteket rendszerbe képes foglalni, egyaránt döntő szerepe van.

A speciális relativitáselmélet megalapozásához számos úton el lehet jutni. Mi ebben a fejezetben átláthatósága miatt jórészt azt az utat követjük, amelyet Einstein ír le [1] tanulmányában. Egy dolgot azonban már a kezdeteknél is hangsúlyoznunk kell. A speciális relativitáselmélet egy különlegesen szép példája a fizika nagy elméleteinek. Különlegessége főként abban rejlik, hogy a többi nagy elmélethez hasonlóan a szemléletünket megrázó eredményekhez jut. Mindezt azonban úgy teszi, hogy két posztulátuma semmivel sem bonyolultabb a klasszikus mechanika axiómáinál, a legfontosabb eredmények bemutatásához szükséges matematikai eszközök pedig nem haladják meg a középiskolás tananyag szintjét.

Ahhoz, hogy egy probléma megoldását igazán értékelni tudjuk, először is az szükséges, hogy magát a problémát alaposan megértsük. Ez a relativitáselmélet esetében is természetesen így van, ezért először is megvizsgáljuk, hogy mik voltak a múlt század végi fizikában azok a főbb ellentmondások, amelyek végül is az elmélet megalkotását kikényszerítették.

2. Előzmények: ellentmondások a XIX sz. végének fizikájában.

2.1. Relativitás elve *vagy* fénysebesség állandósága?

Amint azt korábban láttuk a klasszikus mechanika egy általános elve a *Galilei-féle relativitási elv*. Ennek egyik szemléletes megfogalmazása az, hogy a *mechanika* számára az összes inerciarendszerek egyenértékűek, azaz semmilyen *mechanikai* kísérlettel nem lehet a különböző inerciarendszerek mozgásállapotára vonatkozóan információt nyerni.

Galilei maga arra mutatott rá, hogy a sima tengeren haladó hajó belsejében végzett kísérletekből nem lehet megmondani, hogy a hajó halad-e, vagy áll. Ez a probléma számára elsősorban azért volt fontos, mert ezzel cáfolta a Föld tengely körüli forgásával szemben az ő korában hangoztatott „bizonyítékot": a Föld már csak azért sem foroghat a tengelye körül, mert ekkor egy toronyból leejtett kő nem a torony tövében érne földet. Galilei ezzel szemben azt állította, hogy ilyenkor a kő – csakúgy mint a hajó esetében – együtt mozog a toronnyal. Mi már tudjuk, hogy Galilei gondolatmenete a toronyra vonatkozóan nem egészen helyes, hiszen forgó rendszerben az inercia erőket is figyelembe kell venni, amelyek valóban kismértékben eltérítik pályájukon az eső testeket. A hajó esetében viszont teljes mértékben igaza volt.

A relativitási elv fenti megfogalmazásában nem véletlenül hangsúlyoztuk a mechanika szót. A klasszikus mechanikára vonatkozóan ugyanis bizonyítható, tehát ha a klasszikus mechanika helyes, akkor a Galilei-féle relativitási elvnek igaznak kell lennie. A klasszikus mechanika megalapozása és a 19. század vége között eltelt mintegy 200 év alatt sok tapasztalat gyűlt össze arra nézve, hogy zárt rendszerben a rendszer mozgására vonatkozóan nemcsak mechanikai, hanem másfajta kísérletekkel sem nyerhetünk információt. Ílymódon kialakult egy újabb megfogalmazás, amelyet a Galilei-féle relativitási elvtől való megkülönböztetésül *általános relativitási elv*nek nevezünk, mely szerint az inerciarendszerek a *fizika* számára egyenértékűek.

Az általános relativitási elvnek, amennyiben igaz, van egy fontos következménye: nem létezik abszolút nyugvó vonatkoztatási rendszer, azaz abszolút tér. Az abszolút tér fogalma az emberi szemlélet számára kényelmes kategória, amelynek feladása nem könnyű. Ez magánál Newtonnál is érdekes kettősségre vezetett. Ő – valószínűleg főként filozófiai okokból – posztulálta az abszolút tér létezését, de fizikusi zsenialitása megakadályozta abban, hogy ezt valójában ki is használja. Így eredményei helyesek annak ellenére, hogy feltevései között hibás is volt.

A múlt század végén tehát úgy tűnt, hogy az általános relativitási elv egyike a fizika fontos elveinek, amikor egy komoly ellentmondás kezdett körvonalazódni. A 19. századi fizika egyik legnagyobb eredményét jelentik, az elektromágnesség jelenségkörének leírására felállított Maxwell egyenletek. Ezeknek egyik fontos következménye az, hogy az elektromágneses sugárzás (vákuumban) mindig fénysebességgel terjed függetlenül a forrás vagy a detektor sebességétől. Ez ugyan még önmagában nem mondana ellent az általános relativitási elvnek, a magyarázat azonban, amellyel ezt a kétségkívül zavarba ejtő tényt magyarázni próbálták, annál inkább. A magyarázat ugyanis az volt, hogy a fényhullámokat egy speciális közeg, az ún. *éter* továbbítja, így a terjedés sebessége – a hanghullámokhoz hasonlóan – a közeghez képest állandó. Az ellentmondás tehát az, hogy ha a világmindenséget kitöltő éter létezik, akkor két inerciarendszer között különbséget tehetünk az éterhez viszonyított sebességük alapján, vagy ha akarjuk az éter az abszolút viszonyítási rendszer.

Az éter fogalma a fizika egyik ma már elfeledett vitája során keletkezett. A vita eredete Newtonig nyúlik vissza, aki a fény terjedését speciális tulajdonságokkal felruházott részecskékhez kötötte. Elméletének kifinomult, az interferencia értelmezését is lehetővé tevő részletei a követők értelmezésében lekoptak, és az, hogy a fény terjedése részecskék áramlása, dogmává merevedett kiszorítva Huygens „hullámszerű" elméletét. (Huygens elmélete még nem volt a mai értelemben vett hullámelmélet, miután az a mozgásállapot terjedéséről szól, hiányzik belőle a periodicitás, és emiatt természetesen az interferencia.) Ennek következtében az 1700-as években az optikában jó száz évig nem történt semmi, miután a hullámelmélet bevezetésével próbálkozók Newton tekintélyével, vagy inkább árnyékával találták szemben magukat. Az 1800-as évek fordulóján Young kísérletei fontos bizonyítékot szolgáltattak a hullámtermészetre, amelyet Fresnel elegáns, matematikailag is teljes elmélettel értelmezett. Fresnel megfontolásaiban egyértelműen az éter fogalmára támaszkodott, ezért az éter szorosan összekapcsolódott a fényterjedés hullámmodelljével. Így a hullámmodell térnyerésével az éter fogalom is egyre jobban beépült a fizikába. Azt, hogy az éter fogalom a század végére mennyire elfogadottá vált, jól mutatja, hogy Kelvin, kora egyik kiemelkedő fizikusa 1891-ben a következőket írja: „Az elektromágneses éter a dinamikában az egyetlen szubsztancia amelyben bizonyosak lehetünk….Az elektromágneses éter tudományos valóságnak tekinthető." Az éter hipotézis első látásra teljesen rendben levőnek tűnik, és igen szemléletesen megmagyaráz egy egyébként a szemlélet számára idegen tényt. Kissé közelebbről szemlélve a dolgot, egyre több zavaró tényezőt találunk. Amennyiben ez a világmindenséget kitöltő „anyag" létezik, akkor olyannak kell lennie, hogy a benne mozgó tárgyak mozgását nem akadályozhatja. Másrészt, mivel a fény transzverzális hullám ezért valamilyen szerkezetének kell lennie, hiszen a transzverzális hullámok terjedéséhez olyan rendszerekre van szükség, amelyek valami módon alakjuk visszaállítására törekszenek. Ezt természetesen a múlt század fizikusai is jól látták, ennek ellenére az éter fogalom makacsul tartotta magát. Ez minden bizonnyal arra vezethető vissza, hogy e nélkül a fénysebesség állandóságának elve ellent mond a „józan észnek". Einsteint is saját elmondása szerint már egyetemi hallgató korában igen erősen foglalkoztatta a fénysebesség állandóságának elve, vagy méginkább annak érthetetlensége. Ez később feltehetően a speciális relativitás elmélet megalkotásában is nagy szerepet játszott.

A dilemma tehát az, hogy választanunk kell két elv között: vagy a nagyszámú kísérleti tapasztalattal alátámasztott általános relativitás elvét tartjuk meg, vagy az éter hipotézist, ami szükséges egy ugyancsak kísérleti tapasztalatokon, sőt egy sokféle módon bizonyított nagyszabású elméleten alapuló elvnek, a fénysebesség állandósága elvének az értelmezéséhez.

2.2 Galilei vagy Lorentz transzformáció?

Tekintsünk egy K inerciarendszert, és egy K', a K-hoz képest *v* sebességgel mozgó viszonyítási rendszert. (Viszonyítási rendszereinket mostantól kezdve mindig úgy vesszük fel, hogy az x és x' tengelyek egybeesnek, az y,y' és a z,z' tengelyek párhuzamosak, valamint *v* a közös x,x' tengelyek irányába mutat. Ez az egyszerűsítés a fizikai tartalmat nem torzítja el, ugyanakkor a számolásokat jóval egyszerűbbé teszi.) A kérdés az, hogy milyen műveletet kell végeznünk az {x,y,z,t} koordinátákkal ahhoz, hogy megkapjuk azokat az {x',y',z',t'} koordinátákat, amelyekkel egyenleteink a K' rendszerben is helyesek maradnak. Másképpen fogalmazva: milyen alakú az a (koordináta)transzformáció, amely az {x,y,z,t} koordinátákat a helyes {x',y',z',t'} koordinátákba viszi át? Ha a kérdést a klasszikus mechanika körében vetjük fel, a választ könnyen megadhatjuk. A keresett transzformáció nyilván a következő:

$$x' = x - vt \tag{1a}$$

$$y' = y \tag{1b}$$

$$z' = z \tag{1c}$$

$$t' = t \tag{1d}$$

Az (1a-d) egyenleteket Galilei transzformációnak nevezzük, és fentieket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a mechanika Galilei transzformációra nézve invariáns.

A Maxwell elmélet megalkotása után hamarosan nyilvánvalóvá vált, hogy a Maxwell egyenletek a Galilei transzformációra nézve nem invariánsak. Többen is foglalkoztak azzal a kérdéssel, hogy milyen lehet az a transzformáció, amely a Maxwell egyenleteket invariánsan hagyja. Nyilvánvaló, hogy a kérdésre adott válasz a fizika egészét illetően is lényeges következményekkel járhat. Ha ugyanis a keresett transzformáció a Galilei transzformációval teljesen összeegyeztethetetlen, akkor a fizika két részre esik szét. A Galilei transzformáció ugyanis a klasszikus mechanikából következik. A klasszikus mechanika viszont a kísérletek szerint a makroszkopikus testek világában helyesen írja le a megfigyelhető eseményeket. (Ez a századforduló környékén mindenképpen így volt. Az első olyan kísérleti eredmény, amely makroszkopikus testek esetében közvetlenül mérhető eltérést mutat, csak az 1970-es években született.) A belőle következő elv teljesen hibás tehát nem lehet. Ha tehát a Maxwell egyenletek egy ezzel ellentmondó transzformációhoz vezetnek, akkor a fizika egysége súlyosan sérül, mert a mechanikai és elektromosságtani jelenségek leírása nem egységesíthető.

A helyes megoldáshoz már nagyon közel jutott Voigt 1887-ben, amikor megadott egy olyan transzformációt, amely az elektromágneses hullámok terjedését leíró hullámegyenletre nézve helyes volt. Gondolatmenetének igazán forradalmi eleme az volt, hogy t' = t helyettesítést elvetve az időt is transzformálta. Ez azt jelenti, hogy elvetette az *abszolút idő* létezésének fogalmát.

Az abszolút idő fogalma legalább olyan mélyen beleivódott szemléletünkbe, mint az abszolút tér. Ezért nyugodtan forradalminak nevezhető annak már a puszta felvetése is, hogy az idő múlása függ a viszonyítási rendszertől. Ebből a szempontból igen érdekes Ernst Mach munkássága, aki egy filozófiai értekezésében az abszolút tér és abszolút idő fogalmát egyaránt elveti, mint olyan metafizikai konstrukciókat, amelyek semmilyen fizikai kísérletben nem jelennek meg, így a fizika számára értelmetlenek. Bizonyára nem véletlen, hogy Einstein gondolkodására – amint azt önéletrajzi jegyzeteiben ő maga is kihangsúlyozza – , igen nagy hatással volt Mach „A mechanika története” c. művének elolvasása.

A megoldást végül is H. A. Lorentz találta meg, aki 1899-ben eljutott a tér-koordináták helyes transzformációjához, majd 1904-ben megadta a teljes megoldást amelyet Lorentz transzformációnak nevezünk. A Lorentz transzformáció a következő alakú:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2a}$$

$$y' = y \tag{2b}$$

$$z' = z \tag{2c}$$

$$t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2d}$$

A Lorentz transzformáció részletes elemzésére később még visszatérünk, azonban két fontos megjegyzést már itt meg kell tennünk. Az első: megnyugvással vesszük észre, hogy a Lorentz transzformáció nem mond ellent a Galilei transzformációnak, ugyanis ha a viszonyítási rendszerek egymáshoz képesti *v* sebessége nem összemérhető a fénysebességgel – ez a makroszkopikus testek esetében gyakorlatilag mindig teljesül –, akkor a Lorentz transzformáció a Galilei transzformációba megy át. A második megjegyzés: a Lorentz transzformáció szerint az idő a viszonyítási rendszertől függ, ami az abszolút időre vonatkozó elképzeléseink felülvizsgálatára kell, hogy késztessen bennünket.

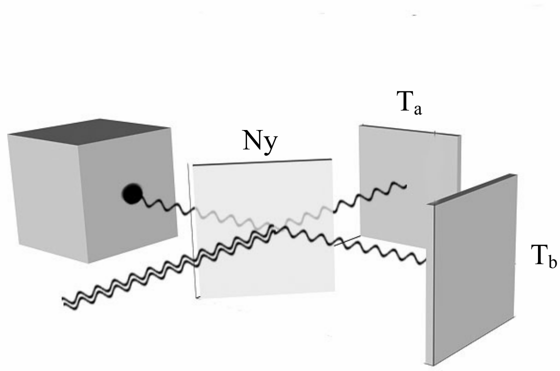
2.3. Michelson és Morley kísérlete: válasz, vagy újabb kérdőjelek?

Amint az eddigi megfontolásainkból is kiderült, az alapvető konfliktus a mechanikai, illetve az elektromágneses jelenségek, vagy méginkább az ezeket leíró elméletek, azaz a newtoni mechanika és a Maxwell egyenletek között látszik körvonalazódni. A múlt század végén természetszerűen vetődött fel az a gondolat, hogy a kérdést legcélszerűbben valamilyen elektromágneses kísérlettel lehetne tisztázni. Az elektromágneses jelenségek közül a fény az, amit könnyű előállítani és detektálni, ezért igen alkalmasnak tűnik valamilyen, a fény terjedésére vonatkozó mérés. A gyakorlati előnyök mellett problémát jelent a fény igen nagy terjedési sebessége. Egy, a gyakorlatban megvalósítható kísérleti eszköz méretei nem nagyon haladhatják meg a 10 m-t. Ekkora távolság megtételéhez a fénynek $3{,}3 \cdot 10^{-7}$ másodpercre van szüksége. Ilyen kicsiny időtartamok kellő pontosságú közvetlen mérésére abban az időben nem volt esély.

Az utóbbi néhány évben a lézerfizika fejlődésének következtében lehetővé vált $3-4 \cdot 10^{-15}$ s időtartamú fényimpulzusok előállítása. Ilyen rövid impulzusokkal, kellően nagy távolságot választva már közvetlen méréseket is lehetne végezni.

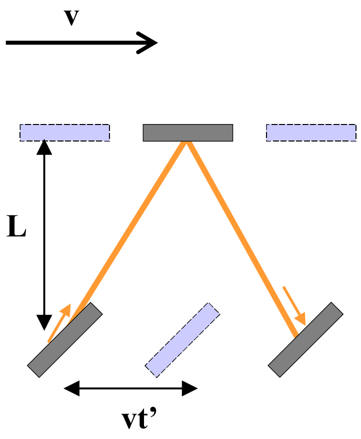
A fény azonban elektromágneses rezgés, amelynek periódusideje – pl. a 600 nm hullámhosszú narancssárga fényé – $2 \cdot 10^{-15}$ s. Ha tehát két fényhullám fázisának összehasonlításával dolgozunk, azaz kihasználjuk a *fényinterferenciát*, akkor a periódusidő egytizedének megfelelő terjedési idő különbségek mérése is lehetővé válik.

Ennek megfelelően Michelson egy olyan kísérletet tervezett, amelyben a fény futásidejét hasonlította össze egy ún. *interferométer* két karjában. A kísérlet vázlata az 1. ábrán látható. A fénysugár egy Ny nyalábosztóra esik, ahol a fény 50%-a visszaverődik és az A karba jut, 50%-a áthalad és belép a B karba. A karok végén elhelyezett T_a és T_b tükrökről a fény visszaverődik, az A karból érkező fény 50%-a a nyalábosztón áthalad, a B karból érkező fény 50%-a a nyalábosztón visszaverődik, azaz a nyalábosztó hátoldalán két párhuzamos fénysugár lép ki, amelyek egymással interferálnak. Amennyiben az A és B kar egyenlő hosszúságúak – ezt a továbbiakban mindig feltételezzük – és az eszköz nyugalomban van, akkor a fény terjedési ideje a két karban pontosan megegyezik ($2L/c$, ahol L a kar hossza, c a fénysebesség), tehát a kilépő fényhullámok azonos fázisban találkoznak, azaz az interferencia során erősítik egymást.

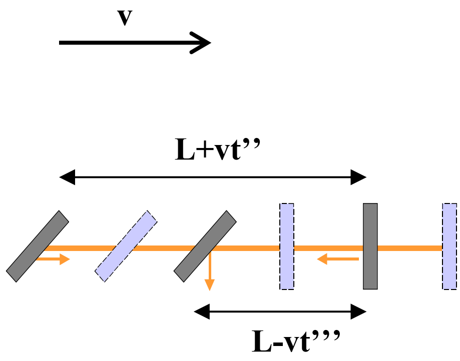


1. ábra
A Michelson interferométer vázlata

Vizsgáljuk meg, hogy az eszköz miképpen alkalmas a feltételezett éterhez viszonyított mozgásunk kimutatására. Tételezzük fel, hogy az interferométer az éterhez képest az ábra szerint jobbról balra, azaz a B kar tengelyével párhuzamosan v sebességgel mozog. Számítsuk ki a terjedési időket a két karban. Az A karban a helyzet a nyugvó esethez képest annyiban különbözik, hogy amíg a fény a nyalábosztótól a tükörig t' idő alatt eljut, azalatt a tükör maga is elmozdul vt' távolságra, így a fénynek L helyett az L és vt' befogókból alkotott derékszögű háromszög átfogóját kell befutnia (lásd a 2a. ábrát). Ennek figyelembevételével írhatjuk:



2a. ábra Fény terjedése a Michelson interferométer A karjában



2b. ábra Fény terjedése a Michelson interferométer B karjában

$$t' = \frac{\sqrt{L^2 + (vt')^2}}{c} \tag{3}$$

A (3) egyenletből *t’*-t kifejezve kapjuk:

$$t' = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{4}$$

A T_a tükörről való visszaverődés után a fény nyilván ugyanekkora út megtételével jut vissza a nyalábosztóhoz, azaz a teljes futásidő az A karban $t_a = 2t'$ tehát (a fizikai tartalom könnyebben látható, ha nevezőben c-t kiemelve kialakítjuk a nyugvó interferométerben észlelhető $2L/c$ terjedési időt):

$$t_a = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

A B karban a fény áthaladva a nyalábosztón a T_b tükör felé repül. Mielőtt a tükröt elérné az *vt’’* távolságra elmozdul, így tehát a fény által megtett távolság L helyett $L + vt''$ (lásd 2b ábra). A terjedési időre írhatjuk tehát:

$$t'' = \frac{L + vt''}{c} \tag{6}$$

A (6) egyenletből kifejezve t”-t kapjuk:

$$t'' = \frac{L}{c - v} \tag{7}$$

A tükörről való visszaverődés után a fény valamely *t’’’* idő alatt ér vissza a nyalábtágítóhoz úgy, hogy eközben a nyalábtágító a fény felé mozog, tehát a megtett út $L - vt'''$. Azaz:

$$t''' = \frac{L - vt'''}{c} \tag{8}$$

t'''-re kapjuk:

$$t''' = \frac{L}{c+v} \tag{9}$$

A B karban a teljes futásidő $t_b = t'' + t'''$, tehát (7) és (9) alapján írhatjuk:

$$t_b = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{10}$$

Gondolatmenetünk végeredménye az (5) és (10) egyenletek összehasonlításából adódik: az éterhez képest mozgó interferométer karjaiban a futásidő különbözik egymástól (és a nyugalomban levőtől). A kérdés most már az, hogy ez a különbség mérhető-e. Ennek eldöntéséhez határozzuk meg először is a kérdéses időkülönbséget.

$$\Delta t = t_b - t_a = \frac{2L}{c}\frac{1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{11}$$

A (11) kifejezés első látásra kissé bonyolultnak tűnhet, de kihasználva azt, hogy a földi körülmények között megvalósítható kísérletek esetében a $v << c$ mindig fennáll, sokkal egyszerűbb alakra hozható. Ebben az esetben az emeletes tört nevezőjében v^2/c^2 az *1* mellett elhanyagolható. Használjuk ki továbbá, hogy $x<<1$ esetén:

$$\sqrt{1-x} \approx 1-\frac{x}{2}$$

Ezek után írhatjuk:

$$\Delta t \approx \frac{L}{c}\frac{v^2}{c^2} \tag{12}$$

A mérés során az első probléma az lehet, hogy a gyakorlatban nem tudjuk biztosítani, hogy – amint azt feltételeztük – a két karhossz pontosan ugyanakkora legyen. Ennek hatását Michelson egy szellemes megoldással ejtette ki. Két összehasonlító mérést végzett el úgy, hogy közben az egész interferométert 90^o-al elforgatta, ami másképpen azt jelenti, hogy a mozgás irányához képest a két kar szerepet cserél. Könnyű belátni, hogy ekkor a karok hosszának esetleges különbsége kiesik, ráadásul a mérendő eltérés kétszeresére nő. A földi körülmények között végzendő mérések számára elérhető legnagyobb sebesség a Föld Nap körüli keringéséből adódó mintegy 30 km/s. (12) alapján nyilvánvaló, hogy a mérendő mennyiség arányos az *L* karhosszal, így ezt célszerű minél nagyobbra választani. A kor technikája által lehetővé tett legnagyobb karhossz, 1 m nagyságrendű volt. Ezeket a paramétereket (12)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy a két karból érkező fényhullám között a futásidő különbség $3{,}3\cdot10^{-17}$ s. Figyelembe véve, hogy a méréshez használt 600 nm hullámhosszú fény rezgési periódusideje $2\cdot10^{-15}$ s, a két karból érkező fényhullámok közötti fáziskülönbség kb. 2^o. *A mérés ugyan roppant nehéz, de van esély a jelenség észlelésére.*

A mérés nehézségével Michelson is tisztában volt. Először 1881-ben valósította meg a kísérletet, amelynek eredményét maga sem fogadta el perdöntőnek. 1887-ben Michelson és Morley lényegesen jobb körülmények között újra elvégezték a mérést, aminek eredményeként az adódott, hogy az eltolódás nem lehet nagyobb, mint a várt érték 40-ed része azaz *az éterszél nem létezik.*

A Michelson kísérlet a kísérleti fizika történetének egyik csúcsteljesítménye. A kísérletet Michelson először berlini tanulmányútja során végezte el, de az eredmények megbízhatóságát illetően erős kételyei voltak. (Mai ismereteink alapján biztosan állíthatjuk, hogy az eredmények nem voltak elég megbízhatóak ahhoz, hogy a kísérlet perdöntőnek legyen nevezhető.) Az USA-ba visszatérve 1887-ben, Morley közreműködésével ismét elvégezték a kísérletet. Az már a korábbi kísérletek során nyilvánvalóvá vált, hogy a kritikus tényező az interferométer mechanikai stabilitása, amit alapvetően az határoz meg, hogy mennyire sikerül a környezeti zavaró hatásoktól függetleníteni. (Képzeljük el azt, hogy a készülék egyik tükre rezgésbe jön. Ez nyilván azt jelenti, hogy az interferométer karhossza a rezgésnek megfelelően változik. Ha azt a feltételt szabjuk, hogy az ebből adódó zavaró hatás ne haladja meg a várt jelenség egytizedét, a terjedési időkülönbségre vonatkozó korábbi megfontolásaink alapján adódik, hogy a rezgés amplitúdója nem lehet nagyobb a fény hullámhosszának kb. 600-ad részénél. Ez 600 nm-es hullámhossz esetén 1 nm, azaz NaCl kristályban az atomok közötti távolság kb. kétszerese!) Michelson és Morley tudatában voltak ennek. Interferométerüket ezért egy 1,5 m x 1,5 m keresztmetszetű, 30 cm vastagságú (!) kőlapra építették. A kőlap alatt egy fagyűrű volt, ami egy gyűrű alakú higanykádban úszott, hogy a készüléket el lehessen forgatni anélkül, hogy a környezeti hatások a mérést zavarnák. Minthogy a mérés pontossága a karhosszal arányos, ezért a fényt tükrök segítségével a kőlap átlója mentén többször oda-vissza küldték, így elérték azt, hogy a karhossz 11m legyen. Az elvégzett mérések azt mutatták, hogy az időkülönbség – ha egyáltalán létezik – nem lehet nagyobb, mint a (12) alapján várt érték 40-ed része. Ez az eredmény már egyértelműen kizárja az éterszél létét.

A kísérlet negatív eredményét nagyon sokféle módon próbálták magyarázni. Az egyik legegyszerűbb magyarázat az lenne, hogy a Föld a mérés során pl. a naprendszer egészének mozgása miatt a méréskor véletlenül éppen közel nyugalomban van éterhez képest. Ezt – ahogy azt már Michelson is felismerte –, könnyű kizárni azzal, hogy a mérést fél évvel később újra elvégezzük, amikor a Föld kerületi sebessége éppen ellenkező irányú. Mások felvetették azt, hogy esetleg a Föld az őt közvetlenül körülvevő étert a folyadékban mozgó golyóhoz hasonlóan magával ragadja, így közvetlenül a Föld felszínén relatív mozgás nincs. Ez azonban ellentétben állna a csillagászatban nagy pontossággal megfigyelt, ún. aberráció jelenségével, amely szerint a csillagokat éppen abból az irányból észleljük, ami a Föld mozgásából adódik. A többi érv is rendre ellentmondásba került más tapasztalati tényekkel, így végül is néhány év alatt a kutatók egy jelentős része elfogadta, hogy az éterszél és ezzel együtt az éter sem létezik. Ezzel azonban ahelyett, hogy választ kaptunk volna, a kérdőjelek száma növekedett.

3. A megoldás: a speciális relativitáselmélet

3.1. A két posztulátum

Az előbbi megfontolásaink alapján kiderül, hogy a fénysebesség állandóságának elve – az éterfogalommal összekapcsolva – ellentmondani látszik az általános relativitás elvének, miután egy olyan lehetőséget vet fel, hogy a viszonyítási rendszerek mozgása az éterhez képest kimutatható. Vegyük azonban észre, hogy a két elv önmagában nem zárja ki egymást. Megkísérelhetjük tehát azt, hogy *feltételezzük, hogy a fénysebesség állandóságának elve és az általános relativitás elve egyszerre érvényes*, és megvizsgáljuk, az ebből adódó modell helyesen írja-e le a kísérleti eredményeket. (Azt, hogy érdemes ezen az úton próbálkoznunk nagyban sugallja a Michelson-kísérlet eredménye is, amit úgy is értelmezhetünk, mint egy, a két elv közti ellentmondás kimutatására vonatkozó igen alaposan megtervezett kísérlet kudarcát.) Ennek megfelelően a speciális relativitáselmélet az alábbi két feltevésen (posztulátumon) alapul:

1. A vákuumbeli fénysebesség állandó, függetlenül a fény frekvenciájától, a terjedés irányától, a detektor, illetve a fényforrás mozgási sebességétől.

2. Az egymáshoz képest egyenes vonalú, egyenletes mozgást végző viszonyítási rendszerek a fizika számára egyenértékűek.

Véssük emlékezetünkbe, hogy a speciális relativitáselmélet csupán a fenti két, igen egyszerű, a szemlélet számára könnyen elfogadható feltevésen alapul. Ezt azért nagyon fontos hangsúlyoznunk, mert gyakran össze szokták téveszteni az elmélet igen meglepő, a szemlélettel nehezen összeegyeztethető következményeit az elmélet feltevéseivel. Nem tételezünk fel semmit pl. az események egyidejűségéről, vagy a tömeg sebességfüggéséről, az ezzel kapcsolatos meglepő eredmények következnek két feltevésünkből. A speciális relativitáselméletben éppen az a csodálatos, hogy két egyszerű posztulátum alkalmazásával egy egészen új világba jutunk el.

A meglepő eredmények illusztrálására végezzünk el egy egyszerű gondolatkísérletet. Készítsünk egy speciális órát amelynek működési elve a következő. Egy fényforrásból fényjelet küldünk a szemben L távolságra elhelyezkedő tükör felé, ahol visszaverődik és a fényforrás mellett elhelyezkedő detektorba jut. Az óra egy „kettyenését” az az idő adja, amelyre a fénynek a $2L$ távolság befutására szüksége van, azaz $\Delta t = 2L/c$. Adjuk oda az órát egy nagysebességű űrhajón mozgó űrhajósnak. A v sebességgel mozgó fényóra járása megváltozik, miután most a fény hosszabb utat fut be. Az új időegységet nem is kell újra kiszámolnunk, ha felismerjük, hogy a helyzet megegyezik azzal, ami a Michelson interferométer függőleges karjában van, alkalmazhatjuk tehát (5)-t:

$$\Delta t' = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Az óra járása tehát az űrhajóban lelassul. Az természetesen még önmagában nem volna meglepő, hogy egy speciálisan konstruált fényóra a mozgó űrhajón másképpen jár. Ha azonban kihasználjuk második posztulátumunkat, akkor világos, hogy az űrhajón levő összes többi órának, vagy még általánosabban az összes időben lejátszódó eseménynek hasonlóan le kell lassulnia, mert ha csak egy olyan folyamat is van, amely a mozgás során is változatlan marad, akkor ezt a folyamatot a fényóra által mutatott idővel összehasonlítva az űrhajós kísérletileg tud következetni rendszere mozgásállapotára, tehát ellentmondásba kerülünk a 2. posztulátummal. *A mozgó űrhajóban tehát az idő másként múlik.*

3.2. A posztulátumok és a Lorentz transzformáció

Az előbbiekben megvizsgáltuk azokat a feltevéseket, amelyeken a speciális relativitáselmélet nyugszik. Fontos kérdés az, hogy a posztulátumokból milyen koordináta transzformáció adódik. Eddigi megfontolásaink nem jogosítanak fel annak felvetésére, hogy ez éppen a Lorentz transzformáció lenne. Amikor tehát megpróbálkoznunk azzal, hogy a transzformációt a két posztulátumból levezessük, akkor egy „veszélyes” kísérletbe kezdünk. Ha ugyanis valami teljesen új transzformációhoz jutunk, akkor a relativitáselmélet elválik a fizika többi részétől, ami az egész elmélettel kapcsolatban kételyeket vet fel. Amennyiben viszont eredményül a Lorentz transzformáció adódna, akkor elméletünk sokkal mélyebb alapokon nyugszik, mint korábban képzeltük.

Írjuk fel mindkét koordinátarendszerben az x tengely mentén, pozitív irányban terjedő fényjel egyenletét figyelembe véve, hogy a fénysebesség mindkét rendszerben ugyanaz:

$$x = ct \tag{13a}$$

$$x' = ct' \tag{13b}$$

Azok a pontok amelyeken a fény végighalad a K rendszerben, egy fényjel pályáját írják le a K'-ben is, azaz (13a) megoldásai egyben (13b)-nek is megoldásai, amelyek egymástól legfeljebb egy konstans szorzóban különbözhetnek. Írjuk ezt fel:

$$x' - ct' = \lambda(x - ct) \tag{14}$$

Gondolatmenetünket ismételjük meg az *x* tengely mentén, negatív irányban terjedő fényjelre. Ekkor kapjuk:

$$x' + ct' = \mu(x + ct) \tag{15}$$

A (14) és (15) egyenletekből próbáljunk meg kialakítani olyan kifejezéseket, amelyek formájukban hasonlítanak a keresett transzformációra. (Pl. ha az *x* koordináta transzformációjára gondolunk, akkor egy olyan egyenletet várunk, amelynek bal oldalán *x'* áll, jobb oldalán pedig egy *x*-et és *t*-t tartalmazó kifejezés.) Összeadva (14)-et és (15)-t kapjuk:

$$2x' = (\lambda + \mu)x - (\lambda - \mu)ct \tag{16}$$

Végezzük el (16)-ban az

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2}, \text{ és } \ b = \frac{\lambda - \mu}{2}$$

helyettesítéseket. Ekkor kapjuk:

$$x' = ax - bct \tag{17}$$

(14)-ből kivonva (15)-t, és elvégezve a fenti helyettesítést adódik:

$$ct' = act - bx \tag{18}$$

(17) és (18) formailag megfelel a keresett transzformációnak, feladatunkat tehát megoldjuk, ha sikerül az *a* és *b* együtthatókat meghatározni.

Emlékezzünk arra, hogy eddig csak a fénysebesség állandóságára vonatkozó posztulátumot használtuk ki. A keresett állandók meghatározásához még további összefüggéseket nyerhetünk a relativitási elvnek, valamint annak a ténynek a kihasználásával, hogy K' K-hoz képest *v* sebességgel mozog a közös *x* tengely mentén. Vizsgáljuk meg, hogy mi következik az utóbbiból. Tekintsük K' origóját, azaz a $x' = 0$ pontot. Ennek x koordinátájára is nyilván igaz, hogy $x=vt$. Helyettesítsük ezeket be a (17) egyenletbe.

$$0 = avt - bct \tag{19}$$

(19)-ből az a/b hányadosra adódik:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{v} \tag{20}$$

A relativitási elv kihasználása ennél kissé bonyolultabb. Ehhez képzeljük először el, hogy a K-beli megfigyelő a $t = 0$ pillanatban egy pillanatfelvételt készít a K'-beli hosszegységet megtestesítő mérőrúdról ($\Delta x' = 1$), majd a kapott eredményt a saját hosszegységével összehasonlítja. (17)-ből a t = 0 helyettesítéssel $x' = ax$ adódik, tehát a keresett összefüggés a hosszegységek között:

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{a} = \frac{1}{a} \tag{21}$$

Végeztessük el gondolatban ugyanezt a kísérletet fordítva, tehát a *t'=0* pillanatban készítsen a K'-beli megfigyelő pillanatfelvételt a K-beli hosszegységről. Ekkor (18)-ból adódik *act = bx*. Fejezzük ebből *t*-t, és helyettesítsük (17)-be.

$$\Delta x' = \Delta x(a - \frac{b^2}{a}), \text{ tehát } \quad \Delta x' = a - \frac{b^2}{a} \tag{22}$$

A relativitási elvből viszont következik, hogy a két eredménynek meg kell egyeznie, hiszen ha ez nem így van, akkor van egy olyan kísérlet, aminek segítségével a két viszonyítási rendszer megkülönböztethető. A $\Delta x = \Delta x'$ feltételből adódik:

$$a^2 = \frac{1}{1 - \frac{b^2}{a^2}} \tag{23}$$

(23)-ból négyzetgyököt vonva, valamint *b*-t (20) segítségével eliminálva kapjuk:

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{24}$$

(24)-ből (20) kihasználásával *b*-re adódik:

$$b = \frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{25}$$

Végül az együtthatókat (17)-be és (18)-ba helyettesítve a keresett transzformációra kapjuk:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{26a}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{26b}$$

Rátekintve (26a-b)-re megállapíthatjuk, hogy *a speciális relativitáselmélet két posztulátumából éppen a Lorentz transzformáció adódik*.

4. A speciális relativitáselmélet következményei

4.1. Relativisztikus kinematika

Ebben a fejezetben áttekintjük a relativitáselmélet fontosabb (kinematikai) következményeit. Vizsgálataink során részben gondolatkísérletekre, részben – elsősorban a számszerű eredmények esetében – a Lorentz transzformációra fogunk támaszkodni. Egy relativisztikus jelenséget már az idővel kapcsolatban bemutattunk. Vegyük ezt egy kissé közelebbről szemügyre.

4.1.1. Idődilatáció és ikerparadoxon

A fényórára alapított gondolatkísérlet segítségével illusztrált jelenséget – mely szerint az idő a viszonyítási rendszer mozgásától függően lelassul – idődilatációnak is szokás nevezni. Az idődilatáció jelensége a Lorentz transzformáció időre vonatkozó formulájából is azonnal adódik. Ha ugyanis megvizsgáljuk, hogy mit mutat egy, a K' viszonyítási rendszer valamilyen x_0' pontjában elhelyezett óra, akkor kapjuk:

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_0' v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (27)$$

Azaz K'-ben az idő korábbi okoskodásunknak megfelelően lassabban múlik. Egyenletünkben megjelenik egy korrekciós faktor, ami azonban csak az óra elhelyezkedésétől függ, az időtől független.

Ha egészen pontosak akarunk lenni, akkor nem azt kell állítanunk, hogy az idő K'-ben lassabban múlik. Az idő múlása ugyanis önmagában nem fizikai fogalom. A pontos megfogalmazás az, hogy minden, a K'-ben elvégzett időmérési kísérlet az egyenletnek megfelelő eredményt szolgáltatja, vagy másképpen *K'-ben az időegység megváltozik.*

Az idődilatáció kétségtelenül nehezen egyeztethető össze a klasszikus szemlélettel, aminek lényeges eleme az abszolút idő fogalma. Nem véletlen, hogy a relativitáselmélet kezdeti bírálói megpróbáltak a jelenséghez kapcsolódóan ellentmondást keresni. Találtak is valamit, amit ikerparadoxonnak neveztek el. Az ikerparadoxont a következő egyszerű gondolatkísérlettel szemléltethetjük. Legyenek Péter és Pál ikertestvérek. A testvérek közül az egyik, mondjuk Péter, tegyen egy űrutazást egy nagy sebességgel mozgó űrhajóban. Mit mondanak egymás koráról a testvérek, amikor újra találkoznak? Pál gondolatmenete a következő. Én a Földön maradtam, Péter hozzám képest nagy sebességgel mozgott, aminek következtében órája lassabban járt, azaz számára kevesebb idő telt el, tehát a visszatérése után ő nálam fiatalabb. Péter gondolatmenete a következő. Amíg én az űrhajóban voltam a Föld, és vele együtt Pál hozzám képest gyorsan mozgott, következésképpen órája lassabban járt, tehát amikor újra találkozunk ő nálam fiatalabb. Vizsgáljuk meg, hogy mi is pontosan az az ellentmondás, amelyet gondolatkísérletünk felvet. Az természetesen még nem lenne ellentmondás, hogy az űrutazás után az ikertestvérek egyike fiatalabb a másiknál, az viszont az egész elméletet romba döntené, ha két, egymástól a fizika számára megkülönböztethetetlen viszonyítási rendszerben elhelyezkedő megfigyelő egyszerre állíthatja a kísérlet végén, hogy a másikuk a fiatalabb. Nézzük meg, hogy a két rendszer valóban megkülönböztethetetlen-e! Ehhez vizsgáljuk lépésről-lépésre a kísérlet lefolyását. A kísérlet kezdetén a két megfigyelő viszonyítási rendszere egybeesik – esetünkben mindketten a Földön vannak – ami szükséges is ahhoz, hogy óráikat összehangolják. Ezek után azonban az egyiknek – nyilván az űrhajósnak – gyorsulnia kell ahhoz, hogy sebessége a másikhoz képest megváltozzék, mert ha ez nem következik be, akkor azonos sebességgel mozognak, tehát óráik is azonosan járnak. Nyilvánvaló tehát, hogy a *két viszonyítási rendszer nem megkülönböztethetetlen, közöttük egy kísérletileg is kimutatható különbség van, hiszen a gyorsulás mérhető*. Azaz az ikerparadoxon feloldása az, hogy nincs ellentmondás, a testvérek közül az a fiatalabb, aki a kísérlet során gyorsulást észlelt.

4.1.2. Az egyidejűség relativitása

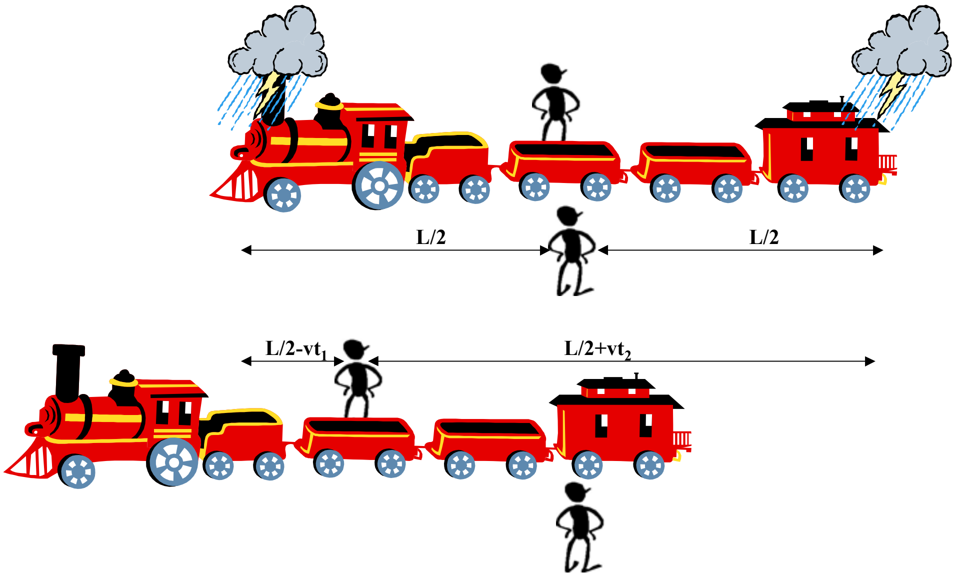
Az idődilatáció tárgyalásánál láttuk azt, hogy az idő múlását megadó (27) egyenletben megjelenik egy korrekciós tényező, ami attól függ, hogy óránk hol helyezkedik el. Ez felveti azt a kérdést, hogy az egyik rendszerben két különböző pontban azonos pillanatban bekövetkező eseményeket a másik rendszerbeli megfigyelő egyidejűnek észleli-e? Vizsgáljuk meg, hogy mi adódik a Lorentz transzformációból! Tételezzük fel, hogy a t_0 pillanatban K-ban az x_1, illetve az x_2 helyen bekövetkezik egy-egy esemény. Ezen bekövetkezésének idejére K'-ben a Lorentz transzformációval adódik:

$$t_1' = \frac{t_0 - \frac{v x_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (28a)$$

$$t_2' = \frac{t_0 - \frac{v x_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (28b)$$

A (28a-b) egyenletek összehasonlításából azonnal adódik, hogy a K egyidejű események K'-ben nem egyidejűek, közöttük egy, a két esemény térbeli távolságával arányos időkülönbség lép fel.

A jelenséget az alábbi egyszerű gondolatkísérlettel szemléltethetjük. Tekintsünk két megfigyelőt, amelyek közül az egyik egy mozgó vonat közepén, a másik a vonat mellett a töltésen helyezkedik el úgy, hogy a kísérlet kezdetén a két megfigyelő éppen egyvonalban van (3. ábra). Az egyidejűség mérését végezzük úgy, hogy az események térbeli távolságának



felezőpontjában álló megfigyelő felé az események bekövetkezésekor fényjelet küldünk. A fénysebesség állandóságának elve miatt nyilvánvaló, hogy amennyiben a megfigyelő a fényjelek beérkezését egyidőben észleli, akkor a két esemény egyidejű volt. Vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha a vonat elején és végén a vonat mellett álló megfigyelő számára egyidőben bekövetkezik egy-egy esemény, pl. villám csap a vasúti sínekbe. A nyugvó megfigyelő azonos időpontban észleli a két fényjelet és megállapítja, hogy a két esemény egyidejű volt. A vonaton levő megfigyelő ezzel szemben a vonat eleje felől érkező fényjel felé mozog, miközben a másik fényjel elől távolodik, így azokat nem egyidőben észleli, tehát megállapítja, hogy mozdonynál előbb csapott be a villám, mint a vonat végénél. (Ellenérvként felvethetnénk, hogy nem a „valódi” egyidejűség leromlásáról van szó, a jelenség csupán a mérési eljárás következménye. Erre természetesen ugyanazt kell válaszolnunk, mint az idődilatációra vonatkozó gondolatkísérlet esetében. Ha az egyidejűségre vonatkozóan bármilyen egyéb kísérletből eltérő eredmény adódna, akkor azzal ellentmondásba kerülnénk az általános relativitási elvvel.)

4.1.3. A távolság relativitása

Az előző két alfejezetben az idővel kapcsolatban megállapítottuk, hogy mind az idő múlása, mind az egyidejűség függ a viszonyítási rendszertől. Ezek után természetesen vetődik fel a kérdés, hogy a távolság nem mutat-e valamilyen hasonló függést. Ehhez vizsgáljuk meg azt, hogy egy a K’-ben levő tárgy x irányú méretét mekkorának méri a K-beli megfigyelő. A mérést legszemléletesebben a következőképpen lehet elvégezni. A két megfigyelő megállapodik egymással, hogy amikor rendszerük egymás mellett elhalad, a K-beli megfigyelő méterrúdját egy, a K’-ben levő táblához illeszti, és egy-egy krétajelet tesz a táblára a méterrúd két végénél. K’-ben ezután az így kapott hosszegységgel végezzük el a méréseket. Nézzük meg, hogy mi következik a fentiekből. Helyezkedjen el K-ban a méterrúd úgy, hogy egyik vége az x_1, a másik az x_2 pontban van. A krétajelek helyzetét K’-ben úgy kapjuk meg, hogy egy adott pillanatban – célszerűen $t = 0$-kor – az x_1 és x_2 pontokat áttranszformáljuk K’-be. Ekkor írhatjuk:

$$x_1' = \frac{x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (29a)$$

$$x_2' = \frac{x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (29b)$$

A méterrúd K'-beli $\Delta' = x_2'-x_1'$ hossza nyilván a (29b)-(29a) egyenletek különbségeként adódik. Tehát:

$$\Delta' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (30)$$

A méterrúd tehát K'-ben hosszabbnak adódik, tehát a mérések eredménye mindig az lesz, hogy K'-ben az x irányú méretek

$$L' = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (31)$$

mértékben megrövidülnek.

4.1.4. A sebességek összeadása

A relativisztikus kinematikával kapcsolatban feltétlenül tisztáznunk kell azt a kérdést, hogy miként számítható ki egy, a K'-ben v' sebességgel mozgó pont sebessége K-hoz viszonyítva. Ez nemcsak azért lényeges, mert az időre és távolságra kapott eredmények alapján nem várhatjuk, hogy a klasszikus képlet ($u=v+v'$) érvényes maradjon, hanem sokkal inkább azért, mert a keresett összefüggésnek vissza kell adnia azt a szemlélet számára meglehetősen idegen tényt, hogy a fényjel sebessége K'-höz, de ezzel egyidőben K-hoz képest is c. (Később majd emlékeznünk kell arra, hogy ezt a feltételt egyben az eredmény ellenőrzésére is fel tudjuk használni.)

A K'-ben az x tengely mentén v' sebességgel mozgó pont egyenlete:

$$x' = v't' \qquad (32)$$

Helyettesítsük be (32)-be a Lorentz transzformációból az időt és a helykoordinátát. Ekkor kapjuk:

$$\frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = v'\frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (33)$$

A pont K-hoz viszonyított sebessége nyilván $u=x/t$, tehát:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \qquad (34)$$

Vizsgáljuk meg közelebbről (34)-et! Először is megállapíthatjuk, hogy a fénysebességhez képest kis sebességek esetén visszakapjuk az $u = v+v'$ klasszikus eredményt. Tekintsük a K'-ben mozgó fényjelet, azaz helyettesítsünk v' helyébe c-t (34)-ben:

$$u = \frac{v + c}{1 + \frac{vc}{c^2}} = c \qquad (35)$$

Képletünk tehát teljesíti eddig megállapított főbb követelményeinket.

Az 1800-as évek első felének egy nagy vitát kiváltó eredményét Fizeau-nak az áramló folyadékban terjedő fény sebességére vonatkozó mérései szolgáltatták. Fizeau ugyanis azt találta, hogy egy n törésmutatójú, v sebességgel áramló folyadékban terjedő fény sebessége nem a várt $u = v+c/n$ (klasszikus megfontolások alapján nyilván ezt várjuk, hiszen ha a fény a folyadékhoz képest c/n sebességgel terjed, a folyadék pedig v sebességgel áramlik, akkor az $u = v+v'$ képletből ez adódik), hanem:

$$u = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (36)$$

(Az eredményt végül is azzal magyarázták, hogy a közeg nem tudja teljes mértékben magával ragadni az étert, ezért az nem veszi fel teljesen a közeg sebességét. Az $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ kifejezést el is nevezték „magával ragadási együtthatónak”.) Nézzük meg, hogy mi adódik Fizeau kísérletére a relativisztikus sebesség összeadási képletből. Helyettesítsünk tehát (34)-be v' helyére c/n-t:

$$u = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{vc}{nc^2}} \qquad (37)$$

A gyakorlatban elérhető áramlási sebességeknél $v<<c$ mindig igaz, ezért a nevezőben $v/nc<<1$, tehát alkalmazhatjuk az $\frac{1}{1+\alpha} \approx 1-\alpha$ közelítést. Ekkor, a beszorzást is elvégezve kapjuk:

$$u = \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2} - \frac{v^2}{nc} = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{v}{nc}\right) \tag{38}$$

Vegyük észre, hogy (38)-ban a zárójelben levő harmadik tag a $v<<c$ miatt az 1-hez is, és $1/n^2$-hez képest is elhanyagolható, így végeredményünk:

$$u = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{39}$$

ami megegyezik (36)-al.

A későbbiekben szükségünk lesz még arra is, hogy hogyan adható meg a K'-ben az y tengely mentén v_y' sebességgel felfelé haladó pont sebessége K-ban. Az y' koorditánára vonatkozóan írhatjuk:

$$y' = v_y' t' \tag{40}$$

Vegyük észre, hogy K' origója K-ban v sebességgel mozog, tehát $x=vt$. Írjuk ezt be az időre vonatkozó transzformációs képletbe:

$$t' = \frac{t - \frac{v^2 t}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{41}$$

Behelyettesítve (40)-et (41)-be, és felhasználva $y'=y$-t kapjuk:

$$v_y = \frac{y}{t} = v_y'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{42}$$

4.2. Relativisztikus dinamika

4.2.1. Relativisztikus tömeg

Az előzőekben a kinematikai alapmennyiségek relativisztikus viselkedését vizsgáltuk meg, figyelmünket most a dinamika felé fordítjuk. Megfontolásainkban lényegében a relativisztikus tömegre szorítkozunk, részben azért, mert ez az egyik központi mennyiség, melynek segítségével a legfontosabb eredmények bemutathatók, részben pedig azért, mert a relativisztikus dinamika egzakt tárgyalása olyan eszközöket követelne meg, amelyek az első évfolyam tananyagán túlmutatnak.

A klasszikus mechanika tárgyalása során láttuk, hogy a Newton II. axiómájának egyenes következményeként adódik az impulzustétel, illetve az impulzus megmaradásának elve, ami a fizika egyik legalapvetőbb megmaradási tétele. Az ütközések vizsgálata során láttuk továbbá azt is, hogy a megmaradási elvek segítségével olyan problémákat is kezelni tudunk, amelyeknél a fellépő erők leírására, és emiatt a mozgásegyenlet alapján történő tárgyalásra esélyünk sincs. Ez felveti annak reményét, hogy az impulzus fogalmán keresztül a tömeg relativisztikus viselkedését vizsgálhatjuk anélkül, hogy bele kellene bonyolódnunk az erő relativisztikus értelmezésébe.

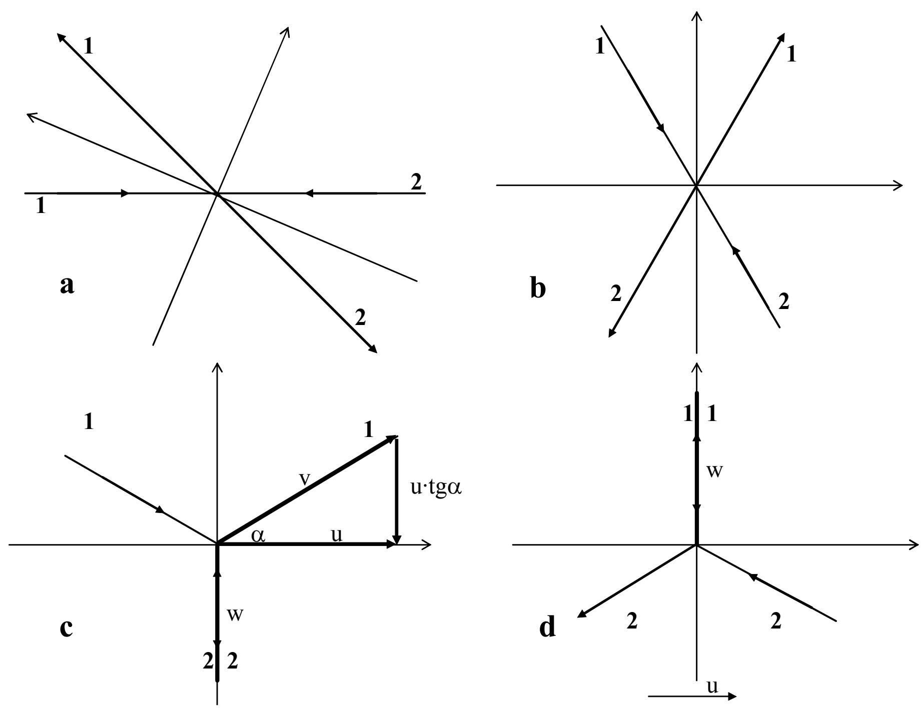
Kiindulásként tekintsük az impulzusra a klasszikus mechanikában kapott kifejezést.

$$\bar{I} = m\bar{v} \qquad (43)$$

Vegyük észre, hogy a (43) kifejezés önmagában még nem klasszikus, attól válik azzá, ha feltételezzük, – mint ahogy azt a Newton axiómák tárgyalása során tettük – hogy a tömeg állandó. A kérdés mármost az, hogy formálisan megtartva az impulzusra a (43) alakot de megengedve azt, hogy a tömeg valamilyen módon függjön a sebességtől, kaphatunk-e valamilyen relativisztikusan is helyes kifejezést, és ha igen, akkor ez mit eredményez a tömegre nézve. Azaz ha feltesszük, hogy az impulzus felírható úgy, mint

$$\bar{I} = m_v\bar{v} \qquad (44),$$

akkor mit tudunk mondani az m_v tömeg sebességfüggéséről. Tekintsük ehhez két részecske rugalmas ütközését. Az ütközés leírásához viszonyítási rendszerünket vegyük fel úgy, hogy az origó essen egybe azzal a ponttal, ahol a részecskék ütköznek, az y tengely pedig essen egybe a beérkező és visszapattanó részecske pályája által bezárt szög szögfelezőjével (4.a ábra). A 4.b ábrán ugyanezt látjuk, csak kényelem kedvéért elfordítottuk úgy az ábrát, hogy az



4. ábra részecske ütközésének szemléltetése

y tengely függőleges legyen. Térjünk át most egy másik viszonyítási rendszerre, amely valamilyen v'_x sebességgel jobbról balra mozog úgy, hogy v'_x megegyezik a 2. sz. részecske vízszintes irányú sebesség komponensével. (Ezt természetesen minden megkötés nélkül megtehetjük miután ez csupán annyit jelent, hogy egy inerciarendszerről egy másikra térünk át.) Ebben a viszonyítási rendszerben az ütközés nyilvánvalóan úgy játszódik le, hogy a 2. sz. részecske *w* sebességgel a függőleges tengely mentén föl-le mozog, míg az 1. sz. részecske *v* sebességgel érkezik be úgy, hogy sebességvektora valamilyen α szöget zár be az x tengellyel (4.c ábra). Legyen az 1. sz. részecske vízszintes sebessége *u*, akkor a függőleges sebesség komponensre nyilván írhatjuk:

$$v_{1f} = u\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{45}$$

A függőleges sebességek ismeretében fel tudjuk állítani az ütközésre az impulzus függőleges komponensének mérlegét. A *w* sebességgel beérkező 2. sz. részecske -*w* sebességgel távozik, tehát teljes impulzus-változása:

$$\Delta I_{2f} = 2m_w w \tag{46}$$

Az 1. sz. részecske esetében a helyzet kissé bonyolultabb. Ennek a részecskének a *tömege* megegyezik a *v* sebességhez tartozó tömeggel, függőleges sebessége $u\mathrm{tg}\alpha$-ról $-u\mathrm{tg}\alpha$-ra változik. Az impulzus függőleges komponensének megváltozása tehát:

$$\Delta I_{1f} = 2m_v u\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{47}$$

Az impulzus megmaradása azt követeli meg, hogy a két részecske impulzusa ütközés előtt és után megegyezzen, ($\Delta I_{1f} = \Delta I_{2f}$), tehát írhatjuk

$$2m_w w = 2m_v u\,\mathrm{tg}\,\alpha \tag{48}$$

A (48) egyenlet három különböző sebességet tartalmaz, ezért nem tudunk világos következtetést levonni belőle. Próbáljunk meg kapcsolatot keresni, mondjuk *u* és *w* között. Térjünk át ebből a célból egy *u* sebességgel mozgó viszonyítási rendszerre. Ebben a rendszerben a két részecske nyilván szerepet cserél (4.d ábra). Ebből az következik, hogy *w* és $u\mathrm{tg}\alpha$ között kapcsolatot találtunk, hiszen $u\mathrm{tg}\alpha$ a K-beli függőleges sebessége egy részecskének, míg *w* ugyanez a sebesség egy olyan K'-ben, amelyik K-hoz képest *u* sebességgel mozog. Alkalmazva tehát a függőleges sebességek transzformációjára korábban kapott (42) kifejezést kapjuk:

$$u\,\mathrm{tg}\,\alpha = w\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{49}$$

Helyettesítsük be (49)-et (48)-ba. Ekkor adódik:

$$m_w = m_v\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{50}$$

Felírva a *v, u,* $u\mathrm{tg}\alpha$ sebességkomponensekre a Pitagorasz-tételt (4.c ábra):

$$v^2 = u^2 + w^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) \tag{51}$$

Tartassuk most *w*-t nullához. Ekkor (51) alapján nyilvánvaló, hogy *u* tart *v*-hez. Írhatjuk tehát:

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{52}$$

Ezzel feladatunkat megoldottuk, miután (52) megadja a tömegre keresett sebességfüggését. Vizsgáljuk meg egy kissé közelebbről a kapott összefüggést. Tüstént észrevesszük, hogy $v>>c$ esetén a tömeg sebességfüggése elhanyagolható, visszakapjuk a klasszikus eredményt. Ha v nagy, akkor viszont az a meglepő eredmény adódik, hogy *a tömeg a sebesség növekedésével nő*. Jegyezzük meg azt is, hogy (52) levezetéséhez nem használtunk fel mást, mint a Lorentz transzformációt – a függőleges sebesség transzformációjára vonatkozó formulán keresztül – és az impulzus megmaradást. Eredményünk tehát a speciális relativitáselmélet egyenes következménye.

4.2.2. Tömeg és energia

Az előző alfejezetben a relativisztikus tömegre vonatkozóan az az érdekes eredmény adódott, hogy az a sebességtől jelentős mértékben függ. Vizsgáljuk meg, hogy ez milyen további következményekkel jár. Tételezzük fel, hogy v a fénysebességhez képest kicsiny. Ekkor (52)-ben alkalmazhatjuk az $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \approx 1+\frac{\alpha}{2}$ közelítést. Ennek alapján írhatjuk:

$$m_v = m_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{53}$$

Szorozzuk be (53)-at c^2-el. Az eredmény:

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 \tag{54}$$

(54) fizikai jelentése a következő. Egy test $E = mc^2$ energiája a nyugalmi tömeghez tartozó m_0c^2 energiának és a (klasszikus) kinetikus energiának az összegeként állítható elő.

Az $E = mc^2$ összefüggést egy közelítés eredményeként kaptuk. Vizsgáljuk most meg azt, hogy mi adódik abból, ha feltételezzük, hogy az *energiára nézve ez az összefüggés egzakt*.

Korábbi tanulmányaink során már láttuk, hogy ha egy anyagi pont erő hatása alatt gyorsul (gyorsítási munkát végzünk), akkor az energia időbeli megváltozására felírható:

$$\frac{dE}{dt} = Fv \tag{55}$$

A relativisztikus tömeg levezetése során már feltételeztük, hogy az impulzus mindig mv alakban írható fel, a klasszikus és relativisztikus eset között a különbség csupán annyi, hogy az utóbbi esetben a tömeg függ a sebességtől. Ezek után logikus azt is feltételezni, hogy Newton II. axiómája az

$$F = \frac{d(m_v v)}{dt} \tag{56}$$

alakban relativisztikusan is érvényes. (Jegyezzük azonban meg, hogy *a tömeg sebességfüggése miatt (56) nem írható át az $F = ma$ alakba.*) Az erőt (56)-ból (55)-be helyettesítve kapjuk:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(m_v v)}{dt} v \qquad (57)$$

Kiinduló feltevésünk értelmében az E helyére mc^2-et írhatunk, azaz:

$$c^2 \frac{dm_v}{dt} = \frac{d(m_v v)}{dt} v \qquad (58)$$

Meg kellene szabadulnunk az (58)-ban fellépő deriváltaktól. Ezt célszerűen úgy tudjuk megtenni, ha az egyenlet két oldalán olyan kifejezéseket alakítunk ki, amelyekről felismerjük hogy minek a deriváltjai. Szorozzuk meg (58) mindkét oldalát $2m_v$-el:

$$c^2 2m_v \frac{dm_v}{dt} = 2m_v v \frac{d(m_v v)}{dt} \qquad (59)$$

Most már felismerjük, hogy (59) bal oldalán a c^2m^2 kifejezés, a jobb oldalán pedig az $(mv)^2$ kifejezés deriváltja áll. A deriváltak egyenlőségéből következik, hogy a két kifejezés legfeljebb egy konstansban különbözhet egymástól. Írhatjuk tehát:

$$m_v{}^2 c^2 = m_v{}^2 v^2 + K \qquad (60)$$

Hátravan még a K állandó meghatározása. Miután a (60) egyenletnek minden sebességre igaznak kell lennie, ezért nincs akadálya, hogy $v = 0$-t helyettesítsünk be. Ekkor kapjuk:

$$m_0{}^2 c^2 = 0 + K \quad \Rightarrow \quad K = m_0{}^2 c^2 \qquad (61)$$

K-t (61)-ből (60)-ba beírva adódik:

$$m_v{}^2 c^2 = m_v{}^2 v^2 + m_0{}^2 c^2 \qquad (62)$$

Fejezzük ki a (62) egyenletből mv-t! Ekkor:

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (63),$$

ami éppen a relativisztikus tömegre kapott (52) kifejezés. Ezzel tehát bizonyítottuk azt, hogy az $E = mc^2$ összefüggés, amelyet kis sebességek esetére közelítésként kaptunk, tetszőleges sebességekre is érvényes.

Idézzük fel az $E = mc^2$ összefüggés alapjául szolgáló (54) egyenletet, és osszuk el mindkét oldalát c^2-el:

$$m_v = m_0 + \frac{\frac{1}{2} m_0 v^2}{c^2} \qquad (64)$$

Ez az egyenlet azt jelenti, hogy ha *egy testnek valamilyen E_{kin} kinetikus energiát adunk, akkor annak tömege E_{kin}/c^2-el nő*. Ezzel a speciális relativitáselméletnek talán legfontosabb eredményéhez jutottunk el. A klasszikus fizikában a tömeg és az energia megmaradásának tétele külön-külön alapvető fontosságú. A relativitáselmélet pedig éppen arra mutat rá, hogy a tömeg és energia egymásba alakulásával ez a két megmaradási elv összeolvad.

Az $E=mc^2$ összefüggés nemcsak fizikai szempontból fontos, hanem ez talán az egyik leginkább elhíresült eredménye a modern fizikának. Ez főképp annak tudható be, hogy szorosan összefonódott a nukleáris energia békés és katonai célú felhasználásával, sőt sokak szemében egyszerűen az atombomba megalkotásának szimbólumává vált. Dürenmatt „Fizikusok" c. drámájában is ez az az eredmény, aminek kapcsán az író a tudósok felelősségét boncolgatja. Azt gondolom, hogy az előző fejezetben ismertetett gondolatmenetünkből világosan látható, milyen igazságtalan és félrevezető Dürenmattnak az az okfejtése, amelyben a tudóst személyében teszi felelőssé tudományos felfedezéseinek esetleges negatív következményeiért. Hol kellett volna Einsteinnek megállnia okoskodásában? A fénysebesség állandóságának elvénél, vagy esetleg a relativitási elvnél? A Lorentz transzformáció még feltehetően elfogadható, és talán az idődilatációval sincsen baj, de azt a kérdést már nem lett volna szabad felvetnie, hogy miképpen néz ki a relativisztikus tömeg? A felvetett kérdésekért és felfedezésekért a kutató nyilvánvalóan nem tartozik személyes felelősséggel. Felelőssége abban áll – és ez sem kevés –, hogy a közvéleményt a feltáruló lehetőségekről és a lehetséges kockázatokról a legjobb tudása szerint és őszintén tájékoztassa.

5. A speciális relativitáselmélet kísérleti bizonyítékai

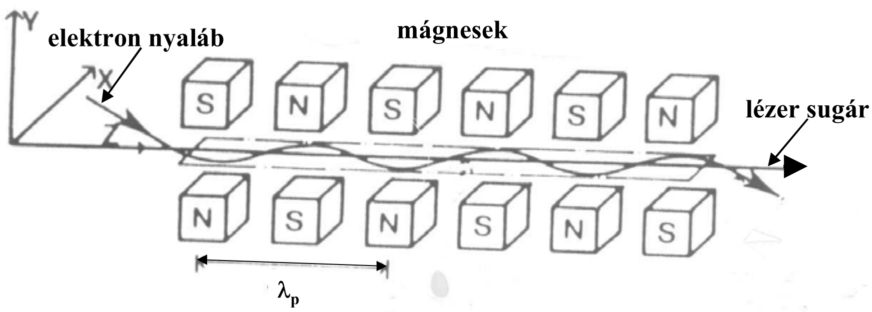
A speciális relativitáselmélet korábbi megfontolásaink szerint egy teljesen zárt és ellentmondásmentes konstrukciónak látszik, ez azonban egy fizikai elmélet esetében nem elegendő ahhoz, hogy elfogadjuk. Szükség van egyértelmű kísérleti bizonyítékokra is. A következő fejezet célja az, hogy ilyen bizonyítékokat ismertessünk.

5.1. Idődilatáció

Az idődilatáció volt az a relativisztikus jelenség amelyre a legkorábban találtak kísérleti bizonyítékot. A μ-mezonok, vagy müonok olyan részecskék, amelyek mintegy 2 μs alatt spontán lebomlanak. A kísérleti tapasztalatok viszont azt mutatták, hogy a légkörbe beérkező kozmikus sugárzás által 10 km-nél nagyobb magasságban keltett müonok leérkeznek a Föld felszínére. Ez első látásra teljesen lehetetlennek tűnik, hiszen 2 μs alatt még fénysebességgel mozogva is legfeljebb 600 m-t tehetnének meg. Hogyan tudnánk megmagyarázni ezt a jelenséget? A földi megfigyelő a következőképpen okoskodhat. A müon a saját belső „órája" szerint valóban csak 2 μs-ig él, azonban ez az óra a müon nagy – fénysebességhez közeli – sebessége miatt jelentősen lelassul, így a müon valóban leérhet a Föld felszínére. A kérdés ezután az, hogy a müon rendszerében tudjuk-e értelmezni a jelenséget? A müon természetesen saját sebességéről nem tud, így nem mondhatja azt, hogy órája lelassul. Ő a saját mérése szerint 2 μs-ig él, ugyanakkor azt észleli, hogy a Föld nagy sebességgel közeledik felé, aminek következtében a légkör Lorentz kontrakciót szenved, így vastagsága úgy lecsökken, hogy a 2 μs elegendő ahhoz, hogy áthatoljon rajta.

A mai technika már közvetlenül is lehetőséget nyújt az idődilatáció ellenőrzésére. A mesterséges holdakon keringő atomórák járásában már közvetlenül is kimutatható a hasonló földi órákhoz képest a késés. Így pl. a globális helyzetmeghatározó rendszerben (GPS) a mesterséges holdakon keringő órák járását úgy állítják be, hogy a Földön nem, hanem csak pályájukra állítva járnak szinkronban a földi órákkal. Ha az idődilatációt nem vennék figyelembe, a GPS rendszer napi 2 km-t (!) tévedne.

5.2. A Lorentz kontrakció



5. ábra A szabadelektron lézer működési elve

A Lorentz kontrakcióra már a müonok példája is szolgáltatott bizonyítékot, azonban ennél sokkal közvetlenebb bizonyítékok is állnak rendelkezésünkre. Ezek közül talán az egyik legszemléletesebb az ún. szabadelektron lézerek hullámhosszával kapcsolatos. Az ilyen lézerek működési elve röviden a következő. Ha az elektronok –, vagy más töltött részecskék – egyenesvonalú, egyenletes mozgást végeznek akkor sugárzást nem bocsátanak ki. Ha viszont a töltött részecskék gyorsuló mozgást végeznek, akkor elektromágnes sugárzást bocsátanak ki. Így például ha egy nagysebességű elektronnyalábot belövünk egy olyan mágnes pofái közé – ez az ún. wiggler – ahol az északi és déli pólusok periodikusan váltakoznak, akkor az elektronok hullámvonalban mozognak, aminek következtében gyorsulnak, tehát sugárzást bocsátanak ki (5. ábra). Alkalmas körülmények között a mágnes tengelyének irányában lézersugárzás jelenik meg. A sugárzás periódusideje nyilván megegyezik azzal az idővel amely alatt az elektron a mágnes egy periódusa mellett elhalad. Ha feltételezzük, hogy az elektronok sebessége megegyezik a fénysebességgel, akkor egyfelől a rezgés periódusideje $T = \lambda_p/c$ (ahol λ_p a mágnes periódusa) másfelől viszont a kibocsátott sugárzás λ_l hullámhosszára teljesül, hogy $T = \lambda_l/c$ amiből következik $\lambda_l = \lambda_p$. A klasszikus gondolatment tehát azt jósolja, hogy a lézer hullámhossza megegyezik a mágnes periódusával. Ha ez így lenne, a szabadelektron lézerek legfeljebb a mikrohullámok tartományában működhetnének, miután praktikus okok miatt a mágnes periódusa néhány cm-nél kisebb nem lehet. Szerencsére azonban a klasszikus gondolatmenet nem érvényes a Lorentz kontrakció miatt. Ennek megfelelően a közel fénysebességgel mozgó elektronok a mágnes periódusát több tízezerszer megrövidülni látják, így a cm-es mágneses periódus mellett a szabadelektron lézer akár a látható fény tartományában is működhet. Az elektronok energiájának ismeretében kiszámítható a várható Lorentz kontrakció, aminek ismeretében megadható a lézer hullámhossza. A számított és mért értékek teljes mértékben összhangban vannak.

5.3. A relativisztikus tömeg

A relativisztikus tömegképlet bizonyítására minden olyan kísérlet alkalmas, amelyben részecskék tömegfüggetlen gyorsító erő hatása alatt mozognak. Így például a ciklotronban a nagysebességű elektronok a mágneses térben fellépő Lorentz erő által meghatározott körpályán mozognak. A körpálya sugarából nagy pontossággal meghatározható az elektron tömege. Az ilyen mérések teljes mértékben alátámasztják a relativisztikus tömegre kapott (52) összefüggésünket.

A tömeg-energia ekvivalenciára is számos közvetlen kísérleti bizonyíték áll rendelkezésre. Ezek közül a legszemléletesebb talán az, hogy nagy energiájú részecskék ütközésekor rutinszerűen megfigyelhető olyan részecskék keletkezése, amelyeknek (nyugalmi) tömege több milliószorosan meghaladja az ütköző részecskék nyugalmi tömegét. A beérkező részecskék mozgási energiája tehát tömeggé alakul át. A fordított folyamat a nukleáris reaktorokban figyelhető meg, ahol a magátalakuláskor az átalakuló anyag tömegének kis mértékű csökkenése fedezi a felszabaduló energiát.