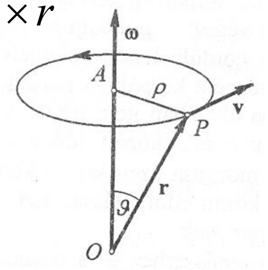
Merev testek kinematikája

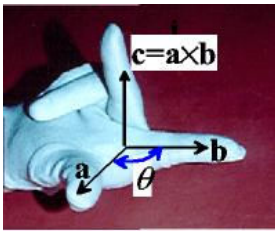
Egy pontrendszert merev testnek tekintünk, ha bármely két pontjának távolsága állandó. (f=6, Euler)

A merev test tetszőleges mozgása leírható elemi transzlációk és elemi rotációk összegeként.

Elfordulás a z-tengely körül:

$$v_y = x\omega, \quad v_x = -y\omega, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

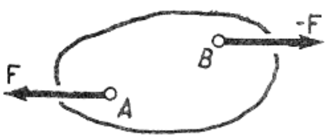




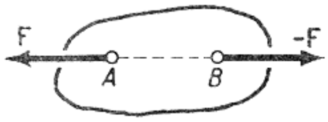
jobbkéz-szabály

Merev testre ható erőrendszer redukálása 1.

A merev test két egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő hatása alatt akkor van egyensúlyban, ha az erők hatásvonalai egybeesnek.



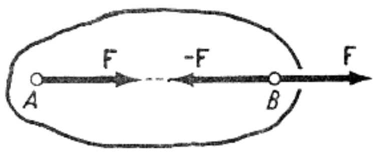
nincs egyensúlyban



egyensúlyban van

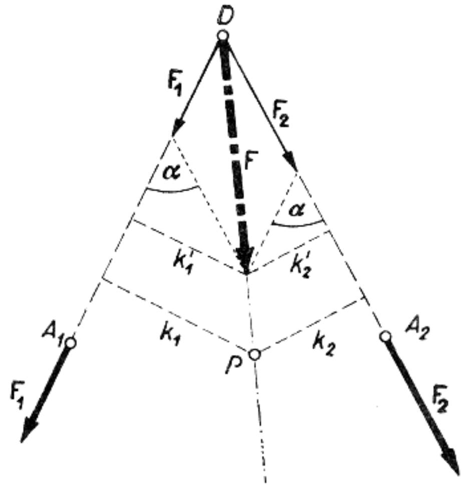
Merev testre ható erőrendszer redukálása 2.

A merev testre ható erő támadáspontja a testben a ***hatásvonal mentén*** tetszőlegesen eltolható.



Merev testre ható erőrendszer redukálása 3.

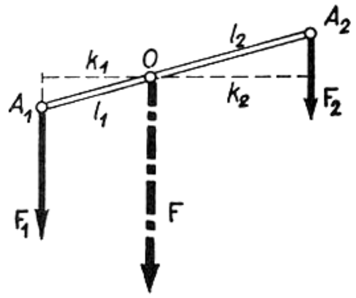
Két nem párhuzamos hatásvonalú erő összetevése.



$$F_1 k_1 = F_2 k_2$$

Merev testre ható erőrendszer redukálása 4.

Két párhuzamos hatásvonalú, azonos irányú erő összetevése.

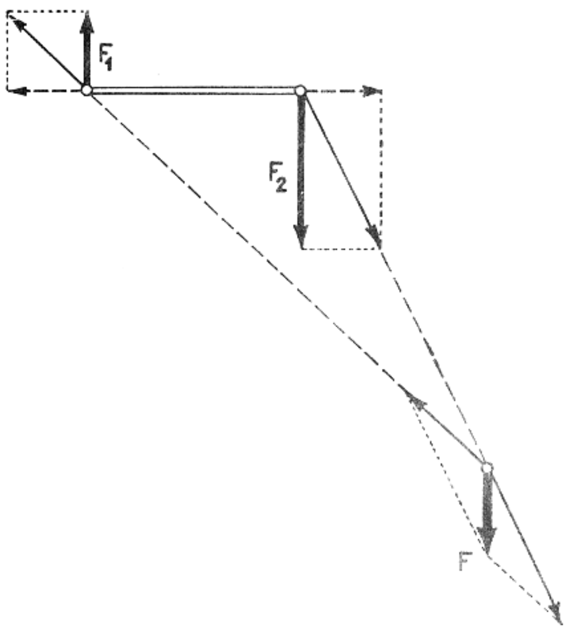


$$F = F_1 + F_2$$

$$F_1 k_1 = F_2 k_2$$

Merev testre ható erőrendszer redukálása 5.

Két párhuzamos hatásvonalú, ellentétes irányú, de nem egyenlő nagyságú erő összetevése.



Az erőpár

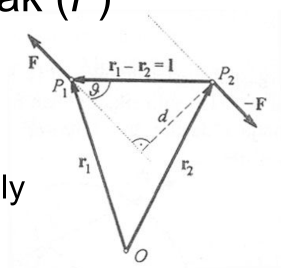
Erőpár: két antiparalel, egyenlő nagyságú és különböző hatásvonalú erő. Hatása NEM helyettesíthető egyetlen erővel.

Az ***erőpár forgatónyomatéka*** független a forgáspont helyzetének megválasztásától, iránya – a jobbcsavarnak megfelelően – merőleges az erőpár síkjára, nagysága pedig az erőkar (d) és az egyik erő nagyságának (F) szorzatával egyezik meg.

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{l} \times \vec{F}$$

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{l}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin\vartheta = F \cdot d$$

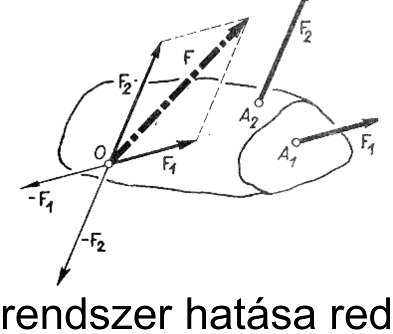
irány: jobbkéz-szabály



A ***tengelyre vonatkoztatott forgatónyomaték*** ekvivalens az erőpár forgatónyomatékával (az erő „párja" a tengelyben ébred).

Tetszőleges erőrendszer redukálása

Ha egy merev testre n db erő hat, akkor ezen erők hatása ekvivalens a test egy O pontjában vett eredőjük és az erőkből képezhető n erőpár forgatónyomatékainak hatásával.



Egy tetszőleges erőrendszer hatása redukálható egy eredő erőre és egy eredő forgatónyomatékra.

A merev test egyensúlya

A merev test akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha

- a rá ható erők eredője zérus ÉS van legalább egy olyan pontja, melyre nézve a nyomatékok összege is zérus. (A Budó könyv definíciója hibás!) vagy
- a nyomatékok összege a test bármely pontjára vonatkoztatva zérus. (Nincs benne a Budóban.)

A tömegközéppont megkeresése

Egy test súlypontja az a pont, melyen a test súlyának hatásvonala a test minden helyzetében átmegy, s amely pont ezért a test súlyának támadáspontjaként tekinthető.

Az egyensúlyi helyzetek típusai és jellemzésük.

Egyszerű gépek (emelők, csigák, csigasorok, ék, csavar)

Rögzített tengely körül forgó merev test -> tehetetlenségi nyomaték

Az impulzusmomentumot eddig pontra vonatkoztatva ismertük. Ezt most ki szeretnénk terjeszteni tengelyre.

$$N_z = \omega \sum_i m_i l_i^2 = \omega \Theta$$

Θ kiszámítása néhány egyszerű esetben

Mozgásegyenlet:

$$M_z = \Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Megfelelések

Haladó mozgás x tengely mentén		Forgómozgás z-tengely körül	
koordináta	x	szögelfordulás	φ
sebesség	v_x	szögsebesség	ω_z
gyorsulás	a_x	szöggyorsulás	β_z
tömeg	m	tehetetlenségi nyomaték	Θ
erő	F_x	formatónyomaték	M_z
impulzus	I_x	impulzusmomentum	N_z
mozgásegyenlet	$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$	mozgásegyenlet	$M_z = \Theta\frac{d^2\varphi}{dt^2}$
kinetikai energia	$\frac{1}{2}mv_x^2$	kinetikai energia	$\frac{1}{2}\Theta\omega_z^2$

Steiner tétel

- Ha ismerjük egy *m* tömegű test tehetetlen-ségi nyomatékát egy a tömegközéppont-ján átmenő tengelyre vonatkozóan, akkor egy ezzel párhuzamos, tőle *s* távolságban levő másik tengelyre vonatkozóan:

$$\Theta = \Theta_{TKP} + ms^2$$

Henger/cső tiszta gördülése lejtőn

$$a_{TKP} = \frac{mgR^2 \sin\alpha}{\Theta}$$

Ingák (matematikai, fizikai, torziós, reverziós)

Egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerek 1.

Galilei-féle relativitási elv: Az egymáshoz képest evem-t végző koordináta rendszerek a mechanikai/fizikai (Einstein) jelenségek leírása szempontjából ekvivalensek.

Gyorsuló transzlációt végző rendszerek: Ha egy inerciarendszerhez képest a_0 gyorsulású evev mozgást végző koordináta rendszerben akarjuk alkalmazni a dinamika alapegyenletét, akkor az inerciarendszerben is fellépő erőkhöz hozzá kell adnunk a tehetetlenségi erőt is: $F_{tehetetlen} = -ma_0$

Egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerek 2.

Forgó koordináta-rendszerek: Egy inerciarendszerhez képest ω szögsebességgel forgó rendszerben az *m* tömegű anyagi pontra az inerciarendszerben is fellépő erőkhöz hozzá kell adnunk a következő két tehetetlenségi erőt is:

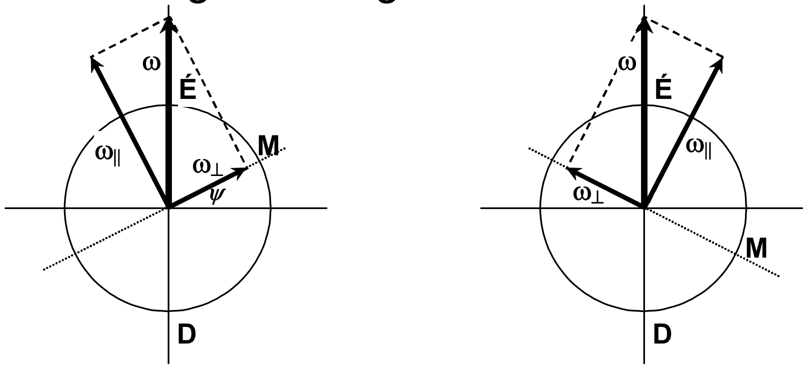
$$\vec{F}_{centrifugális} = m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

$$\vec{F}_{Coriolis} = 2\cdot m\cdot\vec{v}\times\vec{\omega}$$

A Föld mint forgó rendszer

- Centrifugális erő (lapultság, a súly helyfüggése)
- Coriolis-erő:

a szögsebesség vektor felbontása



Északi féltekén Déli féltekén

$$\vec{F}_{Coriolis} = \vec{F}_{Coriolis\perp} + \vec{F}_{Coriolis\,\|} = 2\cdot m\cdot\vec{v}\times\vec{\omega}_{\perp} + 2\cdot m\cdot\vec{v}\times\vec{\omega}_{\|}$$

Coriolis-erő

$F_{C\perp}$ **hatására** (az északi féltekén)

a Foucault-inga jobbra tér ki

a lövedékek jobbra térülnek el

passzátszelek, ciklonok jönnek létre

$F_{C\|}$ **hatására** (mindkét féltekén azonosan)

a szabadon eső testek a talppontjuktól keletre esnek

a nyugatra mozgó testek látszólagos súlynövekedése (Eötvös effektus)

Szilárd testek rugalmassága

*Rugalmas*nak nevezünk egy szilárd testet akkor, ha a test alakját megváltoztató erők hatására a testben olyan erők ébrednek, melyek a test eredeti alakját vissza igyekeznek állítani.

Hooke-féle törvény:
Ha az alakváltozás, vagy a deformáló erő elegendően kicsiny (az arányossági határ alatt marad), akkor az alakváltozás arányos a deformáló erővel.

A következőkben kizárólag *homogén* és *izotróp* esetekkel foglalkozunk.

Nyújtás

Hooke-törvény

E: rugalmassági, nyújtási, vagy Young-féle modulus

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{q} \qquad \varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$$

ahol $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ relatív megnyúlás

$\sigma = \frac{F}{q}$ húzófeszültség

Harántösszehúzódás:

$$\mu = \frac{-\Delta d / d}{\Delta l / l}$$

μ: Poisson-féle szám, vagy harántösszehúzódási együttható

nyújtásnál/összenyomásnál a térfogat növekszik/csökken

Egyenletes nyomás (folyadékokban, gázokban)

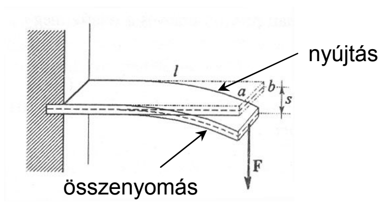
$$-\frac{\Delta V}{V} = \kappa \cdot p$$

κ: kompresszibilitás, vagy összenyomhatósági együttható

Hajlítás, nyírás, torzió

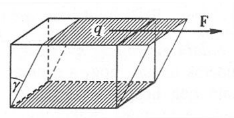
Téglalap keresztmetszetű homogén rúd szabad végének lehajlása:

$$s = \frac{4}{E}\frac{l^3}{ab^3}F$$



Nyírás, vagy csúsztatás:

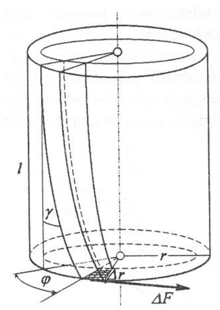
$$\gamma = \frac{1}{G}\frac{F}{q}$$



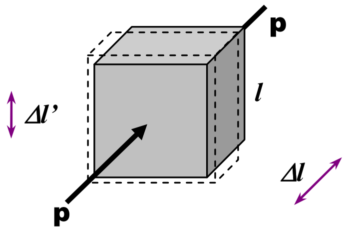
ahol *G* a nyírási vagy torziómodulus

Csavarás, vagy torzió:

$$\varphi = \frac{2}{\pi G}\frac{l}{r^4}M$$



Rugalmas állandók összefüggése



Az összenyomás mindig térfogatcsökkenéssel jár!

$$0 < \mu < 0.5$$

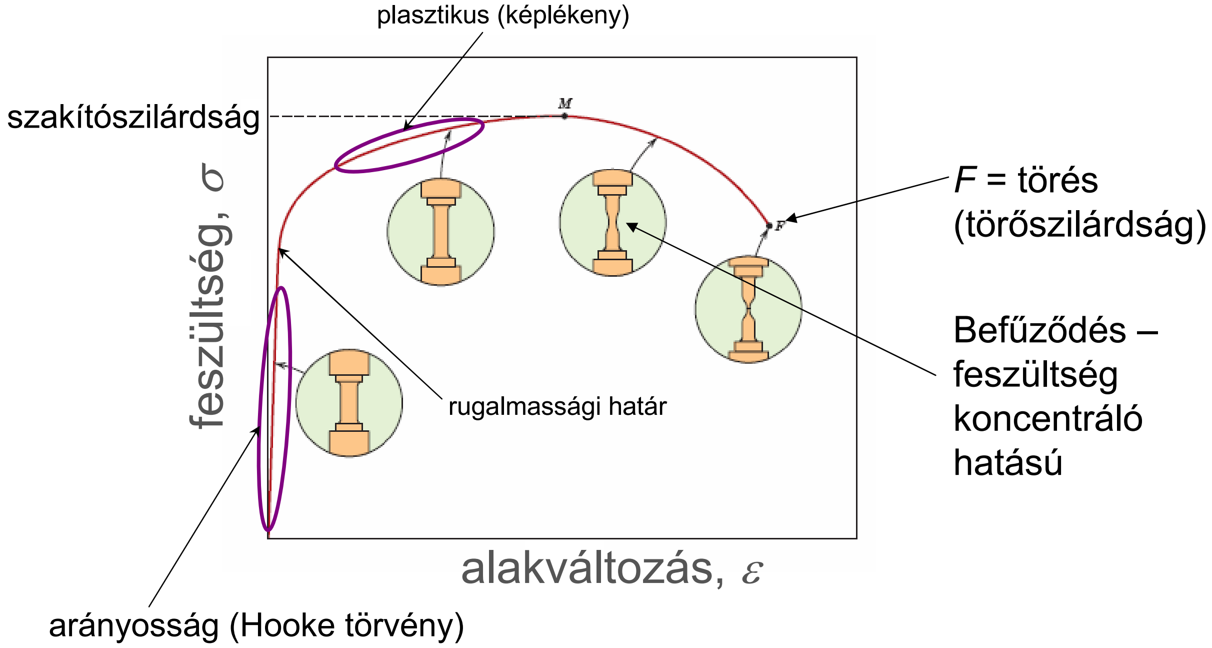
$$\kappa = 3\frac{1-2\mu}{E}$$

Szintén megmutatható:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

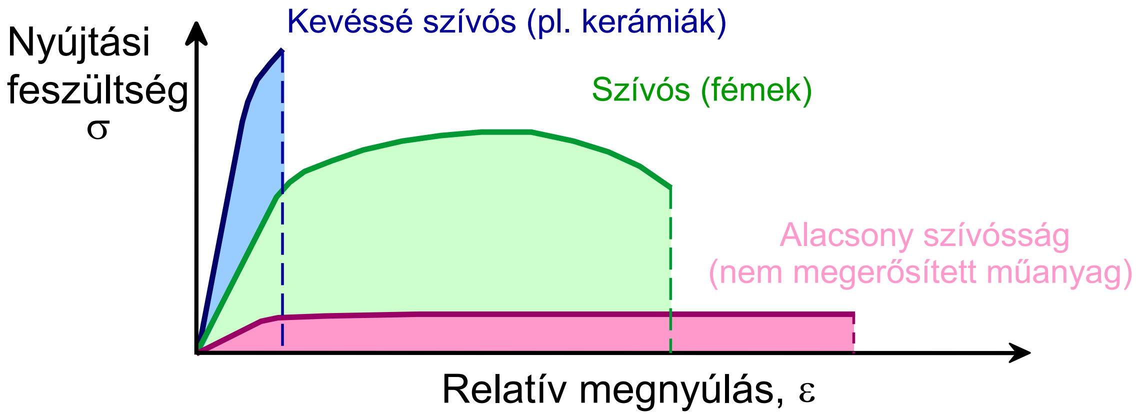
Az izotróp testek rugalmas viselkedése 2 független állandóval jellemezhető.

Feszültség-megnyúlás grafikon



hasonló görbék másfajta igénybevételre (összenyomás, hajlítás, nyírás és csavarás) is felvehetőek

Szívósság


Nyújtási
feszültség
σ
Kevéssé szívós (pl. kerámiák)
Szívós (fémek)
Alacsony szívósság
(nem megerősített műanyag)
Relatív megnyúlás, ε