

# Ismétlés

- Mozgó vonatkoztatási rendszerek
- Szilárd testek rugalmassága. (nyújtás és összenyomás, hajlítás, nyírás, csavarás)
- A rugalmassági állandók közötti összefüggések.
- Szilárd testek viselkedése az arányossági határon kívül.

# Nyújtás

Hooke-törvény

$E$ : rugalmassági, nyújtási, vagy Young-féle modulus

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \frac{F}{q} \quad \text{ahol} \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{relatív megnyúlás}$$

$$\sigma = \frac{F}{q} \quad \text{húzófeszültség}$$

Harántösszehúzódás:

$$\mu = \frac{-\Delta d/d}{\Delta l/l}$$

$\mu$ : Poisson-féle szám, vagy harántösszehúzódási együttható

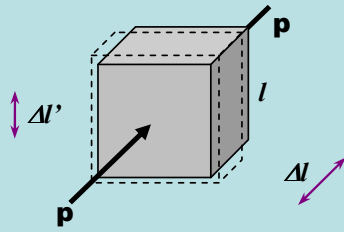
nyújtásnál/összenyomásnál a térfogat növekszik/csökken

Egyenletes nyomás (folyadékokban, gázokban)

$$-\frac{\Delta V}{V} = \kappa \cdot p$$

$\kappa$ : kompresszibilitás, vagy összenyomhatósági együttható

# Rugalmas állandók összefüggése



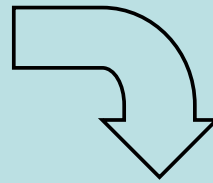
Az összenyomás mindig térfogatcsökkenéssel jár!

$$0 < \mu < 0.5$$

$$\kappa = 3 \frac{1 - 2\mu}{E}$$

Szintén megmutatható:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$



Az izotróp testek rugalmas viselkedése 2 független állandóval jellemezhető.

## Fluidumok mechanikája

Fluidum: folyadékok és gázok

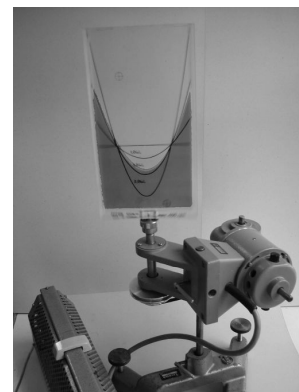
Tárgyalásuk mikroszkópikus szinten igen bonyolult -> fenomenologikus modell

A fluidum-modell alapfeltevése:

nyugvó fluidumban nincs nyírófeszültség.

(surlódásmentes, vagy ideális egy folyadék: ha mozgás közben sincs nyírófeszültség)

Következmény: a nyugvó folyadék szabad felszíne merőleges a rá ható erők eredőjére.

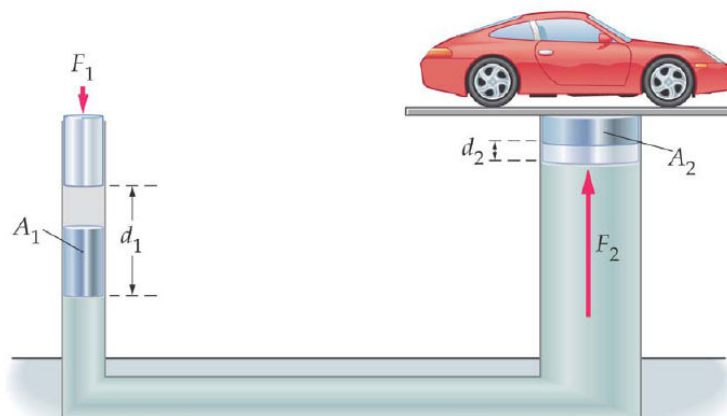


# Pascal törvény

Edénybe zárt, súlytalan, nyugvó fluidumban a nyomás 1) mindenütt ugyanakkora és 2) nem függ a felület irányától (*izotróp*).



vizi buzogány



hidraulikus sajtó

## Hidrosztatika

A fluidumok közül a folyadékokat összenyomhatatlannak, azaz állandó sűrűségűnek, míg a gázokat teljesen összenyomhatónak, azaz változó sűrűségűnek tekintjük.

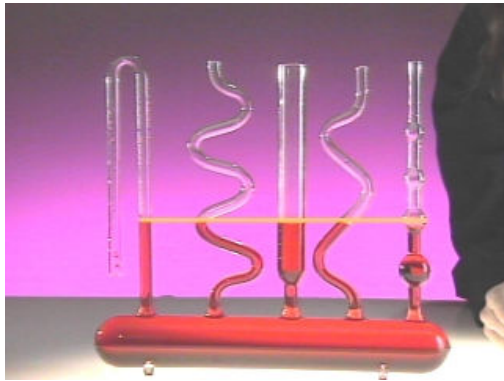
A nehézségi erő hatása alatt álló folyadékban nyomáseloszlás tart egyensúlyt a folyadék súlyából származó erőkkel. → **hidrosztatikai nyomás:**



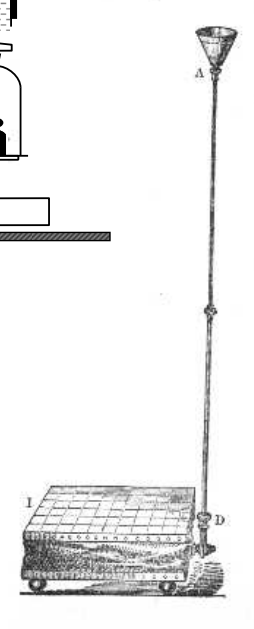
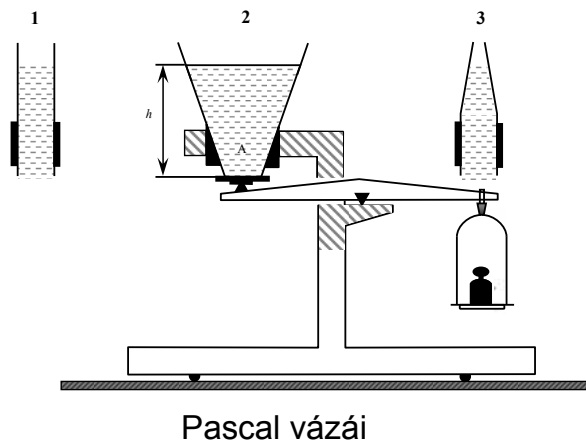
$$p_{\text{hidrosztatikai}} = \rho g h$$

vérnyomásmérés, elviselhető max. gyorsulás (4-5g)

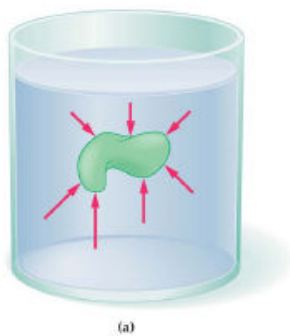
# Hidrosztatikai paradoxon



Közlekedőedények (artézi kút)

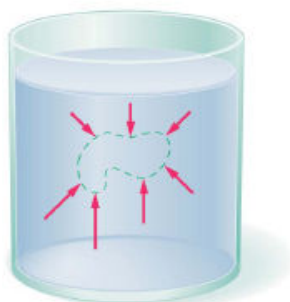


# Arkhimédész törvénye 1.



(a)

Egy folyadékba merülő testre **felhajtóerő** hat, amely nagyságra nézve megegyezik a test be-merülő részével azonos térfogatú folyadék súlyával. A felhajtóerő támadáspontja egybe-esik a kiszorított folyadék rész súlypontjával.

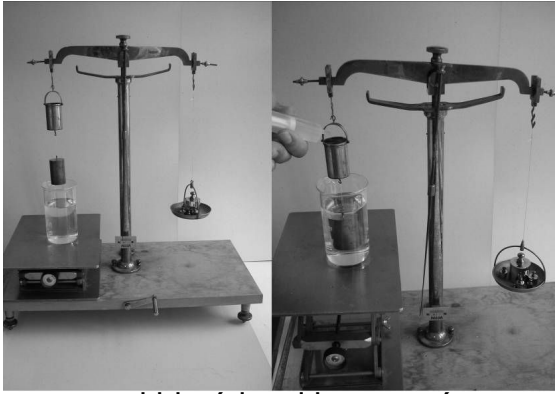


(b)

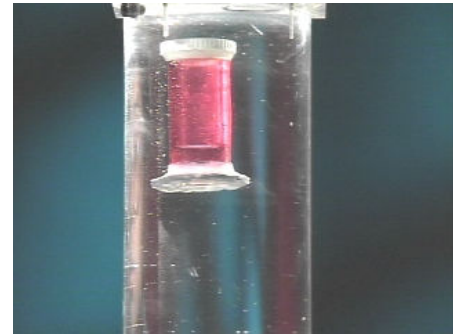
$$F_{\text{felhajtó}} = \rho_{\text{folyadék}} V g$$

Ahhoz, hogy Arkhimédész törvénye érvényes legyen szükség van arra, hogy a testet minden irányból folytonos folyadék réteg vegye körül!

# Arkhimédész törvénye 2.

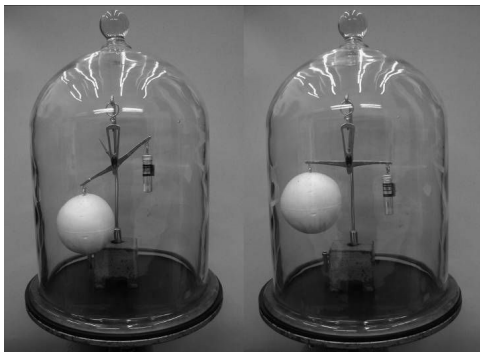


arkhimédészi hengerpár



Cartesius-búvár  
(tengeralattjárók)

gázokban is jelentős lehet

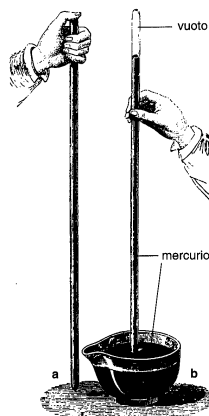


areométer

# Aerosztatika, légnyomás



Evangelista Torricelli



1643

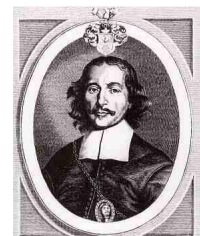


Vincenzo Viviani



Pascal kísérletei a Torricelli úr miben-  
létének tisztázására

Otto von Guericke magdeburgi féltekéi



# Gázok nyomása



**Boyle-Mariotte törvény:** Adott hőmérsékletű és tömegű gáz térfogatának és nyomásának szorzata állandó.



**Barometrikus magasságképlet:**

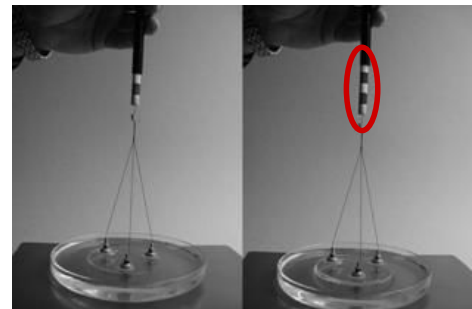
$$p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$$
$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$$

Nyomásmérők és szivattyúk (egyéni feldolgozás)

kémény huzat

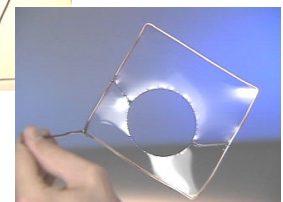
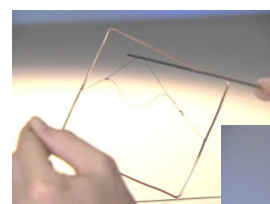
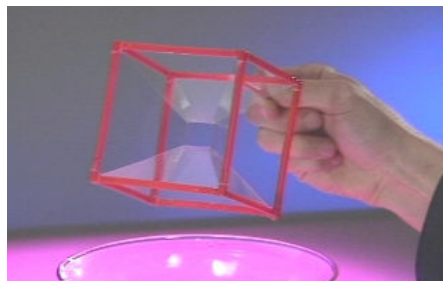
## Molekuláris erők folyadékokban

Adhéziós erő, kohéziós erő  
illeszkedési szög



*felületi feszültség:* a folyadék szabad felszínének egységni megnöveléséhez szükséges munka (dimenziótól eltekintve)

Minimálfelületek:



# Eötvös törvény

A felületi feszültség hőmérsékletfüggése:

$$\alpha V^{2/3} = k_E (T_0 - T)$$

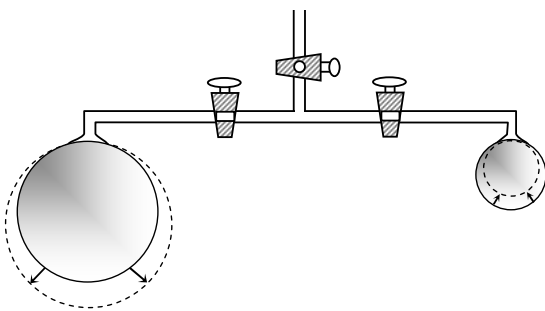
ahol

- $\alpha$  felületi feszültség
- $V$  moláris térfogat
- $T_0$  kritikus hőmérséklet

$$k_E \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-2/3}$$

meleg vizes mosás

## Görbületi nyomás, kapillaritás

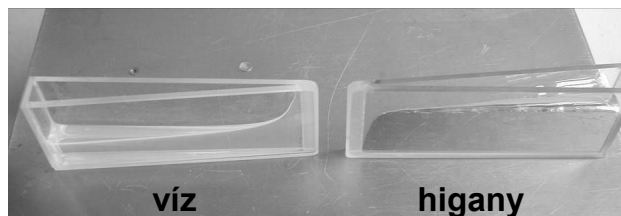


“kicsi a bors de erős”

$$p_{\text{görbületi}} = \frac{2\alpha}{r}$$

Kapilláris emelkedés:

$$h = \frac{2\alpha \cos \vartheta}{\rho r g}$$



# Áramlástan

Az áramlási tér leírása:  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $p(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$

Áramvonalak és szemléltetésük (Pohl-készülék)

A tér minden egyes pontjában a sebesség az áramvonal érintőjének irányába mutat, nagyságát pedig a felületegységre jutó áramvonalak száma adja meg.

Az áramvonalak a nulla sebességű pontok kivétele-lével nem metszhetik egymást.

Áramlási cső: áramvonalak által határolt térrész → a cső falán nem lép át fluidum

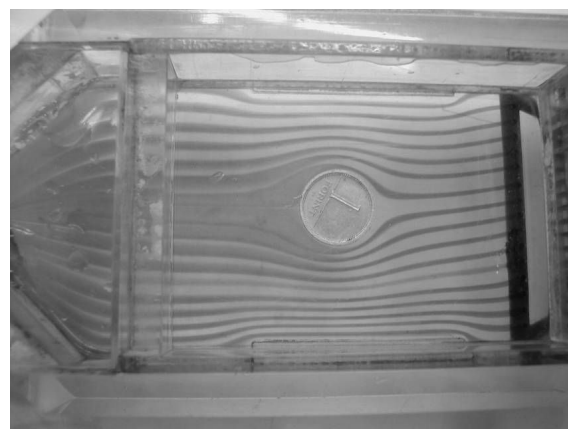
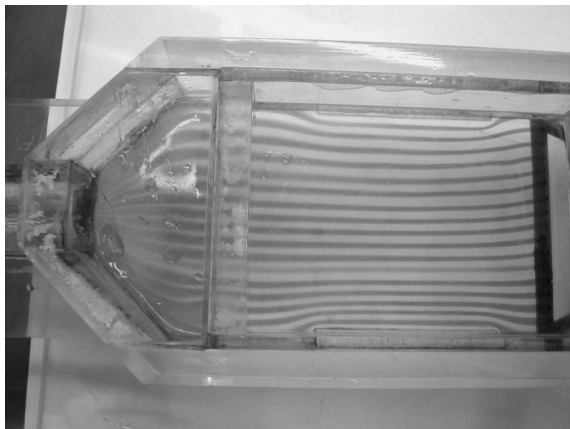
Kontinuitási egyenlet (az anyagmegmaradást fejezi ki):

$$\rho Av = \text{állandó}$$

összenyomhatatlan esetben:  $Av = \text{állandó}$

A gázok áramlástanai szempontból általában a folyadékokhoz hasonlóan összenyomhatatlan közegként viselkednek!

## A kontinuitási egyenlet



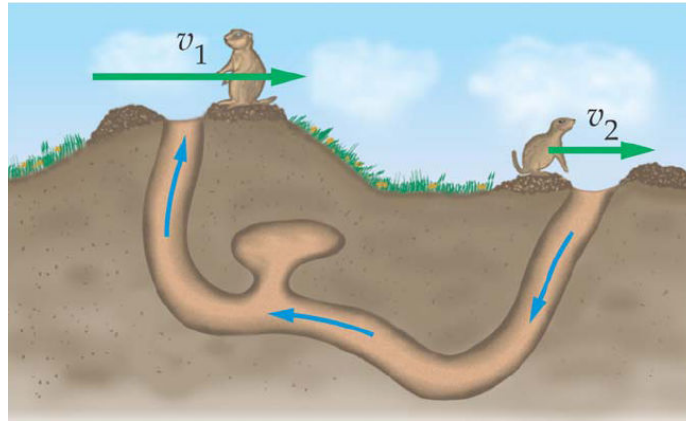
a beszűkült keresztmetszetenél  
az áramvonalasűrűség nagyobb



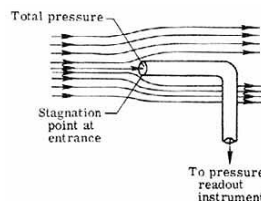
# Bernoulli-törvény

Összenyomhatatlan, surlódásmentes (ún. ideális) folyadék stacionárius áramlására fennáll, hogy

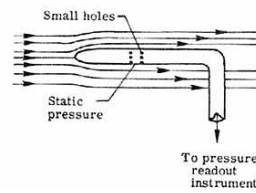
$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{állandó}$$



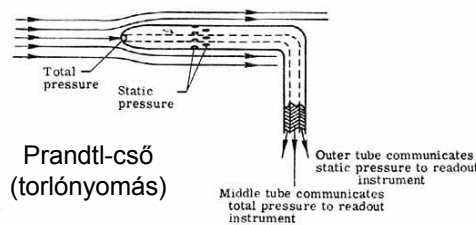
## A Bernoulli-törvény alkalmazásai



Pitot-cső (teljes nyomás)

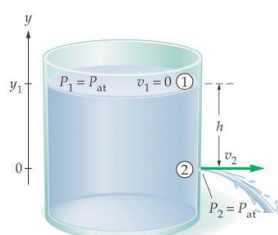


Venturi-cső (sztatikai nyomás)

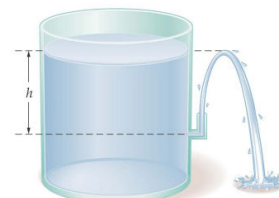


Prandtl-cső (torlónyomás)

## Toricelli törvény



$$v_2 = \sqrt{2gh}$$



# Források és nyelők

Az áramvonalak vagy zárt görbéket alkotnak, vagy forrásból indulnak és nyelőben végződnek.

Pontszerű forrást jellemzi a  $Q$  **forrásaerősség**:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

a folyadék mennyiségének  
változási gyorsasága

mely gömbszimmetrikus áramlási teret hoz létre:

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{4r^2 \pi} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

az áramlás sebessége

# Örvényes áramlások

Akkor jön létre, ha a fluidum valamely része haladó mozgása mellett forgó mozgást is végez ( $\omega$ ).

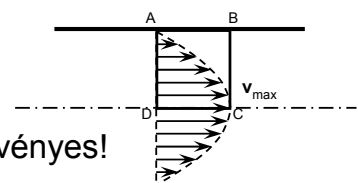
Örvénytér, örvényvonal (a sebességtér és az áramvonal analógiái)

Homogén örvénytér, záródó örvényvonalak

Cirkuláció:

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}_s ds$$

Egy áramlási tér valamely tartománya akkor és csak akkor örvénymentes, ha a tartományban felvett bármely zárt görbe mentén a cirkuláció nulla.



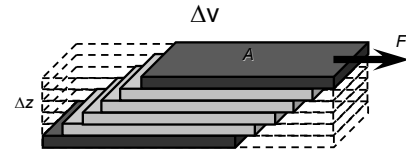
a parabolikus sebességprofillal leírt áramlási tér örvényes!

# Surlódó, viszkózus folyadék

Tapadási feltétel: a fallal érintkező részecskék falhoz képesti relatív sebessége zérus.

Newton-féle viszkozitási törvény:

$$F = \eta A \frac{dv}{dz}$$

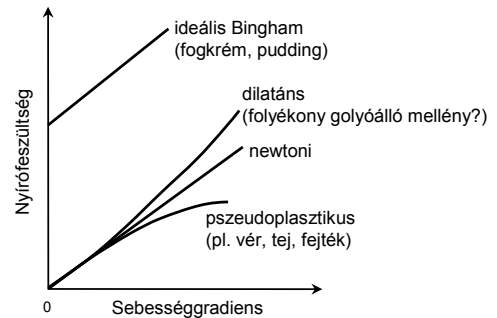


$\eta$  viszkozitási együttható, dinamikai viszkozitás

erősen függ T-től

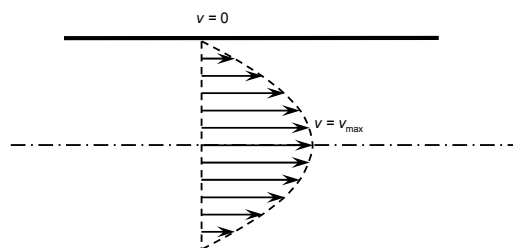
és függhet a nyírófeszültségtől is!

$$\frac{F}{A} = \sigma_{nyíró} = \eta \frac{dv}{dz}$$



## Parabolikus sebességprofil

A hengeres csőben áramló viszkózus folyadékban olyan hengerszimmetrikus sebességeloszlás alakul ki, amelyben a sebesség a tengely mentén maximális, a tengelytől kifelé haladva a sugár négyzetével csökken.



# Hagen-Poiseuille-törvény

Egy cső keresztmetszetén időegység alatt átáramló folyadék mennyisége:

$$Q = \frac{\Delta p \pi}{8l\eta} R^4$$

$\Delta p$ : nyomásgradiens

$l$ : a cső hossza

$R$ : a cső sugara

# Reynolds-szám

Az áramlásban legalapvetőbb dimenzió nélküli jellemzője:

$$\text{Re} = \frac{\rho v L}{\eta}$$

$L$ : jellemző lineáris méret,  
pl. cső sugar

*Hidrodinamikai hasonlóság*: két áramlási tér hidrodinamikailag hasonló, ha a geometriai hasonlóság mellett a Reynolds számok is megegyeznek.

# Lamináris, turbulens áramlás

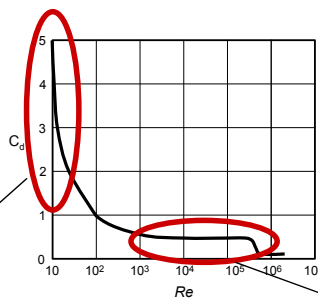
- **Lamináris:** stacionárius áramlás szabályos áramvonalakkal

$$Re < \text{néhány} \quad 10$$

- **Turbulens:** időben rendszertelenül változó áramlás, felismerhetetlen áramvonalak

$$Re > \text{néhány} \quad 1000$$

## Közegellenállás



$$\frac{F}{\rho v^2 L^2} \propto \frac{\eta}{\rho v L} \Rightarrow F \propto \eta v L$$

lineáris (Stokes-féle) közegellenállás








$$F = 6\pi\eta Rv$$

$$\frac{F}{\rho v^2 L^2} \propto c_0 \Rightarrow F \propto c_0 \rho v^2 L^2$$

négyzetes ellenállási törvény

$$F = c_e \frac{1}{2} \rho A v^2$$

# A $c_e$ közegellenállási együttható

Gömb		0,47
Gömbhéj (domború)		0,4
Gömbhéj (homorú)		1,4
Kúp		0,5
Kocka		1,05
Kocka (elforgatva)		0,81
Áramvonalas test		0,04

## Dinamikai felhajtóerő, repülés

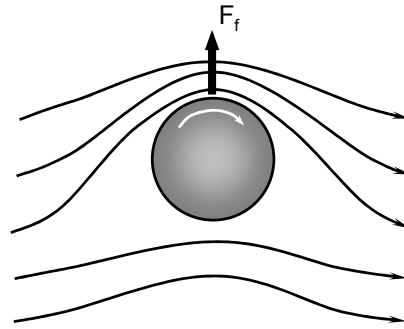
A közegellenállási erő függ az állásszögtől is. A testre ható erő felbontható áramlással párhuzamos és arra merőleges komponensekre. Míg az előző a közegellenállási erő, addig az utóbbi a ún. **dinamikai felhajtóerő**, mely egy olyan fajta felhajtóerő, mely csak akkor lép fel, ha a közeg áramlik.

$$F_{ke} = c_e \frac{1}{2} \rho v^2 A \quad F_{df} = c_f \frac{1}{2} \rho v^2 A$$

siklószám, átbukás

# Magnus-effektus

Áramlásba helyezett forgó hengerre a Bernoulli-egyenlet értelmében felhajtóerő hat:



Jó tanulást kívánok!