

3. Torziómodulus meghatározása torziós rezgésekből; tehetetlenségi nyomaték meghatározása torziós ingával

Célkitűzés:

- A torziós inga működési elvének megismerése. A torziós inga paramétereinek meghatározása a rezgésidők mérésével.
- Testek tehetetlenségi nyomatékának kísérleti meghatározása.

Elméleti összefoglaló:

Egy pontrendszer Z tengelyre vonatkoztatott *tehetetlenségi nyomatékának* definíciója:

$$\Theta = \sum m_i l_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (1)$$

ahol m_i az i -edik tömegpont tömege, x_i, y_i pedig a koordinátái. Merev test esetén m_i helyett $\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$ tömegelemet használunk, ahol ΔV_i a térfogatelem, ρ_i az anyag sűrűsége. Így a fenti egyenlet a következő alakú lesz:

$$\Theta = \sum \rho_i l_i^2 \Delta V_i. \quad (2)$$

A $\Delta V_i \rightarrow 0$ határesetben a tehetetlenségi nyomaték az alábbi összefüggéssel számolható:

$$\Theta = \int_V \rho l^2 dV = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV. \quad (3)$$

Például egy homogén, vékony, q keresztmetszetű, l hosszúságú rúd esetén a rúdra merőleges és az S súlyponton átmenő tengelyre vonatkozólag a tehetetlenségi nyomaték, mivel $\Delta V = q dx$:

$$\Theta = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho x^2 q dx = \rho q \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 dx = \rho q \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \rho q \frac{l^3}{12} = \frac{1}{12} ml^2, \quad (4)$$

mivel $\rho ql = m$ a rúd tömege.

Az előzővel párhuzamos, de a rúd végpontján átmenő tengelyre vonatkozólag az integrálást 0-tól l -ig végezve:

$$\Theta = \rho q \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} ml^2. \quad (5)$$

Hasonlóképpen, integrálással számítható ki a szabályos geometriájú testek tehetetlenségi nyomatéka. A számításból adódó formulákat a következő táblázat tartalmazza.

TEST	TENGELY	Θ
Tömör henger (m tömeg, R sugár, h magasság)	Forgási szimmetriatengely	$\frac{1}{2}mR^2$
	Erre merőleges súlyponttengely	$\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mb^2$
Derékszögű egyenes hasáb (m tömeg, élhosszúság: a, b, c)	c éllel párhuzamos súlyponttengely	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Gömb (m tömeg, R sugár)	Bármelyik súlyponttengely	$\frac{2}{5}mR^2$
Egyenes körkúp (m tömeg, R sugár)	Szimmetriatengely	$\frac{3}{10}mR^2$

A *torziós inga* általános esetben egy vékony szálon függő, torziós rezgéseket végző merev test. A felfüggesztő szál az elforgatott merev testre forgatónyomatékokat gyakorol, ezért ha az ingát kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, majd magára hagyjuk, forgási rezgéseket végez.

Térítsük ki a rendszert egy kicsiny φ szöggel egyensúlyi helyzetéből, ekkor a szál a benne létrejövő torzió miatt egy φ -vel arányos visszatérítő nyomatékokat fejt ki a szálon függő testre:

$$M = -D^* \varphi. \quad (6)$$

A D^* mennyiség az ún. direkciós nyomaték. A torziós ingára írjuk fel a merev testek forgására vonatkozó

$$M = \Theta \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (7)$$

általános mozgásegyenletet. Ebbe behelyettesítve (6)-ot, kapjuk, hogy:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D^*}{\Theta} \cdot \varphi, \quad (8)$$

ahol Θ a torziós inga tehetetlenségi nyomatéka.

Az egyenlet formailag a fizikai inga mozgásegyenletével egyezik meg, melynek megoldása kicsiny szögek esetén: $\varphi(t) = \varphi_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$. Ebben a rezgés ω körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}. \quad (9)$$

A rezgésidő pedig:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}. \quad (10)$$

Ezen összefüggés alapján a rezgésidő megméréseivel ismert tehetetlenségi nyomatékú rendszert alkalmazva a torziós ingát jellemző direkciós nyomaték kiszámolható vagy pedig ismert direkciós nyomatékú inga rezgésidőjét megmérve tehetetlenségi nyomatékokat tudunk meghatározni.

Mérés menete:

A (10) egyenlet két ismeretlent tartalmaz. A gyakorlat során D^* meghatározásához a (10) egyenletet megkettőzzük oly módon, hogy kihasználva Θ additivitását, ismert módon megváltoztatjuk a rezgő test tehetetlenségi nyomatékát. A felfüggesztett acélszála rögzített vízszintes rúdra kettő darab, egyenként m tömegű testet helyezünk a forgástengelytől első esetben s_1 , a második esetben s_2 távolságra. A távolságokat a rúdon lévő vajatok jelzik. A két esetben a tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_1 = \Theta + 2ms_1^2, \text{ illetve } \Theta_2 = \Theta + 2ms_2^2, \quad (11)$$

ahol Θ a vízszintes rúd tehetetlenségi nyomatéka (a tehetetlenségi nyomaték additív mennyiség). A két esetben az inga rezgésidője:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta + 2ms_1^2}{D^*}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta + 2ms_2^2}{D^*}}. \quad (12)$$

A megmért rezgésidőkből a direkciós nyomaték a (12) egyenletek átrendezésével az alábbi egyenlet szerint számolható:

$$D^* = 8m\pi^2 \frac{s_2^2 - s_1^2}{T_2^2 - T_1^2} \quad (13)$$

Elméleti tanulmányainkból ismeretes, hogyha egyik végén rögzített, l hosszúságú, R sugarú fémszál (rúd) szabad végére $M' = -M$ forgatónyomatékot gyakorlunk, akkor a szabad vég szögelfordulása:

$$\varphi = \frac{2l}{GR^4\pi} M'. \quad (14)$$

Ezt összevetve (6)-tal, adódik, hogy

$$G = \frac{2}{\pi} \frac{l}{R^4} D^*, \quad (15)$$

ahol G a fémszál anyagi minőségére jellemző állandó, a torziómodulus.

Ha a már ismert D^* direkciós nyomatékú torziós szárlra valamilyen merev testet függesztünk, ennek Θ tehetetlenségi nyomatékát (10) alapján meghatározhatjuk, ha megmérjük rezgésének periódusidejét (T):

$$\Theta = \frac{D^* \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2} \quad (16)$$

Feladatok:

- 1) Határozza meg a kiadott szálak D^* direkciós nyomatékát és G torziómodulusát.
 - a) Mérje meg a szálak hosszát, valamint 10 különböző helyen az átmérőjét. Az utóbbi mérésénél a harmadik értékes jegyet is becsülje meg. A mérésnél vegye figyelembe a mikrométercsavar nullhibáját.
 - b) Mérje meg a felfüggesztendő fémrúdon a belső és külső vajatok forgástengelytől való távolságát és a próbatestek tömegét.
 - c) Határozza meg a torziós rezgések periódusidejét n számú rezgésidő együttes méréséből. n -et úgy válassza, hogy a mért idők 30-60 s között legyenek. Minden mérést háromszor végezzen el.
 - d) A mérési adatokból számolja ki a D^* és G értékét.
 - e) Hasonlítsa össze a kapott G értékeket az acél torziómodulusának táblázatból kikereshető értékével. Számolja ki a relatív eltérést.
- 2) A D^* értékének ismeretében használja a torziós ingát merev testek tehetlenségi nyomatékának meghatározására.
 - a) Határozza meg két kiadott test tehetlenségi nyomatékát.
 - b) Hasonlítsa össze a tehetlenségi nyomaték fenti módon mért értékét a tömeg és a geometriai adatok felhasználásával számítható értékkel. Számolja ki a relatív eltérést.

Ajánlott irodalom:

📖 Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 59.§, 60.§, 61.§