4. Csillapodó- és kényszerrezgések vizsgálata Pohl-féle készülékkel

Célkitűzés:

- Csillapodó- és kényszerrezgések kísérleti vizsgálata, sebességfüggetlen csillapítás hatásának demonstrálása.

Elméleti összefoglaló:

A legegyszerűbb rezgőmozgás a harmonikus rezgés, melyet az

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \phi) \qquad (1)$$

egyenlet ír le, ahol x az egyensúlyi helyzettől mért pillanatnyi kitérés, A a rezgés amplitúdója, ω_0 a körfrekvenciája, ϕ pedig a kezdőfázisa. Ilyen rezgés akkor jön létre, ha egy m tömegű pontszerű testre olyan F erő hat, amely a kitéréssel arányos és azzal ellentétes irányú, vagyis $F = -D \cdot x$. Ekkor az $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ mennyiséget bevezetve a dinamika alapegyenletéből a következő differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot x\,. \qquad (2)$$

Az (1) egyenlet (2)-be történő helyettesítésével meggyőződhetünk arról, hogy (1) a (2) egyenlet egy megoldását írja le.

A gyakorlatban a különböző típusú súrlódások hatása miatt nem tökéletesen harmonikus rezgés, hanem csillapított harmonikus rezgés jön létre. Matematikailag egyszerűen kezelhető a sebességgel arányos $F_{cs} = -k \cdot dx/dt$ csillapító erő hatása. Ilyen esetben a mozgást a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \qquad (3)$$

differenciálegyenlet írja le, amelyben az egyszerűbb alakú megoldás érdekében bevezettük a $\beta = k/(2m)$ csillapítási tényezőt. A (3) egyenlet egy megoldása nem túl erős ($\beta < \omega_0$) csillapítás esetén:

$$x(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega_{cs} t + \phi)\,, \qquad (4)$$

ahol $\omega_{cs} = \sqrt{\omega_o^{\,2} - \beta^2}$. Mint látható a csillapítás hatására a rezgés $A \cdot e^{-\beta t}$ amplitúdója idővel exponenciálisan csökken és a rezgés frekvenciája – mely időben állandó – kisebb, mint a csillapítás nélküli esetben. (4)-ből megállapítható továbbá, hogy a kitérés nem akkor éri el maximális értékét, amikor a szinuszfüggvény argumentuma $\pi/4 + m\pi$ (ahol m egész szám), hanem ennél korábban. Az egymást követő egyirányú maximális kitérések hányadosa, az ún. csillapodási hányados állandó, nevezetesen:

$$K = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} \qquad (5)$$

ahol $T = 2\pi / \omega_{cs}$ a rezgésidő. Bármely két olyan időpontban, amelyek különbsége T a rezgés azonos fázisban van, de a megfelelő két kitérés nem azonos mértékű, hanem egymás K-szorosa. Emiatt a T rezgésidőt most nem nevezhetjük periódusidőnek. A csillapított rezgések jellemzésére szokás használni még a

$$\Lambda = \ln K = \beta \cdot T \qquad (6)$$

logaritmikus dekrementumot is.

Az eddig tárgyalt rezgések ún. szabad rezgések voltak. Kényszerrezgésről beszélünk akkor, ha az eddig figyelembe vett erőkön kívül egy periodikusan változó erő is hat a rendszerre. A legegyszerűbben leírható és egyszerűen megvalósítható esetben ez a periodikus kényszer erő egy harmonikus erő, azaz $F(t) = F_o \cdot \sin(\omega t) = m \cdot a_0 \cdot \sin(\omega t)$ alakú. Ekkor a mozgást a következő differenciálegyenlet határozza meg:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 \cdot x = a_0 \cdot \sin(\omega t) \,. \qquad (7)$$

Ennek az egyenletnek $\beta < \omega_0$ esetén általános megoldása

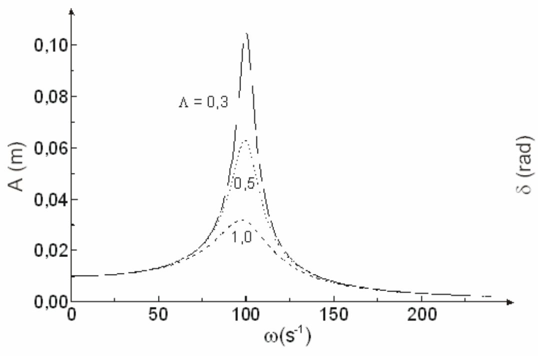
$$x(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega_{cs} t + \phi) + A_k \cdot \sin(\omega t - \delta) \qquad (8)$$

alakú. (8) jobb oldalának első tagja egy csillapodó rezgőmozgást ír le. Ez a csillapítás mértékétől függő idővel elhal, és csak a kényszerrezgést leíró második tag marad jelentős. Ez a tag (a rendszer sajátfrekvenciájától függetlenül) a gerjesztő erővel azonos frekvenciájú harmonikus rezgést ír le, amelynek fázisa δ értékkel késik a gerjesztés fázisához képest. A kényszerrezgés amplitúdója és fáziskésése a (9) ill. (10) egyenletek szerint függ az alkalmazott kényszer frekvenciájától.

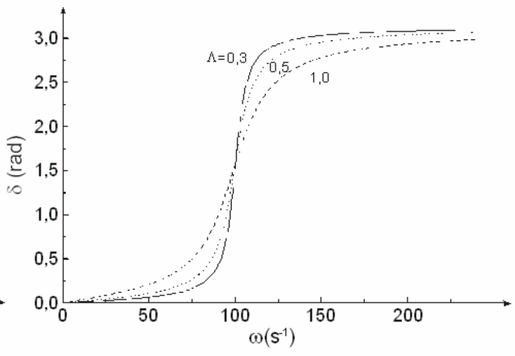
$$A_k = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \beta^2 \cdot \omega^2}} \qquad (9)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2 \cdot \beta \cdot \omega}{\omega_0{}^2 - \omega^2} \qquad (10)$$

A (9) és (10) által meghatározott függvények menetét az 1.a, illetve 1.b ábra mutatja ω_0 = 100 s^{-1}, a_0 = 100 m/s² és három különböző csillapítás (Λ = 0,3; 0,5; 1,0) fennállása esetén. Jól látható, hogy a kényszerrezgés amplitúdója ω = ω_0 közelében maximummal rendelkezik, ezt a jelenséget nevezzük rezonanciának. A rezonancia annál kifejezettebb, és élesebb, vagyis az $A(\omega)$ rezonanciagörbe maximuma annál nagyobb és szélessége annál kisebb, minél kisebb a csillapítás. A (9) és (10) egyenletek egyszerű analíziséből megállapítható, hogy a rezgési amplitúdó nem pontosan ω = ω_0, hanem az $\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0{}^2 - 2 \cdot \beta^2}$ rezonancia-körfrekvencia esetén maximális. A kényszerrezgést végző rendszer teljesítményfelvétele az $\omega \cdot A(\omega)$ sebességamplitúdó négyzetével arányos, aminek maximuma, vagyis sebességrezonancia van ω = ω_0 frekvenciájú kényszer esetén. Ugyanennél az értéknél a fáziskésés $\delta = \pi / 2$ a csillapítástól függetlenül. A $\delta(\omega)$ görbék annál gyorsabb átmenetet mutatnak e pont körül, minél kisebb a csillapítás.



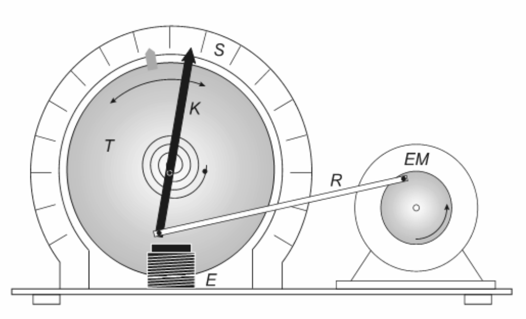
1.a ábra



1.b ábra

Mérés menete:

A csillapodó- és kényszerrezgések vizsgálatára a *Pohl*-féle készüléket használjuk, amelynek a felépítése a 2. ábrán látható. A *T* tárcsa vagy kerék vízszintes tengely körül forgási rezgéseket végezhet. Egy, az egyik végén a tárcsához rögzített spirálrugó szolgáltat a kitéréssel arányos erőt, ill. forgatónyomatékot. A tárcsa egy *E* elektromágnes sarkai között mozog. A mágneses tér a mozgó fémtárcsában keltett örvényáramok révén a sebességgel arányos fékezőerőt, ill. forgatónyomatékot fejt ki a tárcsára. A fékezés nagysága az elektromágnesen áthaladó áram erősségével arányos. Annak érdekében, hogy kényszerrezgéseket is lehessen vizsgálni, a spirálrugó másik (nem a tárcsához rögzített) vége egy *K* karhoz kapcsolódik, amelyet az R rúd közvetítésével az *EM* elektromotor tengelyére szerelt excenter mozgat. A kényszer frekvenciája (az elektromotor fordulatszáma) az elektromotor áramának változtatásával szabályozható. A kényszert közvetítő kar végén és a forgómozgást végző tárcsán egy-egy mutató található. Ezeknek a körív alakú *S* skálához viszonyított helyzetéből meghatározható a kényszer és a rezgés fázisa és nagysága.



2. ábra

Feladatok:

1) Kézzel térítse ki a tárcsát, és mérje meg ötször öt teljes rezgésből a T_0 rezgésidőt, majd határozza meg az ω_0 sajátfrekvenciát. Mérjen meg legalább hat, egymást követő egyirányú maximumot (x_{0i}).
2) A csillapítást létrehozó elektromágnest az ampermérőn keresztül csatlakoztassa a tápegység megfelelő kimenetéhez. Végezze el az 1) feladat alatt ismertetett mérést úgy, hogy a tápegységen lévő potenciométer segítségével a csillapító mágnes áramát I_{cs} = 0,5 A-re állítva csillapítja az inga rezgését. Mérendő: T, x_i; számítandó a rezgés ω körfrekvenciája.
3) Az első ill. a második feladat mérési eredményeiből számítsa ki a Λ_0, illetve Λ logaritmikus dekrementumokat. Az így nyert értékekből számítsa ki a β_0 és β csillapítási tényező értéket. Magyarázza meg, hogy miért változnak a csillapítási tényezők!
4) Csatlakoztassa az időben periodikus kényszert biztosító elektromotort a tápegységhez. A motor működtetésével mérje ki a rezonancia-görbéket. (A motor fordulatszáma a tápegységen található szabályozó potenciométerrel állítható.) A csillapítás áramerősség-értéke legyen 0,0 A és 0,5 A. A T_k = [1,2; 6,0 s] intervallumban mérjen legalább húsz alkalommal, a rezonancia közelében sűrűbben, a rezonanciától távol pedig egy-két pontban. Az amplitúdók mérésénél az egy perc alatt megfigyelhető maximális értékeket olvassa le. Mérendő mennyiségek: a kényszer ω_k körfrekvenciái (10 periódusidőt mérve) és az A_k amplitúdó-maximumok.
5) Készítse el az $A_{0k}(\omega)$ és $A_k(\omega)$ rezonanciagörbéket!

Ajánlott irodalom:

Budó Ágoston: Kísérleti fizika I., 88.§, 89.§