I. MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

Mértékegység-átváltások

I./1.

e) $13580\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \dfrac{13580\ \text{kg}}{1\ \text{m}^3} = \dfrac{13580\cdot 10^3\ \text{g}}{10^6\ \text{cm}^3} = 13,58\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Vektorműveletek

I./4.

a) $F_x = |\vec{F}|\cdot\cos\vartheta = 24\ \text{N}\cdot\cos 330° = 20,78\text{N}.$

$F_y = |\vec{F}|\cdot\sin\vartheta = 24\ \text{N}\cdot\sin 330° = -12\text{N}.$

I./5.

a) $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{31^2 + 12^2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 33,24\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

$\vartheta = \text{arc tg}\,\dfrac{v_y}{v_x} = \text{arc tg}\,\dfrac{12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{31\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 21,16°.$

I./6.

e) $4\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = 4\cdot(2, 7, -6) + 2\cdot(2, -3, 5) - 3\cdot(6, 0, 1) = (8, 28, -24) + (4, -6, 10) - (18, 0, -3) = (-6, 22, -17).$

A mérés hibája

I./7.

A megoldás alapja a hasonló háromszögek oldalainak arányossága. A jelöléseket az ábrán mutatjuk be.
A háromszögek A csúcsnál levő szöge közös, és a vele szemközti oldalak párhuzamosak,
így az ABC háromszög hasonló az ADE háromszöghöz, vagyis

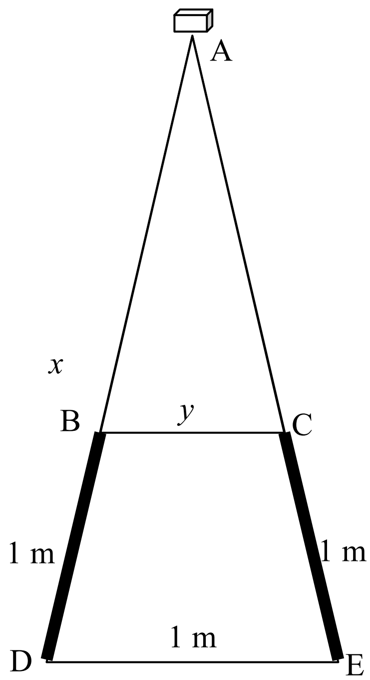
$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE}$, ahonnan $\dfrac{x - 1\ \text{m}}{x} = \dfrac{y}{1\ \text{m}}$. Ezt átrendezve $x = \dfrac{1\ \text{m}^2}{1\ \text{m} - y}$.

Az első esetben a fenti egyenletből $x = 25\ \text{m}$ adódik.

Ha a trapéz oldalának mérésekor 2 mm-t tévedünk, vagyis a valós hossz 96,2 cm vagy 95,8 cm, akkor a távolságra rendre $x = 26,3\ \text{m}$, illetve $x = 23,8\ \text{m}$ adódik, tehát a távolságmérés során elkövetett hiba legfeljebb $\Delta x = 1,3\ \text{m}$.

Ha a trapéz rövidebb oldalát 99 cm-nek mérjük, akkor a tárgy távolsága a méterrúd felénk eső végétől $x = 100\ \text{m}$. A 2 mm-es hibát figyelembe véve a távolság $x = 125\ \text{m}$ vagy $x = 83,3\ \text{m}$, tehát az elkövetett hiba nem több, mint $\Delta x = 25\ \text{m}$.

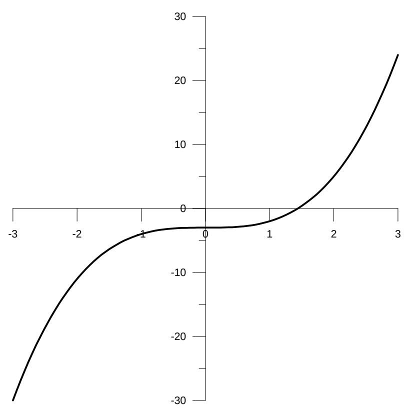
Megjegyzés: a hiba pesszimista becslésekor az azonos mennyiség mérésekor meghatározott hibák közül a nagyobbat szoktuk megadni a mérés hibájaként.



Függvénytani alapismeretek

I./10.

a) értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$;
értékkészlet: $\mathbb{R}$;
monotonitás: szigorúan monoton növekvő;
szélsőértékek: $\pm\infty$
szakadási hely: nincs
inflexiós pont: x = 0



Határérték- és differenciálszámítás

I./14.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \to 0$

b) $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, \ldots \to 2$

c) $\left\{(-1)^n \frac{2n-1}{n}\right\}$ sorozatnak nem létezik határértéke, amit a következőképpen láthatunk be: ha ezt a sorozatot két részsorozatra bontjuk, akkor páros n-ekre a határérték +2, páratlan n-re -2, vagyis nincs egyetlen olyan számérték, amely tetszőlegesen kicsi környezetébe benne található a sorozat minden eleme, ha n elég nagy.

I./15.

a) $\frac{d(2x)}{dx} = 2$. b) $\frac{d(-3x+4)}{dx} = -3+0 = -3$. c) $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$.

d) $$\frac{d(3x^3 - 5x^2 + x + 2)}{dx} = 3\cdot 3x^2 - 5\cdot 2x + 1 + 0 = 9x^2 - 10x + 1.$$

e) $$\frac{d(x\cdot \sin x)}{dx} = 1\cdot \sin x + x\cdot \cos x = \sin x + x\cdot\cos x.$$

f) $$\frac{d(\cos x\cdot \sin x)}{dx} = \left(\frac{d\cos x}{dx}\right)\sin x + \cos x\left(\frac{d\sin x}{dx}\right) = -\sin x\cdot \sin x + \cos x\cdot\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

g) $$\mathrm{tg}'x = \frac{d\dfrac{\sin x}{\cos x}}{dx} = \frac{\dfrac{d\sin x}{dx}\cdot\cos x - \sin x\cdot\dfrac{d\cos x}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

h) $$\frac{de^{-2x}}{dx} = e^{-2x}\cdot(-2) = -2e^{-2x}\left(\text{mivel } \frac{de^x}{dx} = e^x\right).$$

i) $$\frac{d\left(e^{-2x}\cdot 3x\right)}{dx} = \frac{de^{-2x}}{dx}\cdot 3x + e^{-2x}\cdot\frac{d3x}{dx} = -6x\cdot e^{-2x} + 3e^{-2x} = (-6x+3)e^{-2x}.$$

j) $$\frac{d\left(3x\cdot \mathrm{tg}\, x\right)}{dx} = 3\cdot \mathrm{tg}\, x + 3x\cdot \mathrm{tg}'x = 3\cdot\mathrm{tg}\, x + \frac{3x}{\cos^2 x}.$$

I./16.

Teljes négyzetté alakítással

$$z(t) = z_0 + v_0\cdot t - \frac{g}{2}\cdot t^2 = z_0 - \frac{g}{2}\cdot\left(t^2 - \frac{2v_0 t}{g}\right) = z_0 - \frac{g}{2}\cdot\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g}, \text{ vagy}$$

$$z(t) = z_0 + v_0\cdot t - \frac{g}{2}\cdot t^2 = z_0 - \left(\sqrt{\frac{g}{2}}\cdot t - \frac{1}{\sqrt{2g}}v_0\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g},$$

mely kifejezéseknek akkor lesz maximumuk, ha a négyzetes tag 0, ebből $z_{\max} = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$.

Egy függvénynek ott van maximuma, ahol az első differenciálhányadosa nulla, és ebben a pontban pozitívról negatívra előjelet vált:

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(z_0 + v_0\cdot t - \frac{g}{2}\cdot t^2\right)}{\mathrm{d}t} = v_0 - gt,$$

melynek zérushelye: $t = \frac{v_0}{g}$, és $\dot z(t) = v_0 - gt > 0$, ha $t < \frac{v_0}{g}$, és $v_0 - gt < 0$, ha $t > \frac{v_0}{g}$.

A maximális magasság: $z_{\max}\left(\frac{v_0}{g}\right) = z_0 + v_0\cdot\frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\cdot\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$.

A differenciálhányados-függvény a test sebességének időfüggvényét adja meg.

I./17.

a) $\dot{x} = a$, $\ddot{x} = 0$, egyenes vonalú egyenletes a mozgás.

b) $\dot{x} = 2a \cdot t + b$, $\ddot{x} = 2a$, egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló a mozgás

c) $\dot{x} = A \cdot \cos t$, $\ddot{x} = -A \sin t$, egyenes vonalú, periodikus mozgás, amelyre $-A \le x \le A$.

d) $\dot{x} = A \cdot (\cos \omega t) \cdot \omega = A \cdot \omega \cdot (\cos \omega t)$, $\ddot{x} = -A\omega^2 \cdot \sin \omega t$, ω körfrekvenciájú harmonikus rezgés.

e) $\dot{x} = A \cdot (\cos(\omega t - \pi)) \cdot \omega = A\omega \cdot (\cos(\omega t - \pi)) = -A\omega \cdot \cos(\omega t)$,

$\ddot{x} = A\omega^2 \cdot \sin \omega t$, mivel t=0-ban x=0, v=–Aω, ez egy –π kezdőfázisú harmonikus rezgés.

f) $\dot{x} = A \cdot e^{-\beta t} \cdot (-\beta) \cdot \cos \omega t + A \cdot e^{-\beta t} \cdot (-\omega) \cdot \sin \omega t = -A \cdot e^{-\beta t} \cdot (\beta \cdot \cos \omega t + \omega \cdot \sin \omega t)$,

$\ddot{x} = -A \cdot e^{-\beta t} \left[(\omega^2 - \beta^2) \cos \omega t - 2\beta\omega \sin \omega t \right]$, exponenciálisan csillapodó rezgés.

g) $\dot{x} = A \cdot e^{-\beta t} \cdot (-\beta) \cdot \sin(\omega t + \varphi) + A \cdot e^{-\beta t} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot (-\beta \cdot \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi))$,

$\ddot{x} = -A \cdot e^{-\beta t} \left[(\omega^2 - \beta^2) \sin(\omega t + \varphi) + 2\beta\omega \cos(\omega t + \varphi) \right]$, mint f).

II. KINEMATIKA – EGYSZERŰ MOZGÁSTÍPUSOK

Egyenes vonalú egyenletes mozgás, egyenletes körmozgás

II./1.

Egy fényév az az s távolság, amelyet a $v = 300000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel a fény 1 év alatt megtesz. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás útképletét használva:

$$s = vt = 300000\ \tfrac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 1\ \text{év} = 300000\ \tfrac{\text{km}}{\text{s}} \cdot (365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600)\ \text{s} = 9{,}47 \cdot 10^{12}\ \text{km}.$$

II./4.

A $v_m = 45\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű motoros relatív sebessége a v_k sebességgel haladó konvojhoz képest az első esetben $v_1 = v_m - v_k$, a második esetben $v_2 = v_m + v_k$ volt. Mivel tudjuk, hogy az s hosszúságú gépkocsikonvojt a motoros az első esetben $t_1 = 7$ perc$= \frac{7}{60}$h, míg a második esetben $t_2 = 2$ perc $= \frac{2}{60}$h alatt előzte meg, ezeket az előző két egyenletbe helyettesítve: $\frac{s}{t_1} = v_m - v_k$ és $\frac{s}{t_2} = v_m + v_k$. A két egyenletet egymással elosztva $\frac{t_2}{t_1} = \frac{v_m - v_k}{v_m + v_k}$, amelyből v_k-t kifejezve

$$v_k = \frac{v_m(t_1 - t_2)}{(t_1 + t_2)} = \frac{45\ \frac{\text{km}}{\text{h}} (\frac{7}{60}\ \text{h} - \frac{2}{60}\ \text{h})}{(\frac{7}{60}\ \text{h} + \frac{2}{60}\ \text{h})} = 25\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

II./9.

Az r = 10 km sugarú körpálya kerülete $s = 2r\pi = 2 \cdot 10\ \text{km} \cdot \pi = 62{,}83\ \text{km}$. Ezt az utat a $v = 810\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 225\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó repülőgép $t = \frac{s}{v} = \frac{62{,}83\ \text{km}}{810\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}0776\ \text{h} = 279{,}24\ \text{s}$ alatt teszi meg. A fenti időtartam a repülőgép T keringési, vagy periódusideje. Az ω szögsebesség (felhasználva, hogy a repülőgép a T periódusidő alatt 360°-ot, azaz 2π radiánt tesz meg):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{279{,}24\ \text{s}} = 0{,}0225\ 1/\text{s}.$$

Egy félkört a repülőgép a periódusidő fele, azaz $T_{1/2}$ = 139,62 s alatt tesz meg. Az $a_{cp.}$ centripetális gyorsulás kiszámítása kétféleképpen történhet: $a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{(225\ \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{10000\ \text{m}} = 5{,}06\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, illetve $a_{cp} = \omega^2 r = (0{,}0225\ \frac{1}{\text{s}})^2 \cdot 10000\ \text{m} = 5{,}06\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

II./13.

Az a = 5 m/s^2 gyorsulással mozgó golyó által a t_1 és t_2 időpontok között megtett $s(t_1, t_2)$ út:

$$s(t_1, t_2) = \frac{a}{2}t_2^2 - \frac{a}{2}t_1^2 = \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2)\ .$$

Az első másodpercben megtett út ezek alapján: $s(0,1) = \frac{5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}\left((1\text{ s})^2 - (0\text{ s})^2\right) = 2{,}5\text{ m.}$ Hasonlóképpen a 2., 3. és 4. másodpercben megtett utak rendre 7,5 m, 12,5 m és 17,5 m. A négy út aránya 1:3:5:7. Az $a = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozgó golyó sebességváltozása a t_A = 2 s és t_B = 4 s időpontok között:

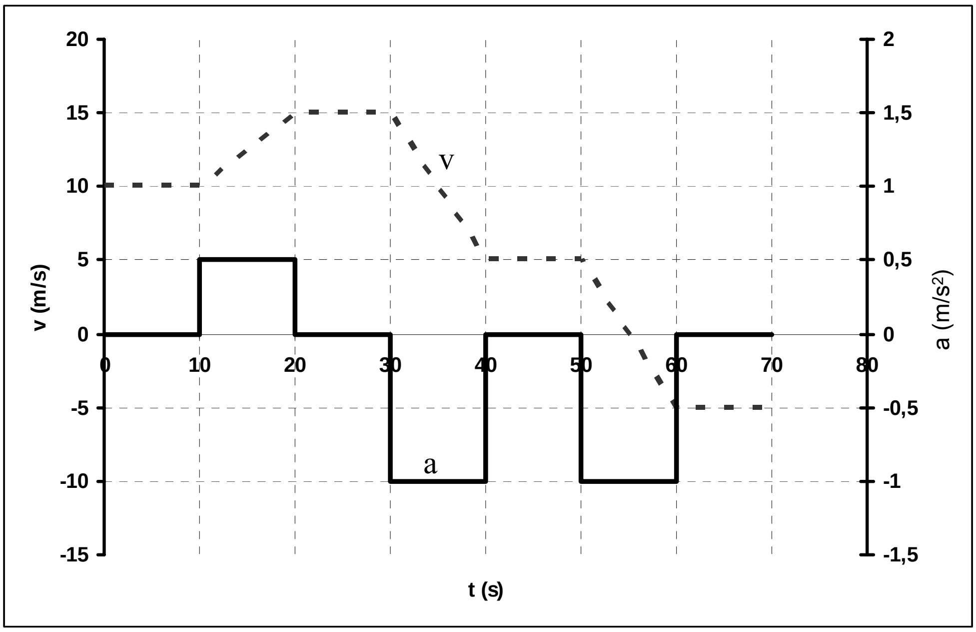
$$\Delta v(t_A, t_B) = at_B - at_A = a(t_B - t_A) = 5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(4\text{ s} - 2\text{ s}) = 10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}.$$

II./14.

a) Mivel az autó álló helyzetből indult, a v_0 kezdeti sebessége 0 km/h volt. Ha t = 19,3 s alatt érte el a $v = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességet, az a átlagos gyorsulása $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{19{,}3\text{ s}} = \frac{22{,}22\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{19{,}3\text{ s}} = 1{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

II./16.

A test a 0–10 s, a 20–30 s, a 40–50 s, valamint a 60–70 s időtartamok alatt egyenletes, a 10–20 s időtartam alatt egyenletesen gyorsuló, a 30–40 s, valamint az 50–60 s időtartamok alatt egyenletesen lassuló mozgást végez.
A gyorsulás–idő grafikon sebesség–idő grafikon deriválásával nyerhető.



A test elmozdulása a sebesség-idő grafikon alatti területek előjeles összegzésével határozható meg:

$$A = (10{,}75 - 1{,}25)\text{ négyzetrács}\cdot 5\text{ m/s}\cdot 10\text{ s} = 475\text{ m.}$$

II./20.

A v_0 = 20 m/s kezdeti sebességgel feldobott labda $-g = -9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozog felfelé. Ha t-vel jelöljük azt az időpontot, amikor a labda sebessége $v = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, és felhasználjuk, hogy $v = v_0 - gt$, a t időpontig a labda által megtett út:

$$s = v_0 t - \frac{g}{2}t^2 = v_0\frac{v - v_0}{-g} - \frac{g}{2}\left(\frac{\text{v} - \text{v}_0}{-g}\right)^2 = \left(\frac{v_0 - v}{g}\right)\left(v_0 - \frac{v_0 - v}{2}\right) = \left(\frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right)\left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}\right) = 15{,}29\text{ m.}$$

Mivel a labda pályája szimmetrikus, visszafelé is ugyanennél a pontnál, azaz 15,29 m-rel a kezdőpozíciója felett éri el a $v = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességet.

II./23.

A test egyenes vonalú pálya mentén mozog és sebessége az idővel lineárisan változik, így ez a mozgás egyenes vonalú egyenletes gyorsuló mozgás. A $v = v_0 + at$ összefüggéssel összehasonlítva kapjuk, hogy $v_0 = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = d = 0,6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Ezekkel az adatokkal kiszámítható, hogy az y tengely mentén a test elmozdulása: $\Delta y = v_0 t + \frac{a}{2}t^2 = 6\text{ m} + 2,7\text{ m} = 8,7\text{ m}$.

A test új helyzete: $P'(2\text{ m}; (4,2+8,7)\text{m}) = (2\text{ m}; 12,9\text{ m})$.

Hajítás, nem egyenletesen gyorsuló mozgás, gyorsuló körmozgás

II./24.

Vízszintes hajításkor a test mozgása két, egymástól független elmozdulásra bontható fel. Az egyik elmozdulás vízszintes irányú, egyenes vonalú egyenletes mozgás, a hajítás sebességével: $x = v_0 \cdot t = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\text{ s} = 40\text{ m}$.

A másik elmozdulás függőleges irányú, és szabadesésként írhatjuk le: $y = \frac{g}{2}t^2 \approx 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}(2\text{ s})^2 = 20\text{ m}$.

A kő az elhajítás helyétől 2 s alatt vízszintes irányban 40 métert, függőlegesen lefelé 20 métert távolodott el.

III. A TÖMEGPONT DINAMIKÁJA

Egyenes vonalú mozgás

III./2.

Annak az erőnek a nagysága, amelyet az m tömegű ember fejt ki a lift padlójára: $F = m \cdot (g + a)$, ahol g a gravitációs gyorsulás, a pedig a lift gyorsulása. Az a gyorsulás előjele pozitív, ha a lift felfelé gyorsul, és negatív, ha lefelé gyorsul. A fentieknek megfelelően az ember által a padlóra kifejtett erő nagysága az egyes esetekben:

$F_1 = 70\text{ kg} \cdot 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 686,7\text{ N}$, $F_2 = 70\text{ kg} \cdot (9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 476,7\text{ N}$, $F_3 = 70\text{ kg} \cdot (9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 896,7\text{ N}$.

III./5.

A probléma egy olyan v_o kezdősebességgel történő függőleges hajításnak tekinthető, amelynél a test — a lejtő okozta kényszer következtében — a gravitációs gyorsulás helyett egy

$$a = g \cdot \sin\alpha = 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 30° = 4,905\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

nagyságú, függőlegesen lefelé irányuló gyorsulással mozog. A holtpont eléréséig eltelt t_1 idő annak felhasználásával kapható meg, hogy a holtponton a test sebessége zérus: $0 = v_o - at_1 \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{v_o}{a}$.

A felső holtpont eléréséig megtett út: $s_1 = v_o t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 = v_o\frac{v_o}{a} - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_o}{a}\right)^2 = \frac{v_o^2}{a} - \frac{v_o^2}{2a} = \frac{v_o^2}{2a} = \frac{\left(8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 4,905\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 6,52\text{ m}$.

Mivel a mozgás szimmetrikus, a visszaérkezésig megtett út a fenti érték kétszerese, azaz 13,04 m. Ugyanezen okból a visszaérkezésig eltelt idő a t_1 időtartam kétszerese, azaz

$$2t_1 = \frac{2v_o}{a} = \frac{2 \cdot 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,905\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3,26\text{ s}.$$

III./7.

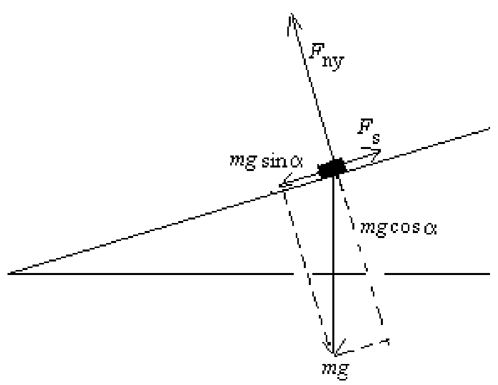
A ládára ható tapadási súrlódási erő $F_{súrl.} = \mu_0 mg$, ahol μ_0 a tapadási súrlódási együttható, m a láda tömege és g a gravitációs gyorsulás. Ahhoz, hogy fékezéskor a láda éppen ne csússzon meg, a ládára ható tehetetlenségi erő legfeljebb akkora lehet, mint a tapadási súrlódási erő: $ma_{fék.} = F_{teh.} \leq F_{súrl} = \mu_0 mg$, amiből a fékezés lassulása:

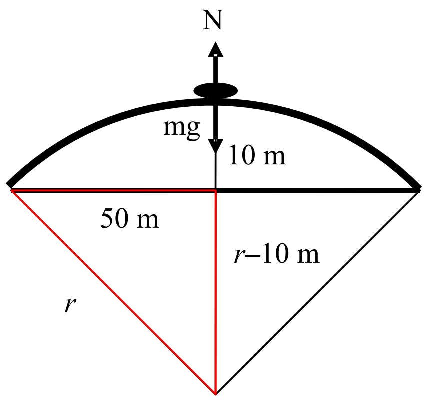
$$a_{fék.} \leq \mu_0 g = 0,2 \cdot 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,96\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

III./9

A lejtőre helyezett test egyensúlyban van mindaddig, amíg meg nem mozdul. Három erő hat rá, a nehézségi erő, a lejtőre merőleges nyomóerő és a súrlódási erő (kezdetben tapadási erő, majd a csúszási súrlódási erő). Ha a nehézségi erőt felbontjuk a lejtővel párhuzamos és arra merőleges összetevőkre, akkor az egyensúly feltételéből kapjuk, hogy $F_{ny} = mg\cos\alpha$ és $F_s = mg\sin\alpha$. Akkor mozdul meg a test, ha a tapadási erő maximális értékét meghaladja a nehézségi erő lejtővel párhuzamos összetevője.

Mivel $F_{t\max} = \mu_0 mg\cos\alpha \ (= \mu_0 F_{ny})$, az egyensúly legfeljebb addig állhat fel, amikor a lejtő szöge egy kicsivel kisebb, mint 30°. Mivel már $mg\sin 30° > \mu_0 mg\cos 30°$, innen $\mu_0 < \text{tg}30° = 0,577$. Abból, hogy 30°-nál éppen megmozdul a test, az következik, hogy $\mu_0 \approx 0,577$. A mozgás adataiból, $s = \frac{1}{2}at^2$ felhasználásával kapjuk, hogy $a = 0,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. A csúszási súrlódási erő $F_s = \mu mg\cos\alpha$, a mozgásegyenlet $mg\sin\alpha - F_s = ma$, innen $\mu = \dfrac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} = 0,518 \approx 0,52$.





III./12.

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt a piros színnel kiemelt derékszögű háromszögre: $(50\text{ m})^2 + (r - 10\text{ m})^2 = r^2$, ebből r = 130 m. Ha az autó a híd tetején egyenletes körmozgást végez, akkor a körmozgáshoz szükséges erőre felírható az

$$mg - N = \frac{mv^2}{r}$$

összefüggés, ahol mg a súlyerő és N a nyomóerő. Az autó nem válik el az úttól, ha $N \geq 0$, amiből az autó sebességére a $g - \dfrac{v^2}{r} \geq 0$ összefüggés adódik. Ebből az autó maximális sebessége: $v_{\max.} = \sqrt{gr} = \sqrt{9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 130\text{ m}} = 35,7\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 128,6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

III./13.

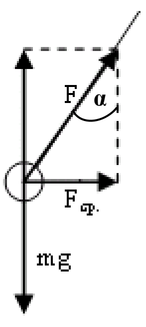
Jelölje v a test sebességét, ω a körmozgás szögsebességét és $F_{cp.}$ a körmozgás fenntartásához szükséges centripetális erőt. A t = 1 s alatt megtett szögelfordulás: $N = \dfrac{\omega \cdot t}{2\pi} = \dfrac{15\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 1\text{ s}}{2\pi} = 2,39$ fordulat. A test tömege a centripetális erő nagyságából határozható meg, felhasználva, hogy $v = \omega \cdot r$:

$$F_{cp.} = \frac{mv^2}{r} \quad \rightarrow \quad m = \frac{F_{cp.} \cdot r}{v^2} = \frac{F_{cp.} \cdot \frac{v}{\omega}}{v^2} = \frac{F_{cp.}}{v \cdot \omega} = \frac{15\text{ N}}{2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15\,\frac{1}{\text{s}}} = 0,5\text{ kg}.$$

III./14.

A leválás pillanatszerű, ezért a rugóban ébredő erő nem tud megváltozni. A rugóban lévő erő nagyobb, mint amekkora a körpályán tartáshoz szükséges, ezért a többleterő miatt a körpályához képest befelé kell a maradék résznek elmozdulnia. A levált rész pedig az elválás pontjában az eredeti pálya érintőjének irányába mozdul el.

III./16.



Az F kötélerő függőleges komponense a golyóra ható gravitációs erővel tart ellent, így azzal azonos nagyságú, míg a vízszintes komponens a körmozgás fenntartásához szükséges centripetális erőt biztosítja. Ezek alapján $F \cdot \cos\alpha = mg$, amiből a kötél függőlegessel bezárt szöge:

$$\alpha = \text{arc cos}\,\frac{mg}{F} = \text{arc cos}\,\frac{5,1\text{ kg} \cdot 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{60\text{ N}} = 33,5°$$

A fenti értékből a kötél vízszintessel bezárt szöge 90° – 33,5° = 56,5°.
Az l hosszúságú kötélen függő golyó által bejárt körpálya sugara $r = l \cdot \sin\alpha$, a centripetális erő nagysága pedig $F_{cp.} = F \cdot \sin\alpha$.

Mivel $F_{cp.} = \dfrac{mv^2}{r}$, a golyó kerületi sebessége:

$$v=\sqrt{\frac{F_{cp.}r}{m}}=\sqrt{\frac{F\cdot\sin\alpha\cdot l\sin\alpha}{m}}=\sqrt{\frac{60\text{ N}\cdot\sin^2 33{,}5°\cdot 2{,}4\text{ m}}{5{,}1\text{ kg}}}=2{,}93\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}=0{,}81\,\tfrac{\text{km}}{\text{h}}.$$

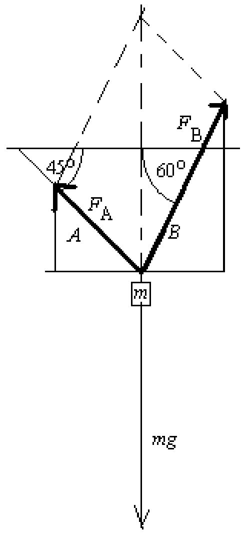
Az ω szögsebességgel történő körmozgás periódusideje:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{v}{r}}=\frac{2\pi(l\cdot\sin\alpha)}{v}=\frac{2\pi\cdot 2{,}4\text{ m}\cdot\sin 33{,}5°}{2{,}93\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}=2{,}84\text{ s}.$$

III./18.

Ha az l hosszúságú deszkából α hajlásszögű lejtőt készítünk, a rajta lévő m' teher súlyának csak a normális komponensét, azaz $m'g\cos\alpha$ nagyságú erőt kell elbírnia. Ha az m kg teherbírású deszka lejtő formájában elbírja az m' tömegű testet, teljesül a következő egyenlet: $mg\geq m'g\cdot\cos\alpha$, amiből a lejtő hajlásszögére

$$\alpha\geq\arccos\frac{m}{m'}=\arccos\frac{60\text{ kg}}{75\text{ kg}}=36{,}86°\ \text{adódik.}$$



III./19.

Egészítsük ki az ábrát, az erők berajzolásával. A testre három erő hat, a két kötélben ébredő erő és a nehézségi erő, melyek eredője zérus, hiszen a test egyensúlyban van. Általános helyzetű erők esetén célszerű a komponenseket összehasonlítani.

Tekintsük a vízszintes összetevőket: $F_A\cos 45°=F_B\cos 60°$

A függőleges komponensekre: $F_A\sin 45°+F_B\sin 60°=mg$.

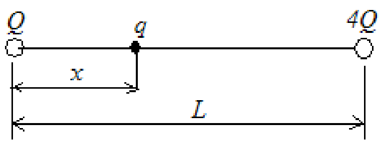
Az első egyenletből $F_B=F_A\dfrac{\cos 45°}{\cos 60°}=4{,}24$ N.

A test tömege: $m=\dfrac{F_A\sin 45°+F_B\sin 60°}{g}=0{,}59$ kg, ahol $g=9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

IV. TÖLTÖTT RÉSZECSKE SZTATIKUS ELEKTROMOS ÉS MÁGNESES TÉRBEN

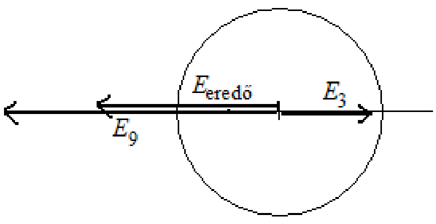
IV./1.

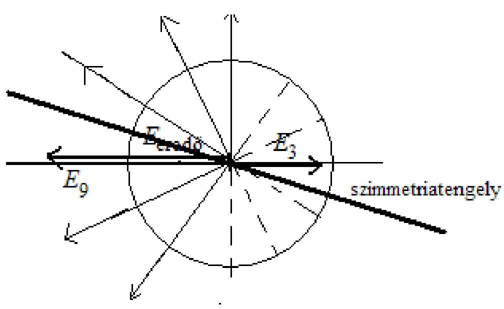
A harmadik, q töltést a két között kell elhelyezni ahhoz, hogy a rá ható két erő ellentétes irányú legyen, így eredőjük zérus lehessen. Jelölje x q és Q távolságát, a q-ra ható két erő ellentétes irányú, és legyen egyenlő: $k\dfrac{qQ}{x^2}=k\dfrac{q4Q}{(L-x)^2}$, *ahol* $x>0$. *Innen* $x=\dfrac{L}{3}$.



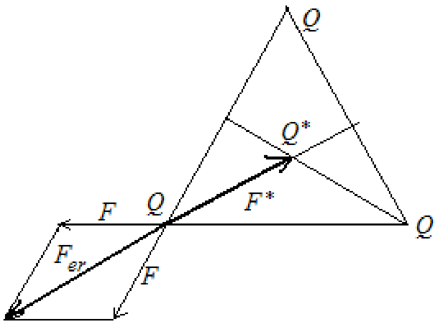
Ez q töltésének előjelétől függetlenül mindig teljesül. Érdekes megvizsgálni azt, hogy milyen változás történik, ha a q töltést elmozdítjuk egy picit az egyik töltés irányába.

IV/4. Vizsgáljuk meg a kör alakú számlapon (egy átlón lévő) két töltés által keltett térerősséget, majd páronként folytassuk ezt, feltételezzük, hogy q>0: Az első esetben: $\left|E_{eredő\,3,9}\right|=\left|k\dfrac{(-9)q}{r^2}-k\dfrac{(-3)q}{r^2}\right|=6k\dfrac{q}{r^2}=6\left|E_1\right|$, bármely két egy átlón lévő töltéstől származó térerősség a számlap közepén pontosan ekkora. A második ábrán látható a 6 térerősség-vektor, mely mindegyike 2-2 töltéstől származik. Ezek összegvektora a bejelölt szimmetriatengelyre esik (először gondoljon arra, hogy a szimmetrikusak összege biztosan erre esik). Vagyis a kismutató fél 10-kor mutat az eredő térerősség irányába.





IV./6.



Rajzoljuk le a három csúcsban lévő töltést és rájuk ható 2-2 $F = k\frac{Q^2}{a^2}$ nagyságú erőt, ahol *a,* a háromszög oldalának hossza. Bármely csúcsban lévő töltésre ható erők összege azonos $F_{er} = 2k\frac{Q^2}{a^2}\cos 30^0 = \sqrt{3}k\frac{Q^2}{a^2}$ nagyságú, és hatásvonala a háromszög szimmetria középpontján átmegy. Ezt az erőt kell kiegyenlítenie a középpontba mutató *F** erőnek, melyet a középpontba tett Q^* (Q-val ellentétes előjelű) töltés biztosíthat.

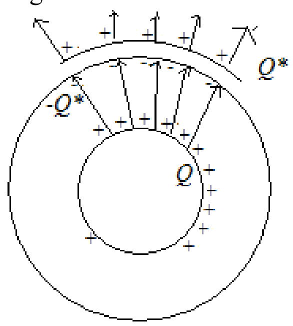
A csúcs és a középpont távolsága a súlyvonal 2/3-része: $d = \frac{2}{3}s = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$. A csúcsokban lévő töltések egyensúlyának a feltétele:

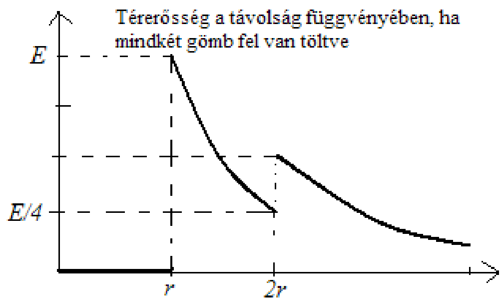
$$F^* = k\frac{|Q\cdot Q^*|}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = 3k\frac{|Q\cdot Q^*|}{a^2}, \quad azaz \quad 3k\frac{|Q\cdot Q^*|}{a^2} = \sqrt{3}k\frac{Q^2}{a^2}, \quad innen \quad \underline{Q^* = -\frac{\sqrt{3}}{3}Q}.$$

IV./7.

A belső gömbre helyezett Q(>0) töltés a gömb külső felszínén egyenletesen helyezkedik el, mert a töltések taszítják egymást, így a gömb belsejében nem lehet töltés. Gondolatban vegyük körül ezt a gömböt a nagyobb sugarú, de még semleges külső gömbbel. Ez utóbbi vékony fém falában töltésmegosztás miatt, a belső felületen ellentétes, negatív -Q* töltés lesz, kívül pedig Q* pozitív. Ahhoz, hogy a külső fém gömbhéj belsejében a térerősség 0 legyen, az összes belső gömbből induló erővonalnak be kell fejeződnie egy a külső gömb belső oldalán keletkezett negatív töltésben, ez csak úgy lehetséges, ha Q=Q*. Vegyük észre, hogy most a két gömb messziről olyan, mintha csak egyetlen 10 cm sugarú gömbünk lenne és arra tettünk volna Q töltést.

Most tegyük rá gondolatban a külső gömbre is a Q töltést, ennek nincs hatása a gömb belsejére. Eljutottunk az eredeti feladat megoldásához:

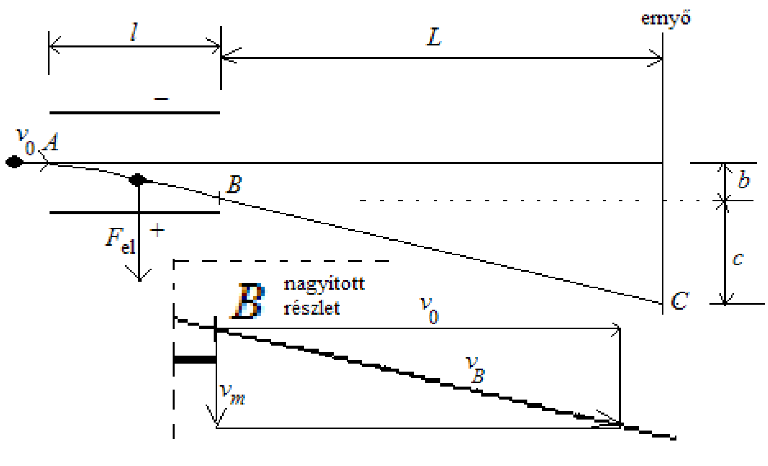




Az *r* távolságban a térerősség: $E = k\frac{Q}{r^2} = 9\cdot 10^9\frac{Nm^2}{C^2}\frac{10^{-10}C}{25\cdot 10^{-4}m^2} = \underline{360\frac{N}{C}}.$

A külső gömb külső felszínén: $E_{2r} = k\frac{2Q}{(2r)^2} = \underline{\frac{E}{2}} = 180\frac{N}{C}.$

IV./9.



A rajz szerint képzeljük el az elektron mozgását, hanyagoljuk el a nehézségi erő hatását.

Az elektron a gyorsítás után v_0 sebességgel érkezik a két lemez közé az A pontba, majd a lemezek között állandó $F_{el} = E\cdot q = \frac{U}{d}q$ nagyságú és a lemezekre merőleges irányú erő hat rá mindaddig, amíg ki nem lép a lemezek közötti térből a B pontban. Ezután nem hat rá erő, ezért mozgása v_B sebességű egyenes vonalú, egyenletes mozgás lesz. A lemezek közötti mozgása nagyon hasonló a vízszintes hajítással mozgó testekéhez. Miután elképzeltük a mozgást, célszerű a számolásnál részekre kell bontani a feladatot:

a) Számítsuk ki mekkora a kezdősebessége: használjuk fel, hogy az elektromos tér munkája a mozgási energiáját növelte:

$U_{gy} \cdot q = \frac{1}{2} m v_0^2, \quad innen \ \ v_0 = \sqrt{\frac{2U_{gy}q}{m}} = \underline{1{,}87 \cdot 10^7 \frac{m}{s}}.$

b) A lemezek közötti mozgása során a lemezekkel párhuzamos elmozdulása v_0 állandó sebességgel történik, a lemezek közötti utat: $t_1 = \frac{l}{v_0} = 1{,}07 \cdot 10^{-9} s$ idő alatt futja be.

A lemezekre merőlegesen gyorsuló mozgást végez: $a = \frac{F_{el}}{m} = \frac{Eq}{m} = \frac{\frac{U}{d} q}{m} = 3{,}52 \cdot 10^{15} \frac{m}{s^2}$ gyorsulással, elmozdulása és a B pontnál a lemezre merőleges sebessége: $b = \frac{a}{2} t_1^2 = 2{,}02 \cdot mm, \quad v_m = a \cdot t_1 = 3{,}77 \cdot 10^6 \frac{m}{s}.$

c) A lemezek közül kilép, és egyenes vonalú mozgást végez BC-vel jelölt szakaszon $t_2 = \frac{L}{v_0} = 10{,}16 \cdot 10^{-9} s$ ideig, és ezalatt a lemezre merőlegesen elmozdul: $c = 0{,}0383 m = 38{,}3 mm$ távolsággal.
Így az elektronnyaláb eltérülése az ernyőn összesen kb. 40 mm.

IV./14. A részecskékre ható súlyerő sokkal kisebb, mint a Lorentz erő. Ezért a súlyerőt nem vesszük figyelembe.
A deuteron egy protonból és egy neutronból álló részecske, eltekintve a proton és neutron tömege közti különbségtől a deuteron tömege a proton tömegének kétszerese, illetve a neutron semleges révén a proton és a deuteron részecske töltése megegyezik.
Adatok: $q_p = q_d = q$, $m_p = m$, $m_d = 2 \cdot m$, r_p =15 cm

I. A részecskék mozgási energiája azonos: $\frac{1}{2} \cdot m_p \cdot v_p{}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_d \cdot v_d{}^2 .$

Behelyettesítve az adatokat: $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_p{}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_d{}^2 .$

Kifejezve a deuteron sebességét: $v_d = \frac{v_p}{\sqrt{2}} .$

II. Mágneses térben mozgó töltött részecskére a Lorentz ($\vec{F_l} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$) erő hat. Mivel a részecskék a mágneses indukcióra merőlegesen lépnek a kamrába, ezért az erő nagysága:

$$F_l = q \cdot v \cdot B .$$

Iránya, mindig a részecskék sebességére merőleges, ezért a részecskék körpályán mozognak. A részecske mozgásegyenlete:

$m \cdot a_{cp} = q \cdot v \cdot B$, és figyelembe véve, hogy: $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$, $m \cdot \frac{v^2}{r} = q \cdot v \cdot B .$

Kifejezve a körpálya sugarát: $r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} .$

Így a proton és a deuteron esetén: $r_p = \frac{m \cdot v_p}{q \cdot B}, \qquad r_d = \frac{2 \cdot m \cdot v_d}{q \cdot B} .$

Behelyettesítve a deuteron sebességére nyert kifejezést:

$$r_d = \frac{2 \cdot m \cdot (v_p / \sqrt{2})}{q \cdot B} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{m \cdot v_p}{q \cdot B} .$$

A proton esetén kapott kifejezést behelyettesítve:

$$r_d = \sqrt{2} \cdot r_p , \qquad \underline{\underline{r_d = 21{,}21 \text{ cm}}}.$$