V. MUNKA, ENERGIA, TELJESÍTMÉNY

V./3.

Először határozzuk meg a testre ható erőket:
A nehézségi erőt bontsuk fel a rajz szerint a lejtővel párhuzamos, és arra merőleges összetevőkre. A feladat szerint a gyorsulás 0, ezért $\vec{F}_{eredő} = 0$.
Írjuk fel a lejtővel párhuzamos és merőleges összetevőkre a mozgásegyenletet:

$$F - S - mg\sin\alpha = 0,$$
$$K - mg\cos\alpha = 0.$$

Innen: $K = mg\cos\alpha = 33{,}98\ \text{N}$, ahol $F_g = mg = 39{,}24$ N. A súrlódási erőről tudjuk, hogy $S = \mu K = \mu mg\cos\alpha = 5{,}10\ \text{N}$, ezt az első egyenletbe helyettesítve: $F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = 24{,}72\ \text{N}$, az erők iránya pedig az ábrán látható.

Az út: $s = \dfrac{h}{\sin\alpha} = 4$ m.

Az egyes erők munkája: $W_g = mgs\cos(90° + \alpha) = -mgh = -78{,}48\ \text{J}$, $W_F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\dfrac{h}{\sin\alpha} = 98{,}87\ \text{J}$, $W_S = S\dfrac{h}{\sin\alpha}\cos 180° = -20{,}40\ \text{J}$, $W_K = K \cdot s\cos 90° = 0$.

Az erők munkájának összege: $W = W_g + W_F + W_K + W_S = 0.$

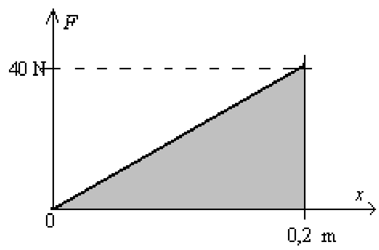
V./4.

A végzett munkát a „görbe alatti területből" számolhatjuk ki. Az x tengely feletti területet pozitív, az alatti részt negatív előjellel kell számításba venni:

$$W = \frac{2\ \text{N} \cdot 2\ \text{m}}{2} - \frac{2\ \text{m} + 1\ \text{m}}{2} \cdot 1\ \text{m} = 0{,}5\ \text{J},\ P_{átl} = \frac{W}{t} = 125\ \text{mW}.$$

V./6.

A megnyújtást végezzük nagyon lassan, akkor a rugóban ébredő erő és az általunk kifejtett erő egymással egyenlő lesz, és az elmozdulással mindig arányos: $F = |F_r| = D \cdot x$, ahol $0 \le x \le 0{,}2$ m. Ábrázoljuk az erőt az elmozdulás függvényében, és határozzuk meg a görbe alatti területet:



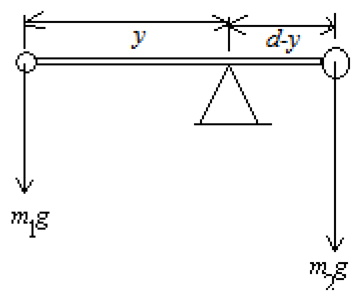
$$W = \frac{F_{max} x_{max}}{2} = \frac{D x_{max}^2}{2} = 4\ \text{J},\ \text{ahol}\ D = \frac{F_{max}}{x_{max}} = 200\ \tfrac{\text{N}}{\text{m}}.$$

A rugóban tárolt energia megegyezik a megnyújtásakor végzett munkával.

VI. MECHANIKAI RENDSZEREKRE VONATKOZÓ FONTOSABB ISMERETEK

VI./2.

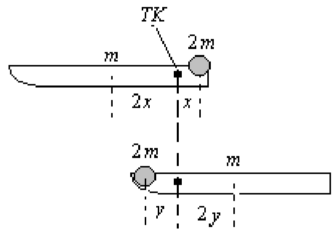
A pontok sajátos helyzete miatt könnyen leolvasható a két pont távolsága egymástól (7 m). Tekinthetünk egy elhanyagolható tömegű, $d = 7$ m hosszúságú rudat, melynek egyik végére 3 kg-os, másik végére 4 kg-os, pontszerűnek tekinthető testet erősítünk. Ennek ott lesz a tömegközéppontja, ahol alátámasztva egyensúlyban lesz. Készítsünk egy egyszerű ábrát, melyről az egyensúly feltétele: $m_1 g \cdot y = m_2 g(d - y)$, innen $y = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} d = 4$ m. Ebből kiszámítható, hogy a 3 kg-os testtől a tömegközéppont 4 m távolságra van. Egy kicsit átalakíthatjuk ezt az eredményt $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{d - y}{y}$ alakba,



amit úgy is megfogalmazhatunk, hogy a tömegek fordítottan arányosak a tömegközépponttól mért távolságukkal. Ez az általánosítás akkor is használható, ha a tömegpontok tetszőleges irányban helyezkednek el. A tömegközéppont helye: $TK = (1\ \text{m}, -2\ \text{m})$

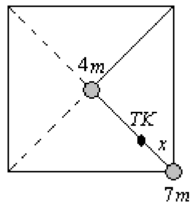
VI./3.

Tételezzük fel, hogy a mozgás elég lassú, továbbá a csónak és a víz között fellépő súrlódási erőt hanyagoljuk el. Ha a csónakot és a gyereket tekintjük egy rendszernek, akkor erre a rendszerre mint külső erő a nehézségi erő és a víz felhajtóereje hat. Ezek eredője 0, ezért a gyerek és a csónak között fellépő belső erők hatására a tömegközéppont vízszintesen nem mozdulhat el (függőlegesen sem). Ez azt jelenti, hogy a csónak és a gyerek közben elmozdul. Az üres csónak tömegközéppontja legyen a csónak végétől $3x$ távolságra, az orrától pedig $3y$-ra, azaz $3x+3y=3\ \mathrm{m}$. Az együttes, mindvégig álló *TK* tömegközéppont a gyerektől az első esetben x, a második esetben y távolságban van (a tömegközéppont távolsága a tömeggel fordítottan arányos). Vagyis a gyermek parthoz képest mért elmozdulása: $x+y=1\ \mathrm{m}$.



VI./4.

A 2 cm sugarú golyó tömege megegyezik 8 db 1 cm sugarú golyó $8\,m$ tömegével. Először gondolatban a négy csúcsba tegyünk 4 egyforma golyót, ezek tömegközéppontja a négyzet átlóinak metszéspontjában lesz. Az átformált feladat a következőképpen szemléltethető: $4m$ a középpontban van, majd a maradék $7\,m$ a „negyedik” csúcsban. Az ezeket összekötő szakaszt a tömegközéppont 4:7 arányban osztja fel: $x=\frac{4}{11}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}10\ \mathrm{cm}\right)$=2,57 cm.



VI./6.

Legyen a koordinátatengely függőleges, kezdőpontja a talajon, és induljon a test az x_0= 5 m pontból.

A talajra érkezés ideje: $x_0=\frac{1}{2}gt_1^2$ összefüggésből: $t_1=\sqrt{\frac{2x_o}{g}}=1\,\mathrm{s}$. A sebessége a leérkezésig negatív, ezért $v=-gt$, ahol $t\le 1\,s$. A leérkezéskor a sebessége $v_1=-9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. A test helyzete $x=x_0-\frac{1}{2}gt^2$, ahol $t\le 1\,\mathrm{s}$. Az utóbbi egyenletből kifejezzük t-t, és a sebesség összefüggésébe helyettesítve, kapjuk, hogy az impulzus: $I=-m\sqrt{2g\left(x_0-x\right)}$.

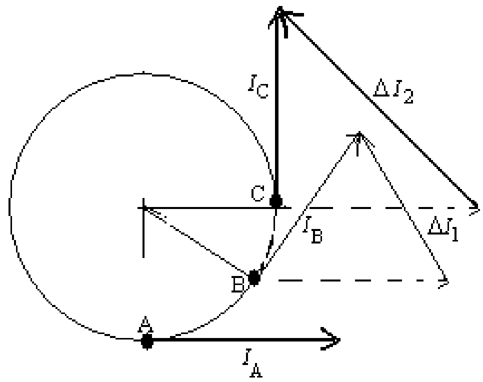
A rugalmas ütközés után a sebességnek csak az előjele változik meg, majd csökken az emelkedés közben, úgy, hogy $I=m\sqrt{2g\left(x_0-x\right)}$.

VI./7.

r= 0,6 m m= 0,2 kg T= 12 s

A test $\omega=\frac{2\pi}{T}=0{,}523\,\frac{1}{s}$ szögsebességgel, és $v=0{,}314\,\frac{\mathrm{m}}{s}$ kerületi sebességgel végez körmozgást. Impulzusának nagysága: $I=mv=0{,}0628\,\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s}}$, amely időben állandó.

Az impulzus(vektor) azért változik meg ebben az esetben, mert a test impulzus mindig a pálya érintője irányába mutat, ahogy a sebessége is. Az impulzusváltozás nagysága 2 s alatt éppen egyenlő az impulzus nagyságával: $\left|\Delta I_1\right|=I$. Míg a 3 s alatti változás nagysága a megrajzolt derékszögű háromszög átfogójából számolható ki: $\Delta I_2=I\sqrt{2}=0{,}0888\,\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s}}$.



Az impulzusnyomaték-vektor a rajz síkjára merőlegesen kifelé mutató vektor, nagysága: $N=r\cdot\left(mv\right)=r\cdot I=0{,}0377\,\frac{\mathrm{kg\cdot m^2}}{\mathrm{s}}$. Ha a fonál elszakad, akkor a test a pályát érintő irányban hagyja el v sebességgel, és $s=\sqrt{\left(1\ \mathrm{m}\right)^2-\left(0{,}6\ \mathrm{m}\right)^2}=0{,}8\ \mathrm{m}$ megtétele után lesz a megadott távolságban, vagyis $t=\frac{s}{v}=2{,}55\ \mathrm{s}$ idő múlva.

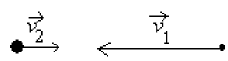
VI./12.

T= 300 K, M_1= 28 g/mol, M_2= 115 g/mol, v_2= 5 m/s, ρ_2= 7,31 g/cm^3, N_A=6·10^{23} 1/mol, R =8,31 J/K

További jelölések:

a nanorészecske tömege, sugara, atomjainak száma, ütközés utáni sebessége: m_2, r_2, N_2, u_2

a nitrogénmolekula tömege, ütközés előtti és ütközés utáni sebessége: m_1, v_1, u_1



Először határozzuk meg a nitrogénmolekula átlagos sebességének nagyságát: $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m_1\overline{v^2}$. Innen $v_{átl} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M_1}} = 517\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = |v_1|$. Tegyük fel, hogy egy pontosan átlagos sebességgel mozgó nitrogénmolekula centrális, egyenes ütközést szenved egy nanorészecskével. Akkor lesz nagyobb a sebességváltozás, ha ez az ütközés ellentétes sebességgel rendelkező részek között jön létre. Ha a sebességváltozást akarjuk meghatározni, akkor választhatjuk azt a megfigyelési rendszert, melyben ütközés előtt a nanorészecske állt, ebben a rendszerben a megfelelő sebességekre a $v_{1\text{rel}}$, $v_{2\text{rel}}$, $u_{1\text{rel}}$, $u_{2\text{rel}}$ jelöléseket használjuk. (A feladat megoldható laboratóriumhoz rögzített rendszerben is.) Ekkor: $v_{1\text{rel}} = v_1 - v_2$. Az ütközés tökéletesen rugalmas, a részecskék szembe repülnek egymással, hanyagoljuk el az elektrosztatikus kölcsönhatást. A lendületmegmaradás törvényéből: $m_1 \cdot v_{1rel} = m_1 \cdot u_{1rel} + m_2 \cdot u_{2rel}$, a mechanikai energia megmaradásának törvényéből: $\frac{1}{2}m_{1rel}v_{1rel}^2 = \frac{1}{2}m_{1rel}u_{1rel}^2 + \frac{1}{2}m_{2rel}u_{2rel}^2$. Innen

$$u_{2rel} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1rel} \quad \text{és} \quad u_2 = u_{2rel} + v_2 = \frac{2m_1v_1 - (m_2 - m_1)v_2}{m_1+m_2}.$$

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor $|u_{2rel}| = 0{,}05v_2$, vagyis: $0{,}05v_2 = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}|v_{1rel}|$, $0{,}05v_2 = \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}|v_1 - v_2|$, ahonnan a nanorészecske tömege: $\underline{\underline{m_2}} = 40m_1\dfrac{|v_1| + v_2}{v_2} - m_1 = 4175m_1 = 1{,}95 \cdot 10^{-19}$ g.

Mivel $\dfrac{4r_2^3\pi}{3}\rho_2 = m_2$, a részecske sugara $r_2 = \sqrt[3]{\dfrac{3m_2}{4\pi\rho_2}} = 1{,}85$ nm. A nanorészecskét alkotó atomok számát megbecsülhetjük: $\underline{\underline{N_2}} \approx \dfrac{m_2}{M_2}N_A = \underline{\underline{1017}}$.

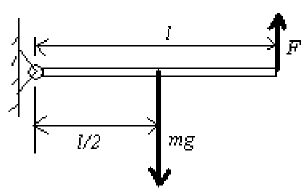
VII. A merev testre ható erők összetevése, egyensúlya, tengely körüli forgómozgása

VII./1.

Rajzoljuk le az erőt az x–y síkban. Az erő hatásvonala metszi mind az x, mind az y tengelyt, ezért ezekre a tengelyekre a forgatónyomaték nulla. Hasonlóan látszik, hogy ezekre a tengelyekre az erő komponenseinek forgatónyomatékai is zérus. A z tengelyre $M_z = F \cdot k = 10\sqrt{2}\text{N} \cdot \sqrt{2}\text{m} = 20\ \text{Nm}$, iránya a $+z$ tengely irányába mutat, mert onnan visszanézve a forgás iránya ellentétes az óramutató járásával (megegyezés szerint ezt az irányt szokás pozitívnak tekinteni).

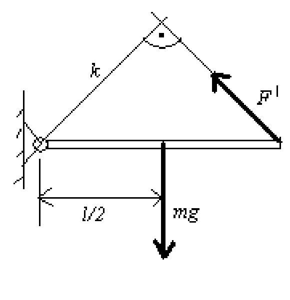
VII./10.

Jelöljük a bal és a jobb oldali mérlegkar hosszát l_b-vel, ill. l_j-vel, kiegyensúlyozó tömeget az első esetben m_1-gyel, a másodikban m_2-vel. Az egyensúly feltétele, hogy a két oldalon ható nehézségi erők forgatónyomatéka azonos nagyságú legyen. Az első esetben $mgl_b = m_1gl_j$, a másodikban $m_2gl_b = mgl_j$. Ezek felhasználásával kapjuk, hogy $m = \sqrt{m_1m_2} = 0{,}6$ kg, illetve $\dfrac{l_b}{l_j} = \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}} = 2$.



VII./14.

Készítsünk rajzot az első esethez. Az egyensúly feltétele, hogy a forgatónyomatékok eredője legyen nulla: $F \cdot l - mg\dfrac{l}{2} = 0$, innen $F = \dfrac{mg}{2} = 125$ N.



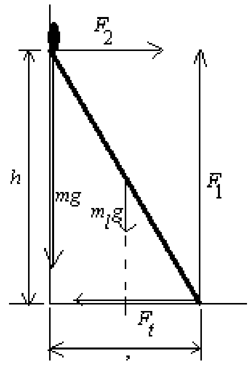
A második esetben az erő karja az ábra alapján $k = l\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}41$ m. Az egyensúly feltétele:

$$F' \cdot k = mg\frac{l}{2}, \text{ innen } F' = mg\frac{l}{2}\frac{\sqrt{2}}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg = 176{,}8\ \text{N}.$$

VII./16.

Készítsünk egy ábrát, amelyen tüntessük fel a jelöléseket. A rúd és a létra együttese akkor lesz egyensúlyban, ha az erők eredője és az erők forgatónyomatékainak összege egy tetszőlegesen választott tengelyre zérus. Az erők függőleges és vízszintes komponenseire is felírva az egyenletet $mg + m_l g = F_1$ és $F_2 = F_t$. A tapadási erőről tudjuk, hogy $F_t \le \mu_0 F_1$. Válasszuk forgástengelyül a rajz síkjára merőleges, a sarokponton átmenő tengelyt. Ekkor $F_1 d - F_2 h - m_l g \dfrac{d}{2} = 0$, ahol $h = \sqrt{(3\text{m})^2 - (1{,}2\text{m})^2} = 2{,}75\ \text{m}$, innen $F_2 = (2m + m_l) g \dfrac{d}{2h} = 363{,}8\text{N}$. Felhasználva az eddigi eredményeket:

$$\mu_0 \ge \frac{F_2}{F_1} = \frac{2m + m_l}{2(m + m_l)} \frac{d}{h} = 0{,}41.$$

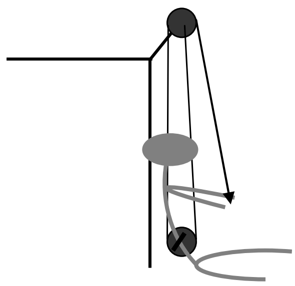


VII./19.

A csigasor álló és mozgó csigákból összeállított gép. Az egyes csigákat úgy építik be, hogy az egy tengelyen elhelyezkedő csigák nemcsak a tengelyhez, hanem egymáshoz képest is el tudnak fordulni. A gyakorlatban a csigasort gyakran úgy készítik el, hogy az álló csigákat és a mozgó csigákat is egy-egy közös tengelyre szerelik, a tengelyt pedig zárt keret tartja. Az *n* csigából álló csigasor utolsó állócsigájáról lefutó kötélre kifejtendő erő a teher által kifejtett erő *n*-ed részével egyenlőre van szükség.
Mivel jelen esetben *n* = 2, az ipari alpinistának

$$F = \frac{mg}{n} = \frac{75\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2} = 367{,}875\ \text{N}$$

nagyságú erőt kell kifejtenie a saját testsúlyának felemeléséhez.

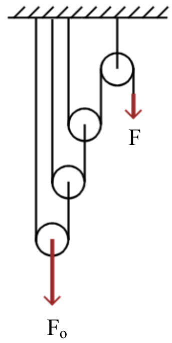


VII./20.

Az arkhimédészi csigasor egy álló csigából és több mozgó csigából áll. A mozgó csigák egyik kötélágát rögzítik, a másik kötélág az előző mozgócsiga tengelyét terheli. Az első mozgó csiga mozgó kötélága az álló csigán van átvetve. Ezzel az elrendezéssel nagyon nagy áttételt lehet megvalósítani, ennek ellenére a gyakorlatban ritkán használják.

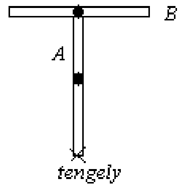
Ha egy arkhimédészi csigasor *n* db csigából áll, az ábra jelöléseit használva $F = \dfrac{F_0}{2^n}$. Jelen feladatban F_0 = 1200 N és F = 75 N. A fenti összefüggés alapján

$$n = \log_2 \frac{F_0}{F} = \log_2 \frac{1200}{75} = 4.$$



VII./22.

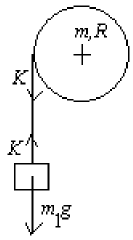
A tehetetlenségi nyomaték additív mennyiség, értéke az egyes részek tehetetlenségi nyomatékából tevődik össze. Az egyes rudaknak, a sötéttel megjelölt tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka: $\Theta_0 = \dfrac{1}{12} m l^2$, a kijelölt tengelyre: $\Theta_A = \Theta_0 + m\left(\dfrac{l}{2}\right)^2$ és $\Theta_B = \Theta_0 + m l^2$, az egész rendszerre: $\Theta_t = 2\Theta_0 + \dfrac{5}{4} m l^2 = \dfrac{17}{12} m l^2 = 0{,}177\ \text{kgm}^2$. A legkisebb a tehetetlenségi nyomaték, a rendszer tömegközéppontján átmenő tengelyre, a rendszer tömegközéppontja a két rúd tömegközéppontját felező távolságban van:



$$\theta_{\min} = \frac{1}{12} m l^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{1}{12} m l^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{11}{48} m l^2 = 0{,}0287\ \text{kgm}^2.$$

VII./24.

A korong gyorsuló forgó mozgást végez a $K \cdot R = \Theta \cdot \beta$ egyenlet szerint, a hasáb pedig egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez az $m \cdot a = mg - K$ egyenlet szerint. A kötélről feltételezzük, hogy nyújthatatlan, ebből következik az $a = \beta \cdot R$ kényszerfeltétel. A három egyenletből: $a = \frac{m_1}{m_1 + \frac{m}{2}} g$, $\beta = \frac{m_1}{m_1 + \frac{m}{2}} \frac{g}{R}$ és $K = \frac{1}{2} \frac{m \cdot m_1}{m_1 + \frac{m}{2}} g$.



Az ***a)*** esetben $\beta = \frac{2}{3} \frac{g}{R}$ és $K = \frac{1}{3} mg$, a ***b)*** esetben pedig $\beta = \frac{g}{2R}$ és $K = \frac{1}{4} mg$.

VII./25.

A test süllyedéséből tudjuk, hogy a rá ható erők eredője nulla, továbbá a kényszer miatt a korong sem gyorsulhat. A kötélben ébredő erő egyenlő a testre ható nehézségi erővel: $K = mg$. A kötél a koronghoz húzott érintő irányában K erővel $M_{kötél} = K \cdot r$ forgatónyomatékot fejt ki a korongra, ennek a forgatónyomatéknak egyenlőnek kell lenni a fékező nyomatékkal: $M_{kötél} = K \cdot r = 0{,}1$ Nm. Innen $K = 0{,}5$ N, $m = 0{,}051$ kg, $E_k = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_k r^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4} m_k v^2 = 0{,}1875$ J,

$E_{test} = \frac{1}{2} m v^2 = 6{,}4$ mJ, $W_g = -W_f = mg \cdot s = mg \cdot vt = 0{,}5$ J.

VII:/27.

Tételezzük fel, hogy a fékpofák a kerék peremén vannak elhelyezve. Ekkor összesen $M_f = F_s \cdot r = \mu \cdot 2F_{ny} \cdot r = 3{,}375$ Nm fékező forgatónyomatékot fejtenek ki. A személy által végzett munka $W = -W_f = |M_f| \cdot 10 \cdot 48 \cdot 2\pi = 10{,}17$ kJ, teljesítménye $P \approx 17$ W, egy 60 kg tömegű ember ennyi munka árán, kb. 17 méter magasra jutna egy toronyban.

VII./28.

A rúd a helyzeti energiája rovására mozgási energiára tesz szert, a mechanikai energiamegmaradás elve szerint $E_{kin2} + E_{pot2} = E_{kin1} + E_{pot1}$, vagyis $E_{kin2} = |\Delta E_{pot}| = m_{összes} g |\Delta h_{TK}| = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$, innen $\omega = \sqrt{\frac{2 m_{összes} g |\Delta h_{TK}|}{\Theta}}$, $v = \omega \cdot l$.

Az ***a)*** esetben $|\Delta h_{TK}| = l$, $m_{összes} = m$, $\Theta = ml^2$, ezekkel $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}} = 3{,}13\ \frac{1}{\text{s}}$, $v = 6{,}26\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ha a rúd tömege nem hanyagolható el a ***b)*** eset szerint $|\Delta h_{TK}| = \frac{3}{4} l$, $m_{összes} = 2m$, $\Theta = ml^2 + \frac{1}{3} ml^2 = \frac{4}{3} ml^2$, innen

$\omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} = 3{,}32\ \frac{1}{\text{s}}$, $v = 6{,}64\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

VIII. HARMONIKUS REZGÉSEK ÉS HULLÁMOK

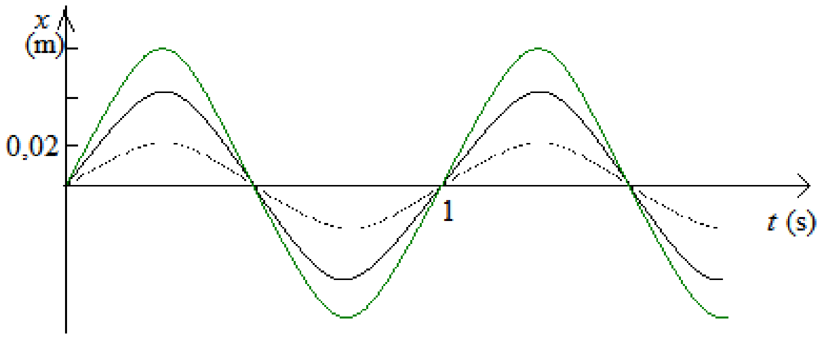
VIII./7.

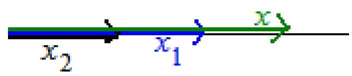
A matematikai inga periódusideje a következőképpen számítható ki: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Ebből az látszik, hogyha az A inga hossza 4-szerese a B inga hosszának, akkor tömegüktől <u>függetlenül</u> a lengésidők között mindig fennáll a $T_A = 2T_B$ összefüggés.

VIII./12.

Az eredő mozgás az x tengely irányában harmonikus rezgés lesz, mert két azonos irányú, azonos frekvenciájú rezgést adunk össze:

$$x = x_1 + x_2 = 0{,}04\,\text{m} \sin 2\pi \tfrac{1}{\text{s}} t + 0{,}02\,\text{m} \sin\left(2\pi \tfrac{1}{\text{s}} t + 2\pi\right) = 0{,}04 m \sin 2\pi \tfrac{1}{\text{s}} t + 0{,}02\,\text{m} \sin 2\pi \tfrac{1}{\text{s}} t =$$
$$= 0{,}06\,\text{m} \sin 2\pi \tfrac{1}{\text{s}} t$$





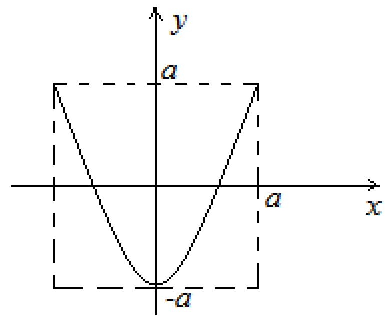
Az eredő rezgés amplitúdója 0,06m, periódusideje 1 s, körfrekvenciája $2\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}}$.
A forgóvektoros ábra rendkívül egyszerű lesz ennél a feladatnál, hiszen a két eredeti rezgéshez tartozó vektor a szokásos vízszintes tengely irányába esik, így összegük is arra mutat.

VIII./17.

A feladatban egy síkgörbe paraméteres alakban adott, matematikai feladatunk az, hogy a t paramétert kiküszöböljük. Célszerű először átalakítani az y koordinátát leíró függvényt:

$y = a\cos 2\omega t = a\left(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t\right) = a\left(2\cos^2\omega t - 1\right)$, most pedig az x összefüggéséből helyettesítsük be a cosωt-t, innen

$y = a\left(\dfrac{x^2}{a^2} - 1\right)$. Egy parabola egyenletét kaptuk, és az eredeti összefüggésekből $x \in [-a;a]$, $y \in [-a;a]$..



IX. HULLÁMOK

IX./1.

Számoljuk ki a kötélen terjedő hullám hullámhosszát: $\lambda = T\cdot v = 2\,\mathrm{s}\cdot 0{,}8\,\mathrm{m/s} = 1{,}6\,\mathrm{m}$. A szomszédos hullámhegyek távolsága a hullámhosszal egyenlő, egy hullámhegy a legközelebbi hullámvölgytől (a transzverzális hullám minimumhelyétől) $\lambda/2$ távolságra van.
Hullámhegyek lesznek: 0,3 m, 1,9 m, 3,5 m...
Hullámvölgyek helyei: 0,3 + 0,8 m = 1,1 m, 2,7 m, 4,3 m…

IX./14.

Az l hosszúságú húron kialakuló sajátrezgésnél a húr végein csomópont alakul ki, a szomszédos csomópontok távolsága egyenlő a λ hullámhossz felével, ezért:

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \text{ ahol } n \text{ egész szám.}$$

A feladatban szereplő két frekvenciaértékre:

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} = n\frac{c}{2\cdot f_n}, \qquad l = (n+1)\frac{\lambda_{n+1}}{2} = (n+1)\frac{c}{2\cdot f_{n+1}}.$$

A két egyenlet elosztásával:

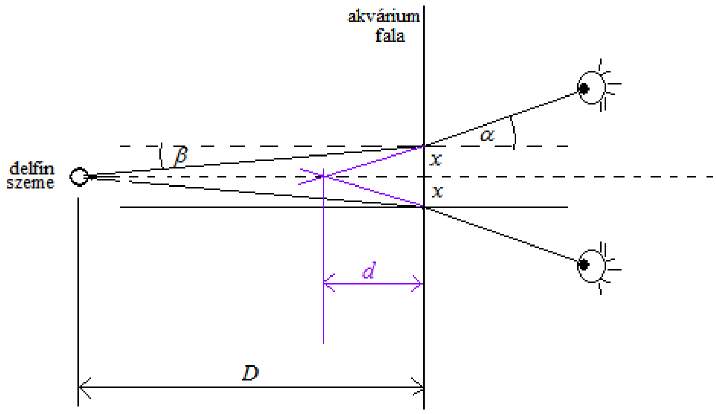
$\dfrac{f_n}{n} = \dfrac{f_{n+1}}{n+1}$, behelyettesítés és egyszerűsítés után: $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{5}{6}$, azaz $n = 5$.

A hullám terjedési sebessége: $c = \dfrac{2lf_n}{n} = 54{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, az alapfrekvencia $f_1 = \dfrac{f_5}{5} = 17\,\mathrm{Hz}$, a 85 Hz-es hullám

X. OPTIKA

X./6.

Tételezzük fel, hogy az akvárium falának vastagsága elhanyagolható a többi méret mellett, és készítsünk rajzot, amelyen a delfin szeméből kiinduló fénysugár a megfigyelő két szemébe érkezik:



A tárgyakat a szemünkbe jutó fény meghosszabbításában látjuk. Ezen az ábrán az akvárium falánál törik meg a fény, ezért a szemünkbe jutó fény kékkel rajzolt meghosszabbításában látjuk a delfin szemét.
A számolásnál felhasználjuk, hogy az ember szemeinek távolsága a feladatban szereplő méretekhez képest kicsi, ezért a szögek is kicsik, $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$.

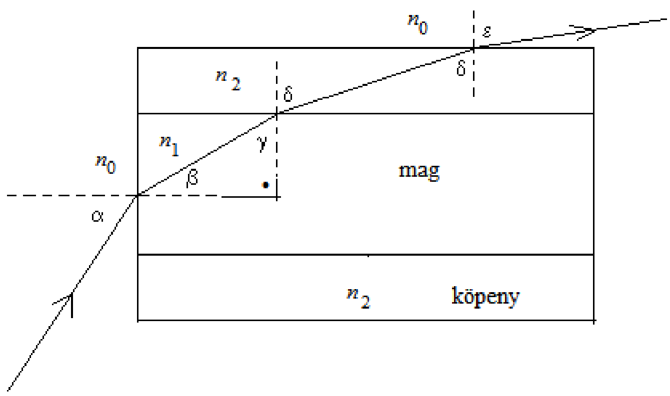
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{víz}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x}{D}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{d} \quad \text{és} \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{x}{d}}{\frac{x}{D}} = \frac{D}{d}, \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \approx \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$\text{ebből} \quad \frac{D}{d} \approx n_{víz}, \quad \text{innen} \quad d \approx \frac{D}{n_{víz}} = \frac{1\,\text{m}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\text{m} = 0{,}75\,\text{m}.$$

A delfin szemét tehát az akvárium fala mögött 75 cm távolságban látjuk.

X./9.

A fény akkor nem jut át a számolás egyszerűsítése végett egyenesnek gondolt fényvezetőn, ha három törés után kilép a köpenyből. A jelöléseket használjuk az ábra szerint:



Írjuk fel a törés törvényét egymás után a három törésre:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_1}{n_0}, \qquad \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} = \frac{n_0}{n_2}..$$

Akkor nem lép ki fény a köpenyen keresztül, ha δ eléri a teljes visszaverődés határszögét, vagy annál nagyobb. A határszögnél $\varepsilon = 90°$, $\sin\delta_h = \frac{n_0}{n_2}$, a második törést leíró egyenletből a δ_h-hoz tartozó γ_{min}-t számíthatjuk ki, a feladat

feltétele szerint a γ szög ennél nem lehet kisebb. Mivel a β és γ egy derékszögű háromszög két hegyes szöge, $\beta = 90° - \gamma$, így $\beta_{max} = 90° - \gamma_{min}$.
Ezeket felhasználva a következőt kapjuk:

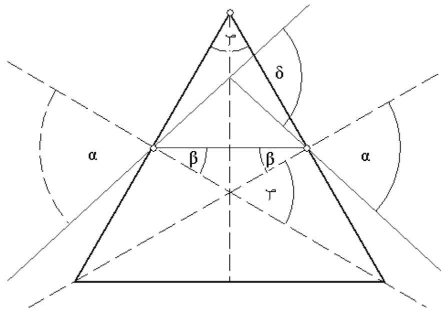
$$\frac{\sin\alpha_{max}}{\sin\beta_{max}} = \frac{n_1}{n_0}, \quad \sin\alpha_{max} = \frac{n_1}{n_0}\sin\beta_{max} = \frac{n_1}{n_0}\sin\left(90^0 - \gamma_{min}\right) = \frac{n_1}{n_0}\cos\gamma_{min} = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\sin\gamma_{min}} =$$

$$= \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2\delta_h} = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(\frac{n_0}{n_2}\right)^2} = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 - 1} = \sqrt{n_1^2 - 1},$$

$$\sin\alpha_{max} = \sqrt{n_1^2 - 1}.$$

Ha $n_1 \geq \sqrt{2} = 1,41$, akkor bármely beesési szög esetén áthalad a fényvezetőn a fény.

X./10.



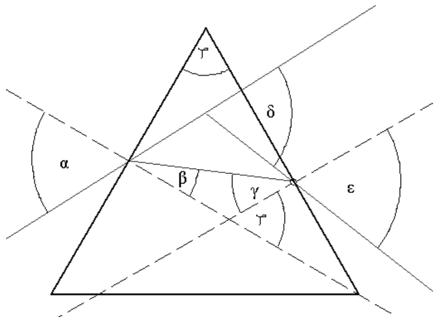
Ha a prizmában a fénysugár útja merőleges a prizma törőszögének szögfelezőjére, a fénysugár szimmetrikusan halad a prizmában. Jelölje α és β a beesési és törési szögeket, φ a prizma törőszögét, valamint δ a nyaláb eltérítési szögét (mely jelen esetben a legkisebb eltérítési szög, ezért ezentúl $\delta_{min.}$-nel jelöljük). Geometriai megfontolásokból $\beta = \frac{\varphi}{2}$ és $\delta_{min.} = 2(\alpha - \beta)$, ez utóbbiból $\alpha = \frac{\delta_{min.} + \varphi}{2}$.

Írjuk fel a Snellius–Descartes-törvényt a prizma lapján végbemenő törésre (a megadott n törésmutató a prizma anyagának a prizmát körülvevő közegre vonatkoztatott relatív törésmutatója):

$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{\delta_{min.}+\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, amelyből a legkisebb eltérítés szöge $\delta_{min.} = 2\arcsin\left(n \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\right) - \varphi$. A legkisebb eltérítés szöge a két különböző törőszögű prizmára vonatkozóan:

$$\delta_{45°} = 2\arcsin\left(1,519 \cdot \sin\frac{45°}{2}\right) - 45° = 26,08° \text{ és } \delta_{60°} = 2\arcsin\left(1,519 \cdot \sin\frac{60°}{2}\right) - 60° = 38,84°.$$

X./11.



Az előző feladatból tudjuk, hogy a zöld fénysugárra az eltérítés szöge $\delta_2 = \delta_{60°} = 38,84°$ lesz, és a háromszínű fénynyaláb $\alpha = \frac{\delta_{60°} + \varphi}{2} = \frac{38,84° + 60°}{2} = 49,42°$-os szög alatt érkezik a prizma első törőfelületére.

A prizmában haladó fénysugár útja a kék sugárra nem a szimmetrikus sugármenetet követi, az eltérítés szögének kiszámításához az alábbi jelöléseket vezetjük be. Az ábra alapján felírható, hogy $\delta = (\alpha - \beta) + (\varepsilon - \gamma)$ és $\varphi = \beta + \gamma$, amelyekből $\delta = \alpha + \varepsilon - \varphi$. Írjuk fel a Snellius–Descartes-törvényt az első törőfelületen bekövetkező törésre: $n_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, amelyből $\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 49,42°}{1,530}\right) = 29,76°.$

A $\varphi = \beta + \gamma$ összefüggésből $\gamma = \varphi - \beta = 60° - 29,76° = 30,24°$ adódik. Most a második törőfelületre írjuk fel a Snellius–Descartes-törvényt: $n_1 = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma}$, ebből $\varepsilon = \arcsin(n_1 \cdot \sin\gamma) = \arcsin(1,530 \cdot \sin 30,24°) = 50,40°.$

Ezt az ábra alatt található összefüggésbe visszahelyettesítve:

$$\delta_1 = \alpha + \varepsilon - \varphi = 49,42° + 50,40° - 60° = 39,82°.$$

A vörös színű fénysugárra a fenti gondolatmenetet követve $\beta = 30,11°$, $\gamma = 29,89°$ és $\varepsilon = 48,98°$, ezekből $\delta_3 = 38,40°$. A három eltérítési szögből a kilépő fénysugaraknak a középső, zöld színű nyalábbal bezárt szögük

$$\phi_{kék-zöld} = \delta_1 - \delta_2 = 39,82° - 38,84° = 0,98° \text{ és } \phi_{vörös-zöld} = \delta_3 - \delta_2 = 38,40° - 38,84° = -0,44°.$$