

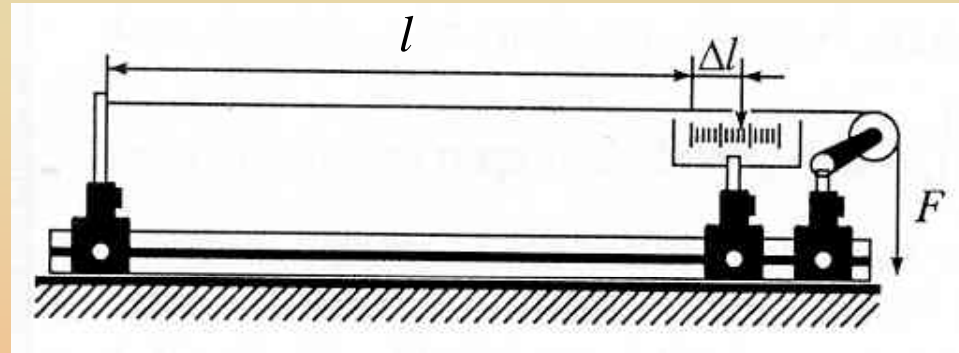
Kontinuumok mechanikája

Szabó Gábor egyetemi tanár
SZTE Optikai Tanszék

Szilárd testek rugalmas alakváltozásai

Nyújtás

$$\Delta l = l \frac{1}{E} \frac{F}{A}$$



Hooke törvény, E Young modulus

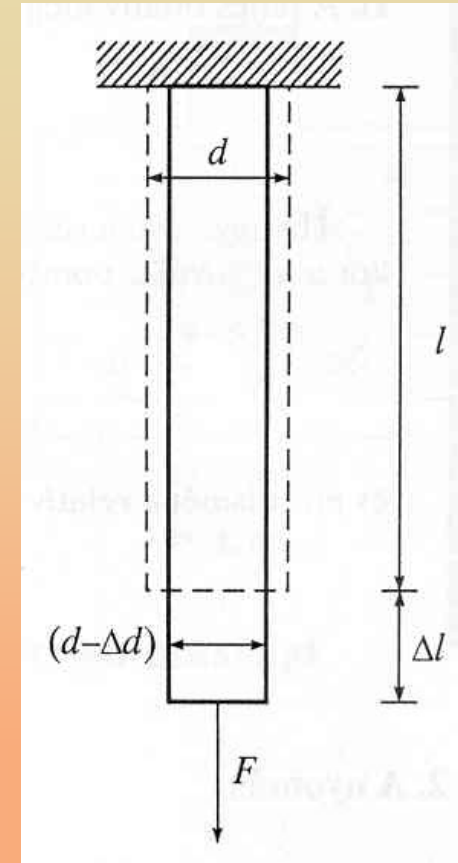
$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \sigma \text{ a feszültség}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$

Szilárd testek rugalmas alakváltozásai

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}$$

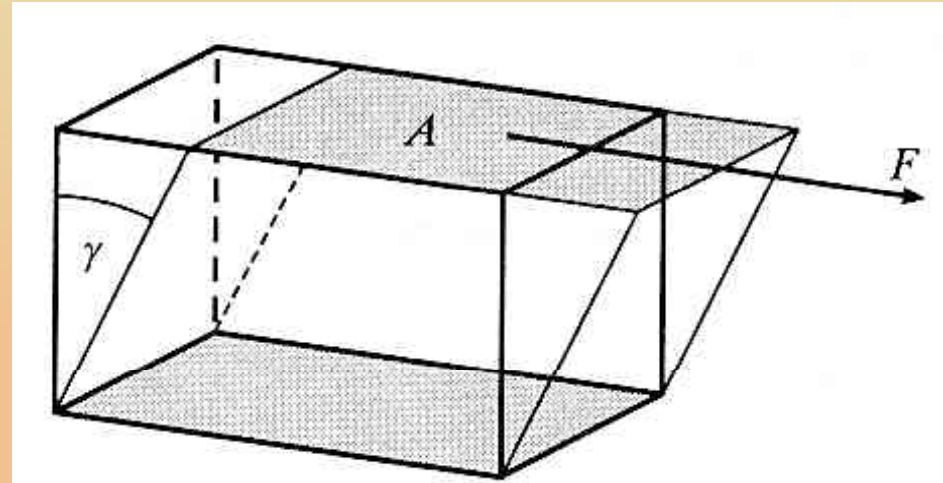
μ Poisson szám (0,25 – 0,5)



Szilárd testek rugalmas alakváltozásai

Nyírás

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{A} = \frac{\sigma}{G}$$



G nyírási modulus, **σ** nyírófeszültség

Folyadékok és gázok modellje

Nyugvó folyadékban vagy gázban nyírófeszültségek nincsenek

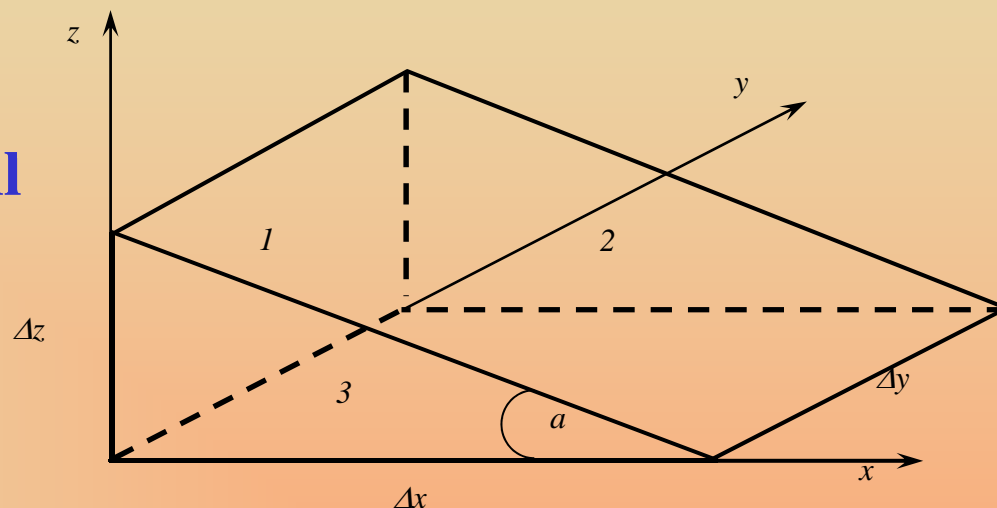
Következmény: nyugvó folyadék szabad felszíne merőleges a rá ható erők eredőjére.

Ideális folyadék: összenyomhatatlan és súrlódásmentes

Pascal törvény

Tekintsünk súlytalan, nyugvó folyadékot

Az erőknek egyensúlyban kell lenniük.



$$p_1 \Delta z \Delta y = \left(p_2 \Delta y \frac{\Delta x}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha = p_2 \Delta z \Delta x \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \Delta z / \Delta x$$

$$p_1 \Delta z \Delta y = p_2 \Delta z \Delta x \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2$$

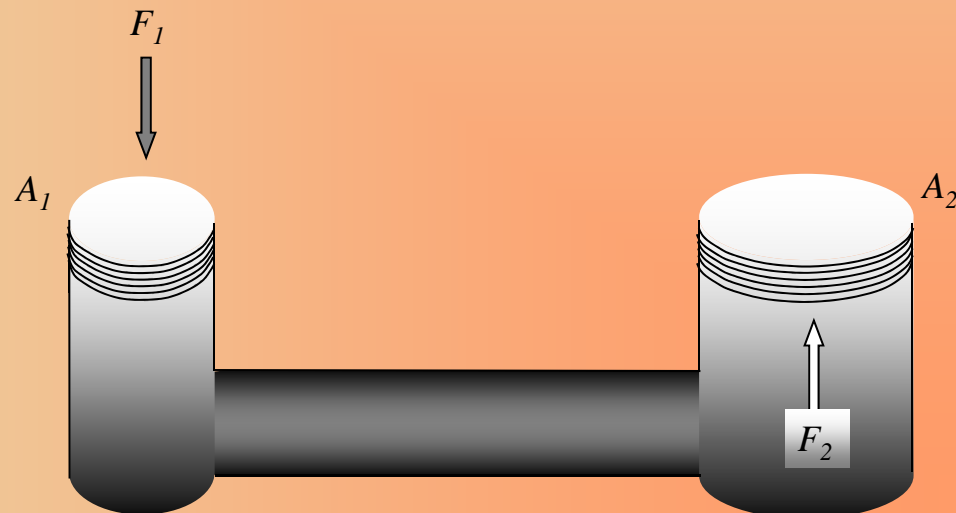
Pascal törvény

$$p_3 \Delta x \Delta z = p_2 \Delta z \frac{\Delta x}{\cos \alpha} \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad p_3 = p_2$$

Súlytalan, nyugvó folyadék belsejében és határfelületein a nyomás mindenütt ugyanakkora, függetlenül a felületelem irányításától.

Hidraulikus prés

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$



Hidrosztatikai nyomás

Tekintsünk a nyugvó folyadékban egy henger alakú, q keresztmetszetű részt.

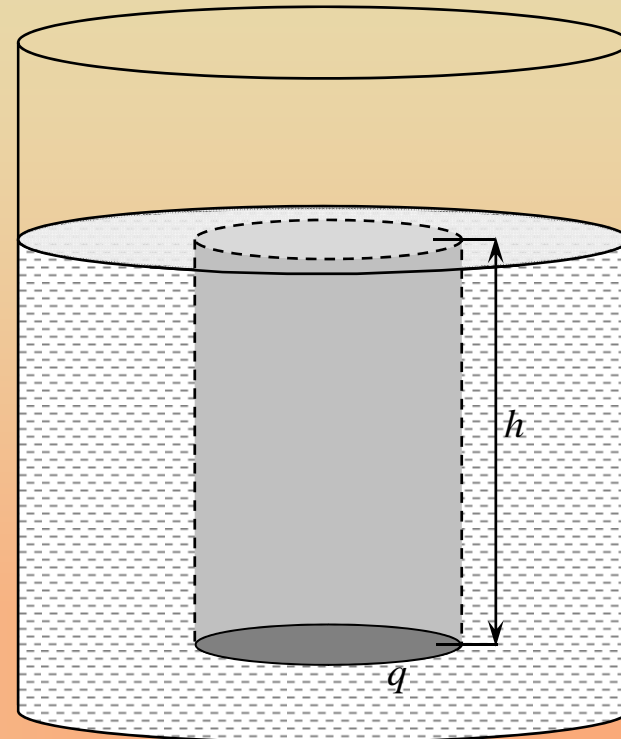
A henger súlyával az alaplagnál uralkodó nyomásból származó erő kell, hogy egyensúlyt tartson.

$$F_s = mg = V\rho g = qh\rho g$$

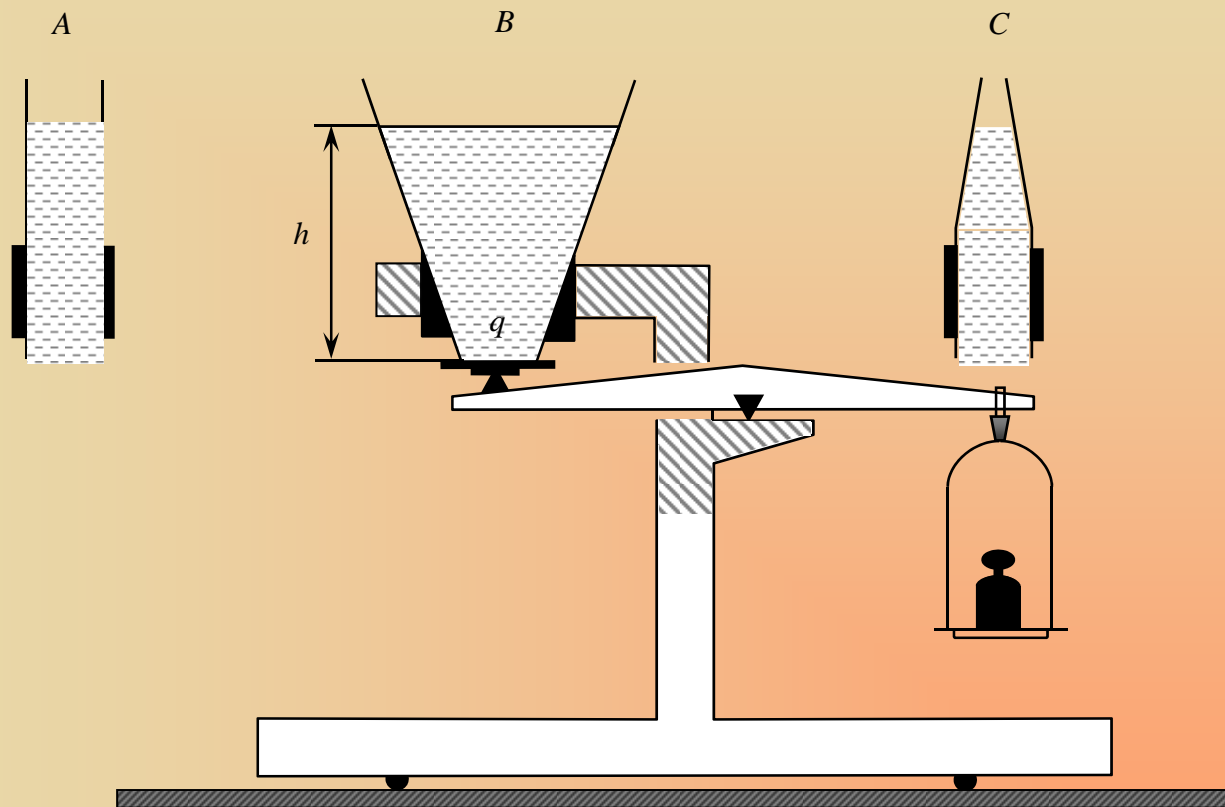
$$F_{ny} = pq = qh\rho g$$

$$\Rightarrow p = \rho gh$$

hidrosztatikai nyomás



Hidrosztatikai paradoxon



Archimedes törvénye

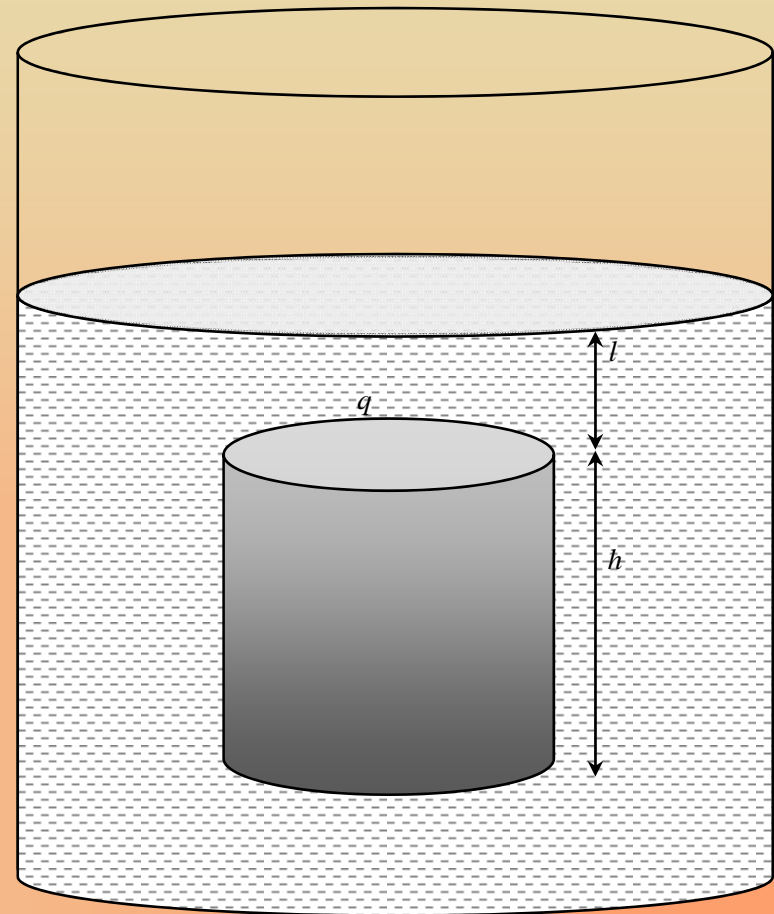
A hengerre a fedő és az
alaplagnál uralkodó nyomásból
származó erők különbsége hat
azaz:

$$F_a = (l + h)\rho g q$$

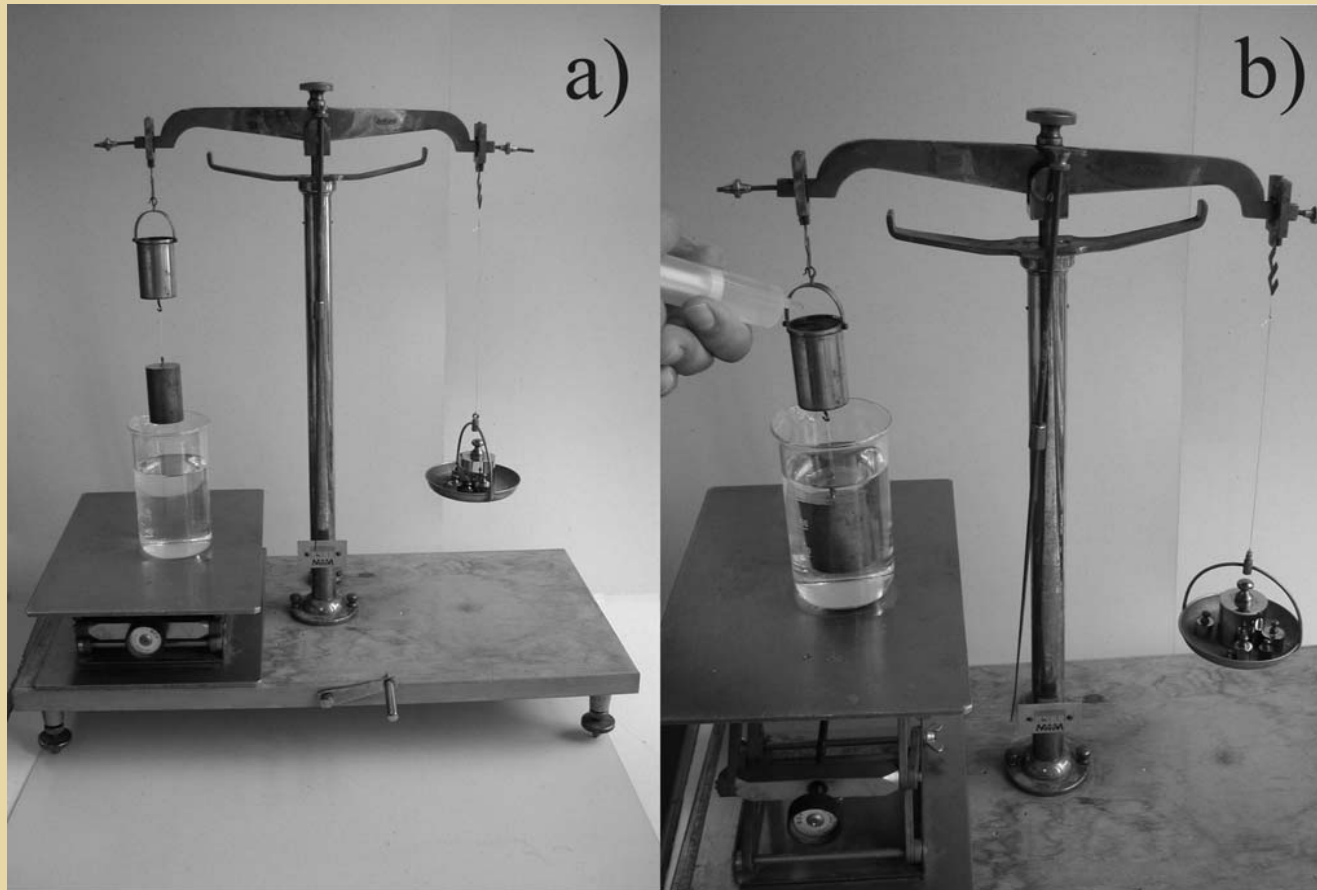
$$F_f = l\rho g q$$

$$F_a - F_f = F_e = (l + h)\rho g q - l\rho g q$$

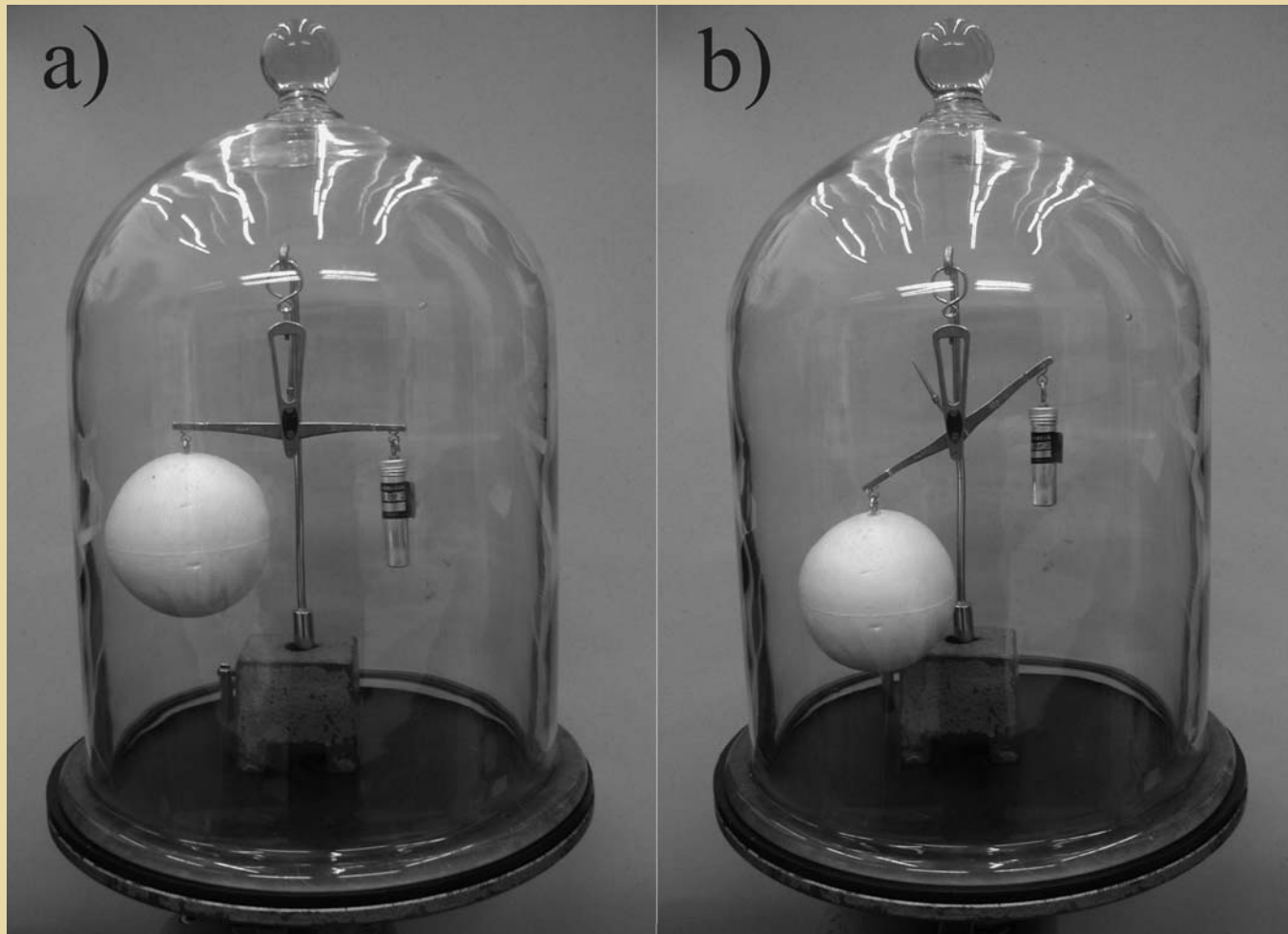
$$F_e = h\rho g q, hq = V \Rightarrow F_e = V\rho g$$



Archimedes törvénye



Archimedes törvénye



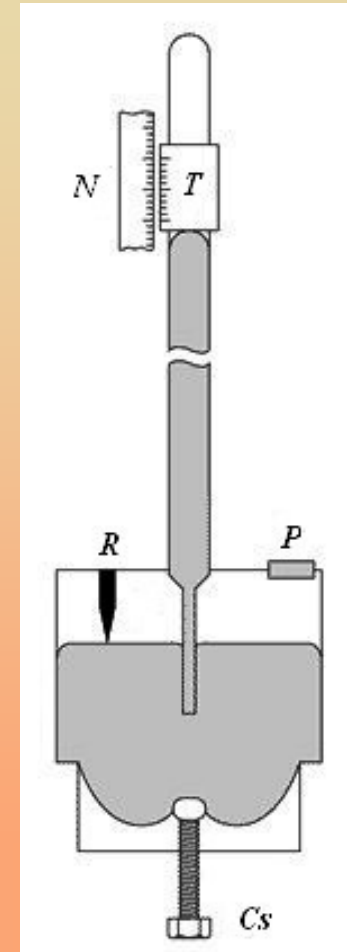
Gázok sztatikája, légnyomás

Torricelli kísérlet

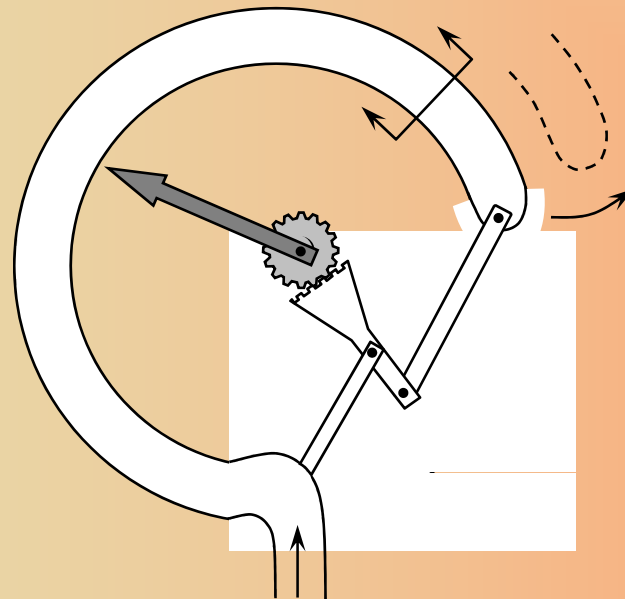
Magdeburgi féltekék

Nyomásmérők

Torricelli cső

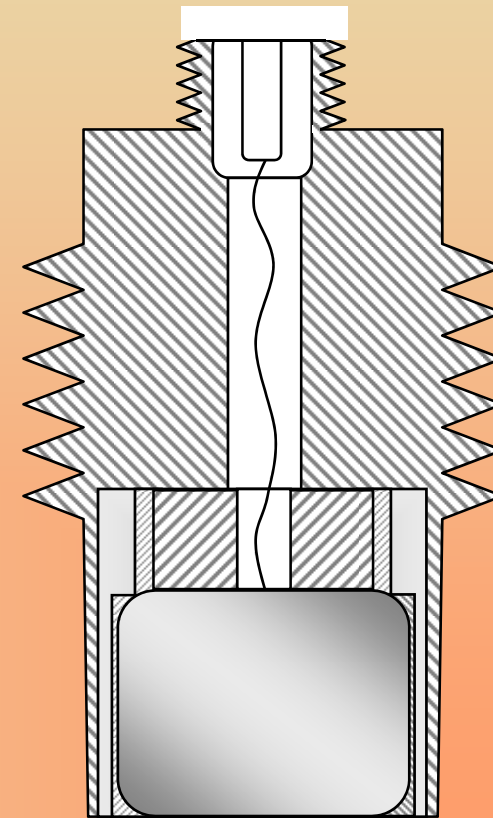
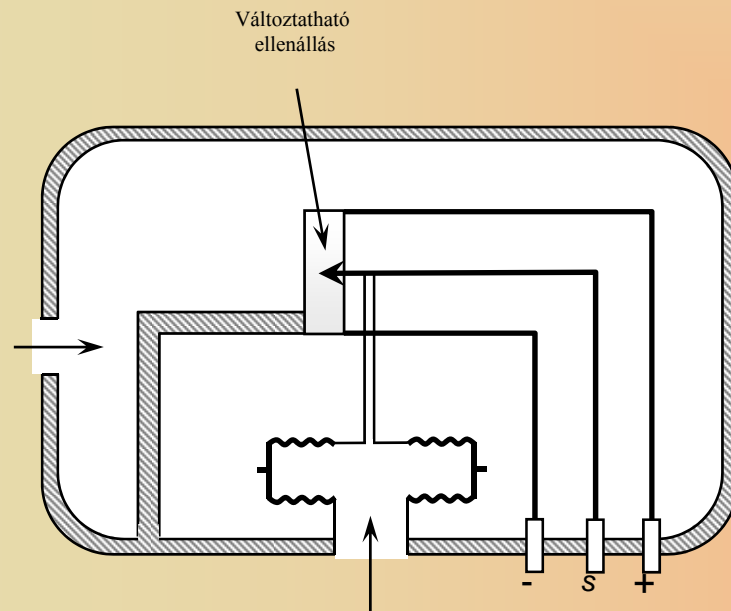


Bourdon cső



Nyomásmérők

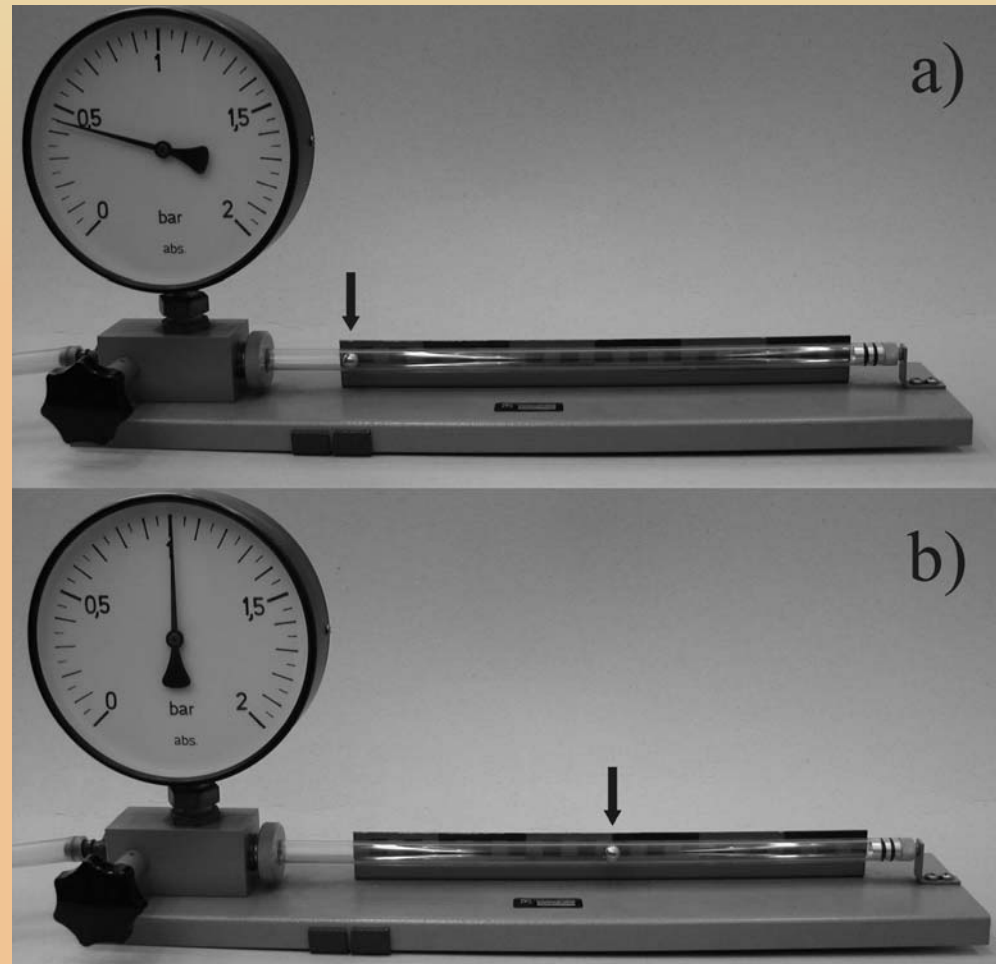
Elektromos



Gázok nyomása és térfogata közötti összefüggés

Boyle-Mariotte törvény

Állandó hőmérsékleten tartott, állandó tömegű gáz nyomásának és térfogatának szorzata állandó.



Barometrikus magasságképlet

Osszuk fel a légoszlopot elegendően vékony (Δh) rétegekre úgy, hogy egy ilyen rétegen belül a sűrűség már állandónak legyen tekinthető. Ekkor a nyomásváltozásra írhatjuk:

$$\Delta p = -\rho g \Delta h$$

(A negatív előjel oka, hogy a réteg felső határfelületén a nyomás kisebb.) Osszuk át Δh -val és tartassuk 0-hoz. Ekkor az alábbi, egyszerű differenciálegyenlethez jutunk.

$$\frac{dp}{dh} = -\rho(p)g$$

Az egyenlet megoldásához ismerni kellene a sűrűség nyomásfüggését. Ezt a Boyle-Mariotte törvényből kaphatjuk meg.

Barometrikus magasságképlet

Helyettesítsük be a B-M törvénybe a térfogatot a sűrűség definíciójából ($\rho = m/V \Rightarrow V = m/\rho$).

$$p \frac{m}{\rho} = C$$

Mivel m állandó ezért:

$$\frac{p}{\rho} = C'$$

Tegyük fel, hogy a kiindulási szinten ($h=0$) a nyomás p_0 , a sűrűség ρ_0 . Ekkor:

Barometrikus magasságképlet

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\rho_0}{p_0} p$$

Helyettesítsük ezt be a korábbi diff. egyenletbe:

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{\rho_0}{p_0} p(h)g$$

Ezek szerint megoldásként olyan függvényt keresünk, amelynek deriváltja, önmagának negatív konstansszorososa. Ilyenek a negatív kitevőjű exponenciális függvények. Keressük tehát a megoldást a következő alakban:

$$p(h) = c_1 e^{-c_2 h}$$

Barometrikus magasságképlet

A c_1 és c_2 konstansokat a diff. egyenletbe való behelyettesítéssel határozhatjuk meg.

$$-c_2 c_1 e^{-c_2 h} = -\frac{\rho_0}{p_0} g c_1 e^{-c_2 h} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{\rho_0}{p_0} g$$

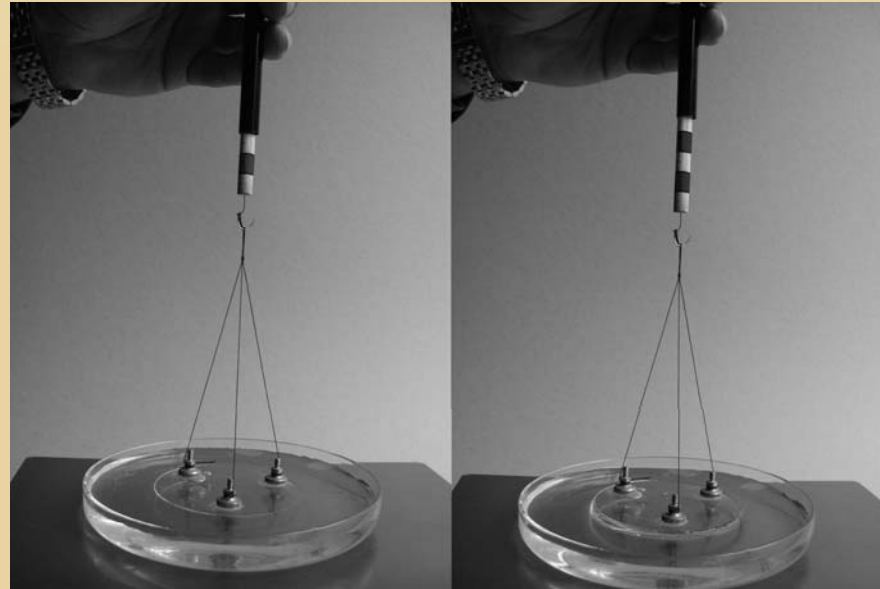
$h=0$ esetén, a nyomásnak p_0 -nak kell lennie, ezért $c_1=p_0$. Ezzel a keresett megoldás:

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} gh}$$

Ezt nevezzük barometrikus magasságképletnek.

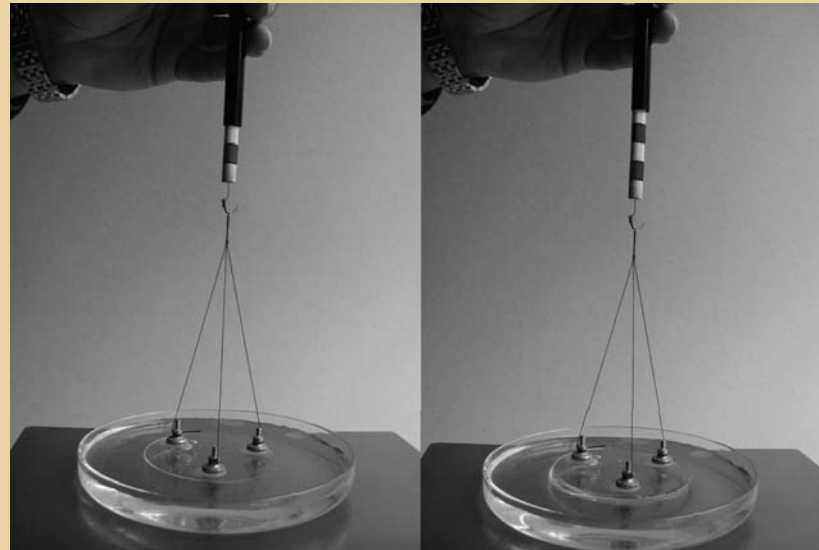
Molekuláris jelenségek

Kísérlet

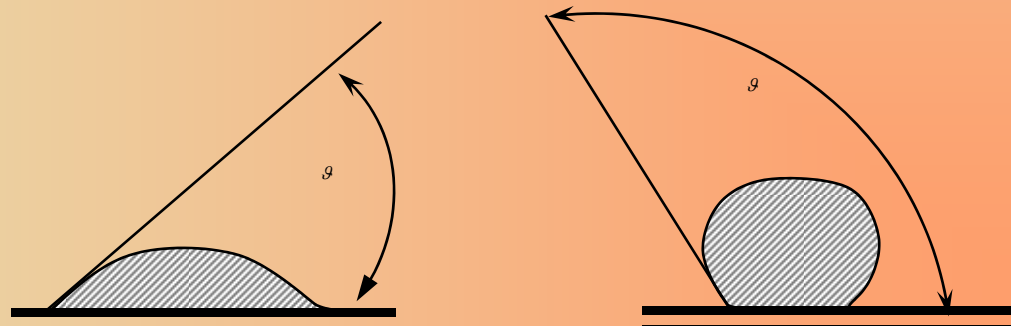


Molekuláris jelenségek

Kísérlet



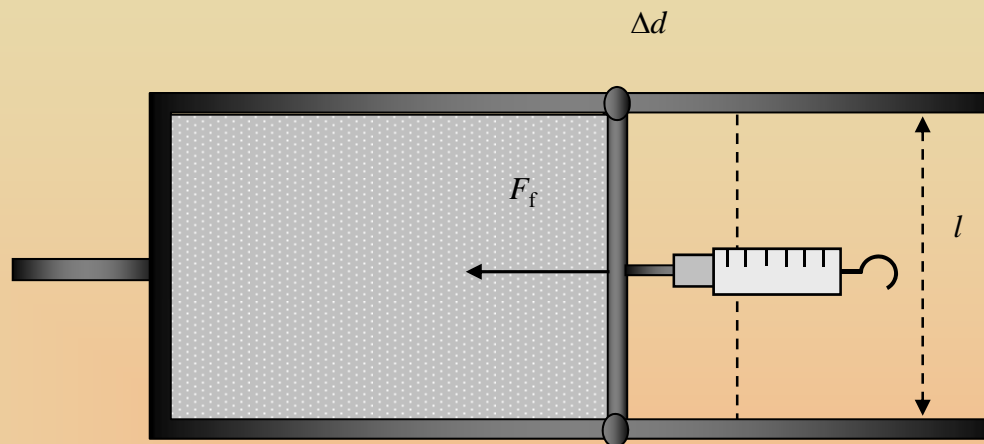
Illeszkedési szög



Molekuláris jelenségek

Felületi feszültség

$$F_f = 2\sigma l$$



A végzett munka

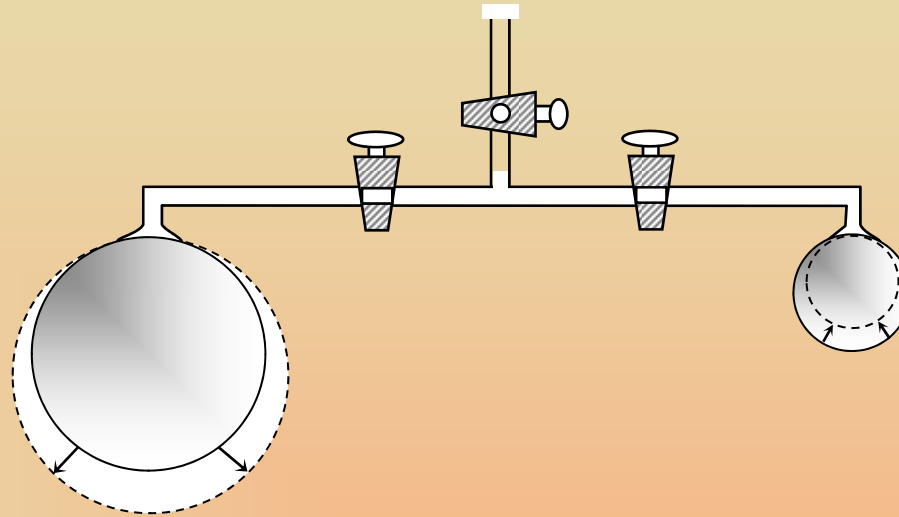
$$\Delta W = 2\sigma l \Delta d$$

Vegyük észre, hogy $2l\Delta d$ éppen a ΔA felület növekedés, tehát:

$$\frac{\Delta W}{\Delta A} = \sigma$$

Görbületi nyomás

Kísérlet



Növeljük meg az R sugarú gömb sugarát ΔR -el. Írjuk fel a felületi feszültség ellenében végzett munkát.

$$\Delta W_f = 16R\Delta R\pi\sigma$$

Görbületi nyomás

Másfelől a gömb belsejében uralkodó nyomás a következő nagyságú munkát végzi:

$$\Delta W_p = 4R^2 \pi p \Delta R$$

A két munkának nyilván egyenlőnek kell lennie, azaz:

$$4R^2 \pi p \Delta R = 16R \Delta R \pi \sigma$$

Ebből a görbületi nyomás:

$$p = \frac{4\sigma}{R}$$

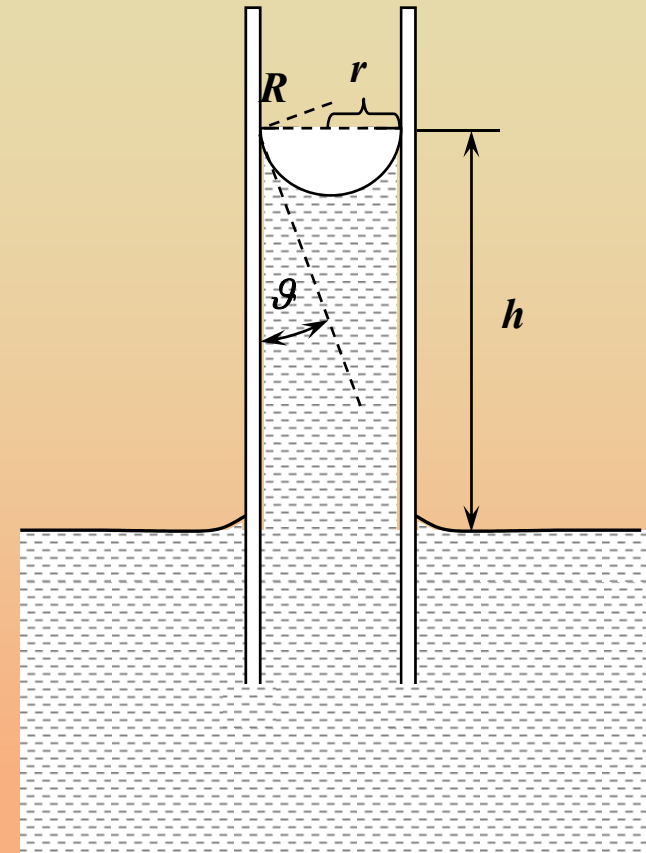
Kapillaritás

Tekintsünk egy r sugarú csövet, benne egy θ illeszkedési szögű folyadékkal. A kialakuló R görbületű felület p görbületi nyomást hoz létre, amellyel az alatta levő folyadékoszlop tart egyensúlyt, azaz:

$$\frac{2\sigma \cos \vartheta}{r} = \rho g h$$

Ebből folyadékoszlop magassága (kapilláris emelkedés):

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{r\rho g}$$



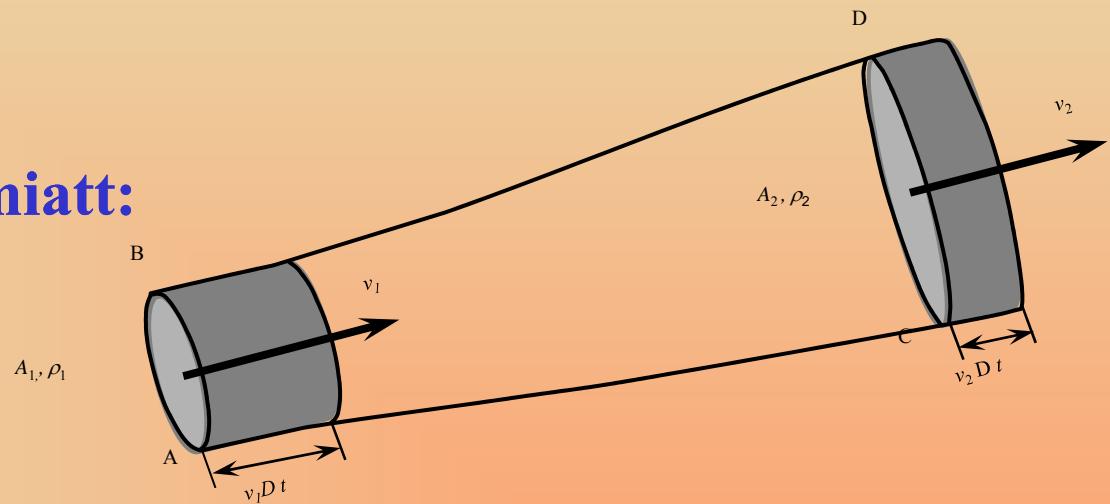
Folyadékok áramlása

Alapfogalmak: sebességtér, áramvonal, áramlási cső.

Kontinuitási egyenlet.

A tömegmegmaradás miatt:

$$A_1 v_1 \rho_1 = A_2 v_2 \rho_2$$



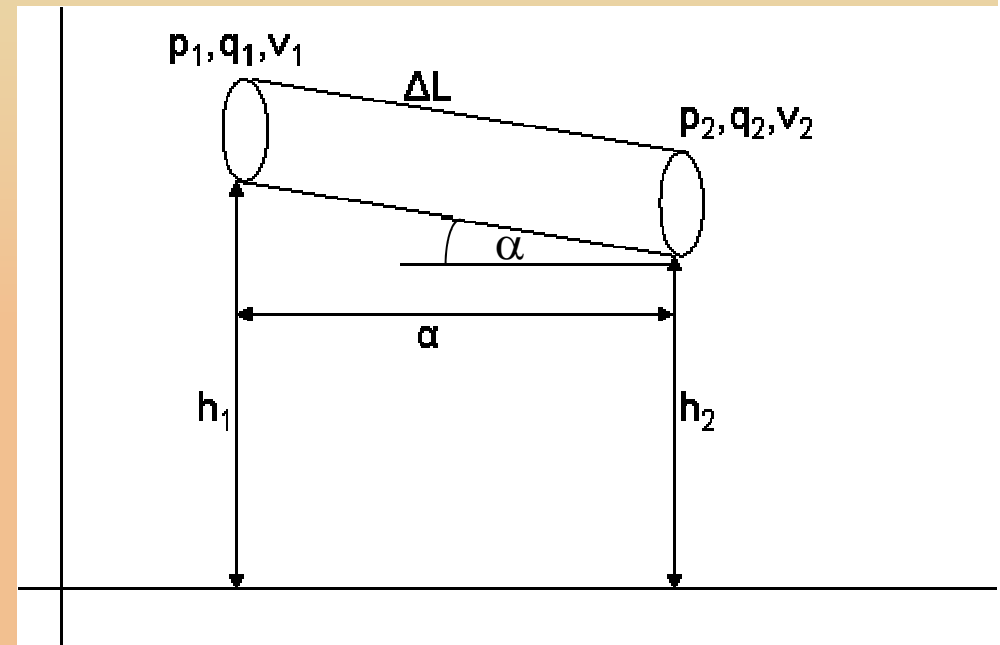
Ha a folyadék összenyomhatatlan ($\rho = \text{áll}$), akkor

$$Av = \text{áll}$$

Bernoulli egyenlet

Tekintsünk egy vékony csövet, amelyben ideális folyadék áramlik.

A csőben levő folyadékra hat a cső végein levő nyomásból származó erő, valamint saját súlyának lejtő irányú komponense.



$$F_{nyom} = p_1 q - p_2 q$$

$$F_l = mg \sin \alpha = V \rho g \frac{h_1 - h_2}{\Delta L}$$

Ezekkel fel tudjuk írni a csőben levő folyadék mozgásegyenletét:

Bernoulli egyenlet

$$p_1 q - p_2 q + V \rho g \frac{h_1 - h_2}{\Delta L} = V \rho a$$

Tegyük fel, hogy a vizsgált időintervallumban a gyorsulás állandó. Ekkor írhatjuk:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$$

Δt kiszámítható a mozgás átlagsebességéből:

Bernoulli egyenlet

$$\Delta t = \frac{2\Delta L}{v_2 + v_1}$$

Azaz a gyorsulás:

$$a = \frac{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}{2\Delta L} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta L}$$

Ezt beírva az előbbi mozgásegyenletbe:

$$p_1 q - p_2 q + V\rho g \frac{h_1 - h_2}{\Delta L} = V\rho \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta L}$$

Bernoulli egyenlet

Szorozzuk át ΔL -el, és vegyük észre, hogy $\Delta Lq=V$, kapjuk

$$p_1 - p_2 + \rho gh_1 - \rho gh_2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

Azaz:

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Vagy más alakban:

$$p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{áll}$$

Ez a Bernoulli egyenlet.

Bernoulli egyenlet

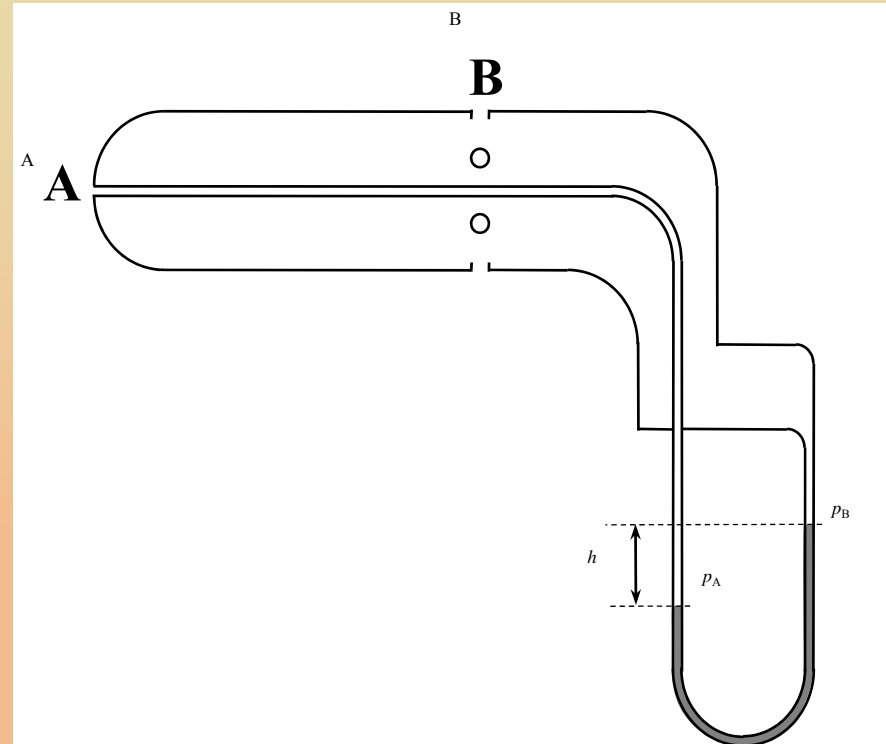
Alkalmazás: Pitot-cső.

Írjuk fel a Bernoulli egyenletet (h=áll).

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

$$\Delta p = p_A - p_B = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

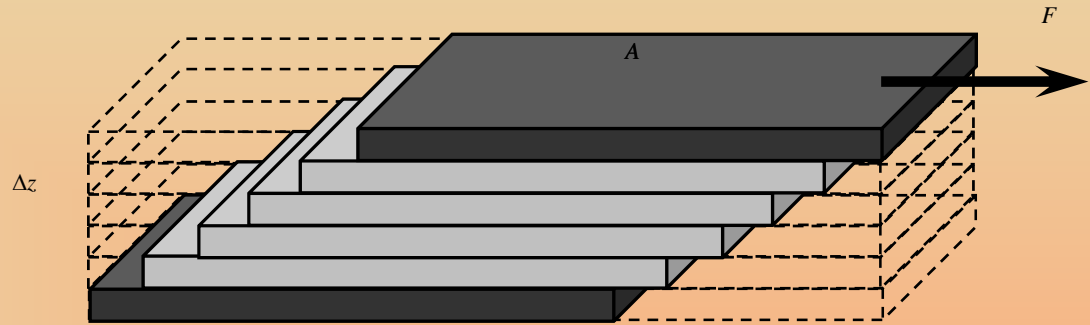
A Pitot-csővel az áramlási sebesség mérhető.



Newton-féle viszkozitási törvény

A sűrű folyadékban az egymáson elcsúszó folyadékrétegek erőt fejtenek ki egymásra. A legegyszerűbb esetben ez az erő a következőképpen írható fel:

$$F = \eta A \frac{dv}{dz}$$



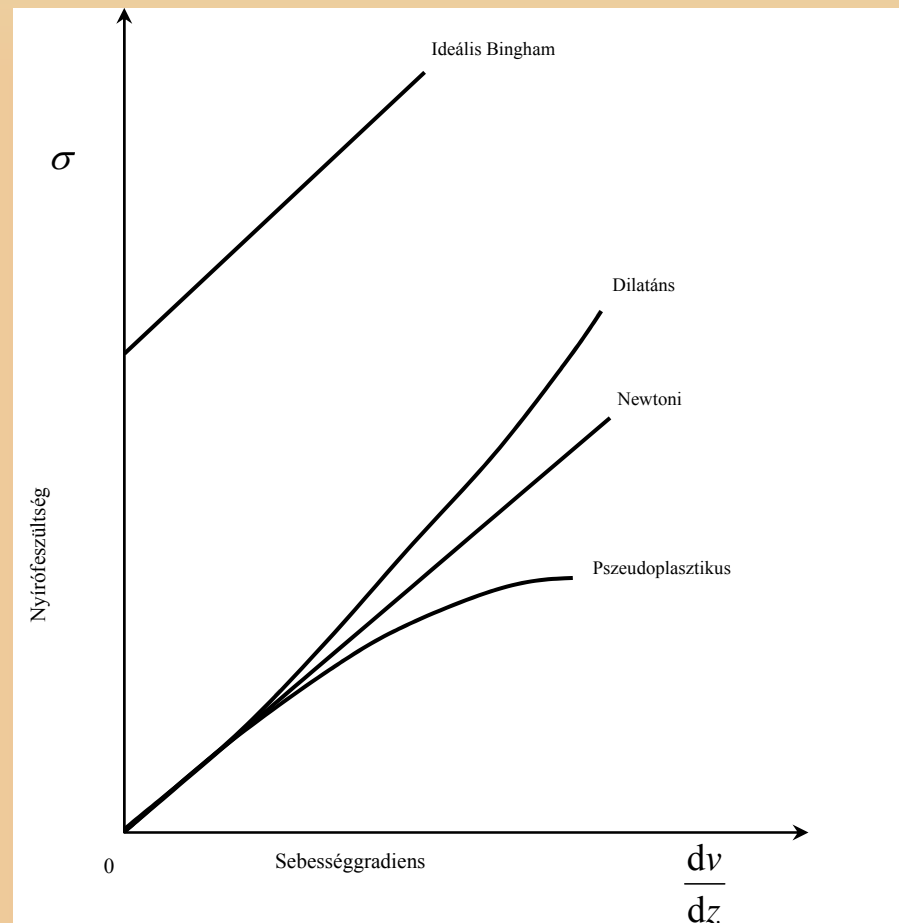
Ahol dv/dz a nyírási sebesség, η a viszkozitás. A felülettel átosztva a bal oldalon a nyírófeszültség jelenik meg, azaz:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dz}$$

Ez a Newton-féle viszkozitási törvény.

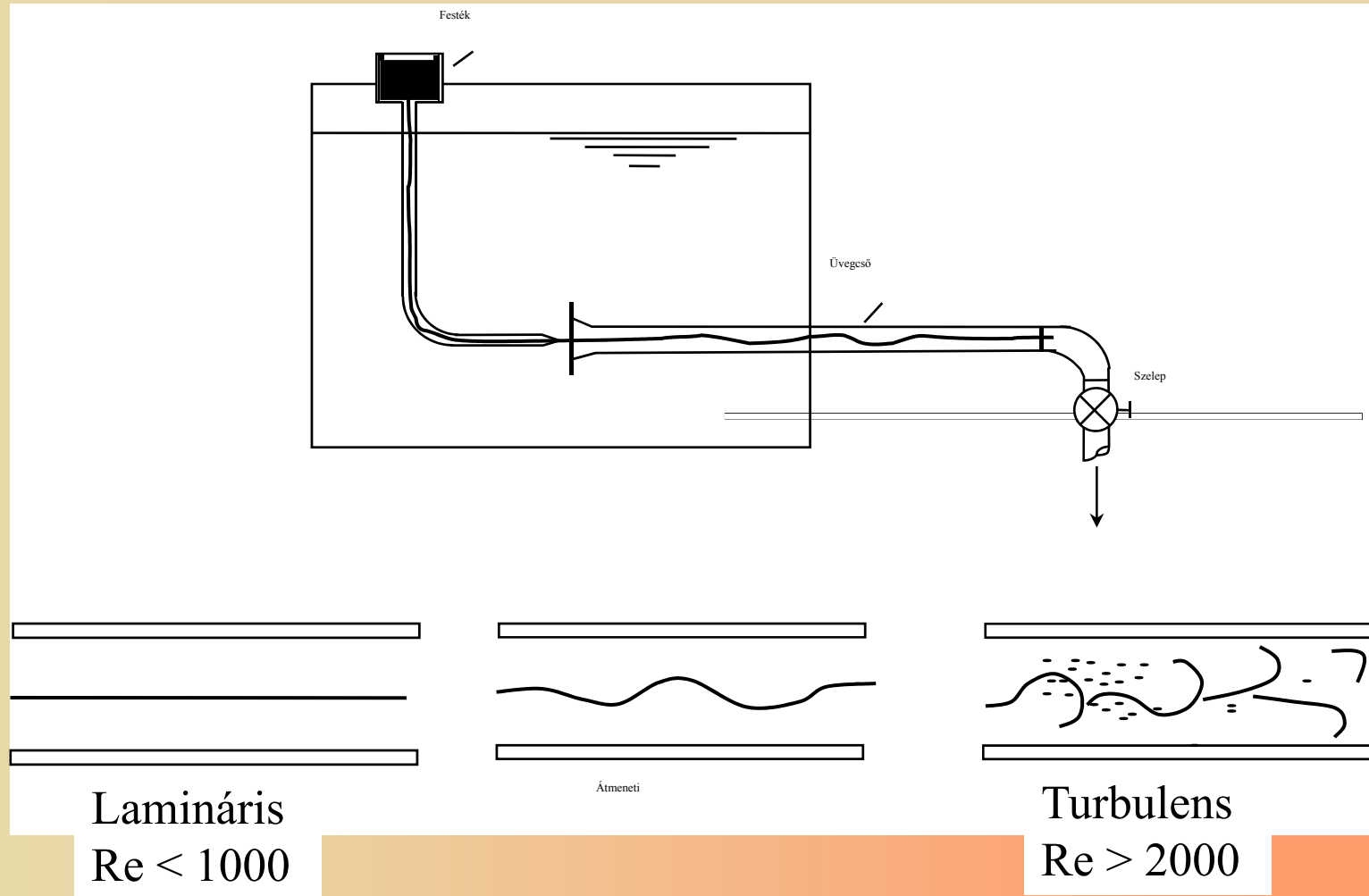
Newton-féle viszkozitási törvény

Azokat a folyadékokat, amelyek az előző egyszerű törvénynek engedelmeskenek, newtoni folyadékoknak nevezzük. A valóságban azonban a viszkozitás általában függ a nyírási sebességtől.



Lamináris és turbulens áramlás

Reynolds kísérlete:



Reynolds-szám

Reynolds-szám:

$$\text{Re} = \frac{\rho v L}{\eta}$$

Ahol ρ a sűrűség, η a viszkozitás, v a sebesség L a jellemző geometriai méret.

Belátható, hogy a Reynolds-szám fizikailag a folyadék térfogatelemére ható gyorsító erőknek és a súrlódási erőknek a hányadosa.

Közegellenállás

Re < 10 lineáris, azaz $F \sim v$

pl. gömb alakú testre a pontos alak (Stokes törvény):

$$F = 6\pi\eta Rv$$

Levegőben lebegő kicsiny részecskék (eroszolok, ködök) ülepedése.

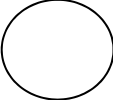


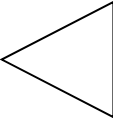

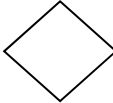

Re > 5000 négyzetes, azaz $F \sim v^2$

$$F = c_e \frac{1}{2} \rho A v^2$$

Közegellenállás

Alkalmazás: pl. járművek közegellenállása

Tipikus c_e értékek

Gömb		0,47
Gömbhéj (domború)		0,4
Gömbhéj (homorú)		1,4
Kúp		0,5
Kocka		1,05
Kocka (elforgatva)		0,81
Áramvonalas test		0,04

Hidrodinamikai hasonlóság

Két áramlási tér hasonló, ha a geometriai hasonlóság mellett a Reynolds számok is megegyeznek.

Alkalmazás: modellezés (szélcsatorna)