Megmaradó fizikai menyiségek

Szabó Gábor

Hogyan találhatunk megmaradó mennyiségeket?

Ha egy mennyiség időderiváltja 0, akkor a mennyiség állandó.

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Delta t \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \Delta x = 0 \Rightarrow x = áll$$

Hogyan találhatunk megmaradó mennyiségeket?

Tekintsük a mozgásegyenletet

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Tegyük fel, hogy m állandó, akkor átemelhetjük a deriváláson:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Az $\vec{I} = m\vec{v}$ **szorzatot impulzusnak, vagy lendületnek nevezzük.**

Ezzel:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt}$$

Ha F=0 akkor az impulzus állandó

Hogyan találhatunk megmaradó mennyiségeket?

Tekintsük a mozgásegyenletet az előbbi formában, és szorozzuk meg mindkét oldalát vektoriálisan r-el

$$\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\frac{d\vec{I}}{dt}$$

Vizsgáljuk meg közelebbről az $\vec{r}\times\vec{I}$ deriváltját!

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{I})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{I}+\vec{r}\times\frac{d\vec{I}}{dt}$$

Nézük meg külön a $\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{I}$ tagot!

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{I}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}=m(\vec{v}\times\vec{v})=0$$ **(mert v ∥ v)**

Hogyan találhatunk megmaradó mennyiségeket?

Tehát:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{I})$$

Vezessük be az $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ **és** $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{I}$ **jelöléseket, ahol M a a forgatónyomaték, N az impulzusmomentum, vagy perdület.**
Ezzel:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt}$$

Azaz ha M=0, akkor az impulzusmomentum állandó/megmarad.

Hogyan találhatunk megmaradó mennyiségeket?

Tekintsük ismét a mozgásegyenletet. Tegyük fel, hogy a mozgás az x tengely mentén történik, és szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát dx-el.

$$dxF = m\frac{dv}{dt}dx = mdv\frac{dx}{dt} = mvdv$$

Mi lehet az mvdv jelentése? Tekintsük az (1/2)mv² szorzat megváltozását!

$$\Delta(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{2}m(v+\Delta v)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v^2 + 2v\Delta v + (\Delta v)^2 - v^2)$$

Mivel Δv nagyon kicsiny, ezért a (Δv)² tag elhanyagolható, azaz

$$\Delta(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{2}m2v\Delta v = mv\Delta v$$

Hogyan találhatunk megmaradó mennyiségeket?

Az $\frac{1}{2}mv^2$ szorzatot nevezzük kinetikai energiának, az Fdx -t munkának, akkor a tétel úgy szól, hogy ha a munka zérus, akkor a kinetikai energia állandó.

$$W = 0 \Rightarrow E_{kin} = áll$$

Általánosítás pontrendszerre

Pontrendszer teljes impulzusa a pontok impulzusainak összege

$$\vec{I} = \sum \vec{I}_i$$

A belső erők a hatás-ellenhatás törvénye miatt a teljes impulzust nem képesek megváltoztatni, ezért a teljes impulzus időszerinti deriváltja egyenlő a <u>külső erők</u> összegével.

$$\sum_i \vec{F}_i^{\,k\ddot{u}l} = \frac{d\sum \vec{I}_i}{dt}$$

Azaz, ha a <u>külső erők</u> összege 0, a pontrendszer (teljes) impulzusa állandó.

$$\sum_i \vec{F}_i^{\,k\ddot{u}l} = 0 \Rightarrow \sum \vec{I}_i = \acute{a}ll$$

Tömegközéppont tétele

Tömegközéppont definíciója

$$\vec{r}_{tk} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Ezzel:

$$\sum \vec{F}_i^{\,k\ddot{u}l} = \sum m_i \frac{d^2 \vec{r}_{tk}}{dt^2}$$

Azaz, a pontrendszer úgy mozog, mintha a teljes tömeg a tömeg-középpontban lenne egyesítve, és itt hatnának a <u>külső erők</u>. Ebből következik, hogy amennyiben a külső erők összege 0, a tömeg-középpont nyugalomban marad, vagy egyenesvonalú, egyenletes mozgást végez.

Pontrendszer impulzusmomentuma

A belső erők mindig a pontokat összekötő vektorral párhuzamosan hatnak, ezért forgatónyomatékuk 0. Ebből következően a pontrendszer teljes impulzusmomentumának időszerinti deriváltja egyenlő a <u>külső erők</u> forgatónyomatékával.

$$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,kül} = \sum \vec{M}_i^{\,kül} = \frac{d}{dt} \sum \overrightarrow{N}_i$$

Azaz ha a <u>külső erők</u> forgatónyomatéka 0, akkor a pontrendszer impulzusmomentuma megmarad. Tehát:

$$\sum \vec{M}_i^{\,kül} = 0 \Rightarrow \frac{d \sum \overrightarrow{N}_i}{dt} = 0 \Rightarrow \sum \overrightarrow{N}_i = áll$$