I. MATEMATIKAI ÖSSZEFOGLALÓ

Mértékegység-átváltások

I./1.

e) $$13580\,\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = \frac{13580\ \mathrm{kg}}{1\ \mathrm{m}^3} = \frac{13580\cdot 10^3\ \mathrm{g}}{10^6\ \mathrm{cm}^3} = 13{,}58\,\tfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\,.$$

Vektorműveletek

I./4.

a) $$F_x = \left|\vec{F}\right|\cdot\cos\vartheta = 24\ \mathrm{N}\cdot\cos 330^\circ = 20{,}78\mathrm{N}.$$

$$F_y = \left|\vec{F}\right|\cdot\sin\vartheta = 24\ \mathrm{N}\cdot\sin 330^\circ = -12\mathrm{N}.$$

I./5.

a) $$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{31^2+12^2}\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 33{,}24\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

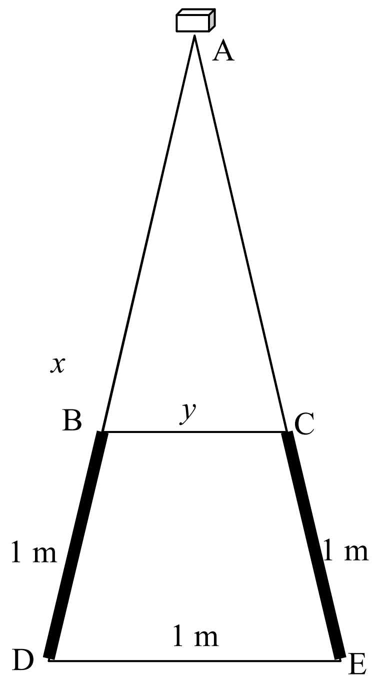
$$\vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{arc\,tg}\frac{12\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{31\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 21{,}16^\circ.$$

I./6.

e) $$4\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c} = 4\cdot(2,\,7,\,-6)+2\cdot(2,\,-3,\,5)-3\cdot(6,\,0,\,1) = (8,\,28,\,-24)+(4,\,-6,\,10)-(18,\,0,\,-3) = (-6,22,-17).$$

A mérés hibája

I./7.



A megoldás alapja a hasonló háromszögek oldalainak arányossága. A jelöléseket az ábrán mutatjuk be.
A háromszögek A csúcsnál levő szöge közös, és a vele szemközti oldalak párhuzamosak,
így az ABC háromszög hasonló az ADE háromszöghöz, vagyis

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE}$, ahonnan $\dfrac{x-1\ \mathrm{m}}{x} = \dfrac{y}{1\ \mathrm{m}}$. Ezt átrendezve $x = \dfrac{1\ \mathrm{m}^2}{1\ \mathrm{m}-y}$.

Az első esetben a fenti egyenletből $x = 25\ \mathrm{m}$ adódik.

Ha a trapéz oldalának mérésekor 2 mm-t tévedünk, vagyis a valós hossz 96,2 cm vagy 95,8 cm, akkor a távolságra rendre $x = 26{,}3\ \mathrm{m}$, illetve $x = 23{,}8\ \mathrm{m}$ adódik, tehát a távolságmérés során elkövetett hiba legfeljebb $\Delta x = 1{,}3\ \mathrm{m}$.

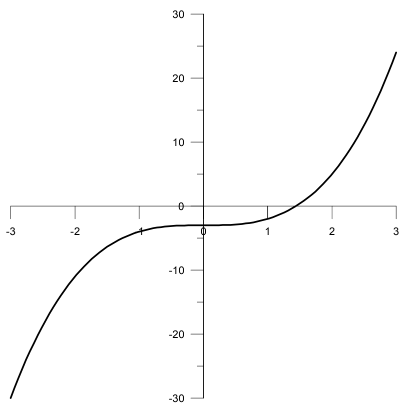
Ha a trapéz rövidebb oldalát 99 cm-nek mérjük, akkor a tárgy távolsága a méterrúd felénk eső végétől $x = 100\ \mathrm{m}$. A 2 mm-es hibát figyelembe véve a távolság $x = 125\ \mathrm{m}$ vagy $x = 83{,}3\ \mathrm{m}$, tehát az elkövetett hiba nem több, mint $\Delta x = 25\ \mathrm{m}$.

Megjegyzés: a hiba pesszimista becslésekor az azonos mennyiség mérésekor meghatározott hibák közül a nagyobbat szoktuk megadni a mérés hibájaként.

Függvénytani alapismeretek

I./10.

a) értelmezési tartomány: ϒ;
értékkészlet: ϒ;
monotonitás: szigorúan monoton növekvő;
szélsőértékek: ±∞
szakadási hely: nincs
inflexiós pont: x = 0



Határérték- és differenciálszámítás

I./14.

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \to 0$

b) $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots, \frac{2n-1}{n}, \ldots \to 2$

c) $\left\{(-1)^n \frac{2n-1}{n}\right\}$ sorozatnak nem létezik határértéke, amit a következőképpen láthatunk be: ha ezt a sorozatot két részsorozatra bontjuk, akkor páros n-ekre a határérték +2, páratlan n-re -2, vagyis nincs egyetlen olyan számérték, amely tetszőlegesen kicsi környezetébe benne található a sorozat minden eleme, ha n elég nagy.

I./15.

a) $\frac{d(2x)}{dx} = 2$.   b) $\frac{d(-3x+4)}{dx} = -3+0 = -3$.   c) $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$.

d) $\frac{d(3x^3 - 5x^2 + x + 2)}{dx} = 3 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 1 + 0 = 9x^2 - 10x + 1$.

e) $\frac{d(x \cdot \sin x)}{dx} = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cdot \cos x$.

f) $\frac{d(\cos x \cdot \sin x)}{dx} = \left(\frac{d\cos x}{dx}\right)\sin x + \cos x\left(\frac{d\sin x}{dx}\right) = -\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

g) $\operatorname{tg}' x = \frac{d\frac{\sin x}{\cos x}}{dx} = \frac{\frac{d\sin x}{dx} \cdot \cos x - \sin x \cdot \frac{d\cos x}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

h) $\frac{de^{-2x}}{dx} = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x} \left(\text{mivel } \frac{de^x}{dx} = e^x\right)$.

i) $\frac{d\left(e^{-2x} \cdot 3x\right)}{dx} = \frac{de^{-2x}}{dx} \cdot 3x + e^{-2x} \cdot \frac{d3x}{dx} = -6x \cdot e^{-2x} + 3e^{-2x} = (-6x+3)e^{-2x}$.

j) $\frac{d(3x \cdot \operatorname{tg} x)}{dx} = 3 \cdot \operatorname{tg} x + 3x \cdot \operatorname{tg}' x = 3 \cdot \operatorname{tg} x + \frac{3x}{\cos^2 x}$.

I./16.

Teljes négyzetté alakítással

$$z(t) = z_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = z_0 - \frac{g}{2} \cdot \left(t^2 - \frac{2v_0 t}{g}\right) = z_0 - \frac{g}{2} \cdot \left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g}, \text{ vagy}$$

$$z(t) = z_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = z_0 - \left(\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t - \frac{1}{\sqrt{2g}} v_0\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g},$$

mely kifejezéseknek akkor lesz maximumuk, ha a négyzetes tag 0, ebből $\mathrm{z}_{\max} = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$.

Egy függvénynek ott van maximuma, ahol az első differenciálhányadosa nulla, és ebben a pontban pozitívról negatívra előjelet vált:

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(z_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2\right)}{\mathrm{d}t} = v_0 - gt,$$

melynek zérushelye: $t = \frac{v_0}{g}$, és $\dot{z}(t) = v_0 - gt > 0$, ha $t < \frac{v_0}{g}$, és $v_0 - gt < 0$, ha $t > \frac{v_0}{g}$.

A maximális magasság: $z_{\max}\left(\frac{v_0}{g}\right) = z_0 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$.

A differenciálhányados-függvény a test sebességének időfüggvényét adja meg.

I./17.

a) $\dot{x} = a$, $\ddot{x} = 0$, egyenes vonalú egyenletes a mozgás.

b) $\dot{x} = 2a \cdot t + b$, $\ddot{x} = 2a$, egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló a mozgás

c) $\dot{x} = A \cdot \cos t$, $\ddot{x} = -A \sin t$, egyenes vonalú, periodikus mozgás, amelyre $-A \le x \le A$.

d) $\dot{x} = A \cdot (\cos \omega t) \cdot \omega = A \cdot \omega \cdot (\cos \omega t)$, $\ddot{x} = -A\omega^2 \cdot \sin \omega t$, ω körfrekvenciájú harmonikus rezgés.

e) $\dot{x} = A \cdot (\cos(\omega t - \pi)) \cdot \omega = A\omega \cdot (\cos(\omega t - \pi)) = -A\omega \cdot \cos(\omega t)$,

$\ddot{x} = A\omega^2 \cdot \sin \omega t$, mivel t=0-ban x=0, v=–Aω, ez egy $-\pi$ kezdőfázisú harmonikus rezgés.

f) $\dot{x} = A \cdot e^{-\beta t} \cdot (-\beta) \cdot \cos \omega t + A \cdot e^{-\beta t} \cdot (-\omega) \cdot \sin \omega t = -A \cdot e^{-\beta t} \cdot (\beta \cdot \cos \omega t + \omega \cdot \sin \omega t)$,

$\ddot{x} = -A \cdot e^{-\beta t} \left[(\omega^2 - \beta^2) \cos \omega t - 2\beta\omega \sin \omega t \right]$, exponenciálisan csillapodó rezgés.

g) $\dot{x} = A \cdot e^{-\beta t} \cdot (-\beta) \cdot \sin(\omega t + \varphi) + A \cdot e^{-\beta t} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot (-\beta \cdot \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi))$,

$\ddot{x} = -A \cdot e^{-\beta t} \left[(\omega^2 - \beta^2) \sin(\omega t + \varphi) + 2\beta\omega \cos(\omega t + \varphi) \right]$, mint f).

II. KINEMATIKA – EGYSZERŰ MOZGÁSTÍPUSOK

Egyenes vonalú egyenletes mozgás, egyenletes körmozgás

II./1.

Egy fényév az az s távolság, amelyet a $v = 300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ sebességgel a fény 1 év alatt megtesz. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás útképletét használva:

$$s = vt = 300000\,\tfrac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 1\text{ év} = 300000\,\tfrac{\text{km}}{\text{s}} \cdot (365{,}25 \cdot 24 \cdot 3600)\text{ s} = 9{,}47 \cdot 10^{12}\text{ km}.$$

II./4.

A $v_m = 45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességű motoros relatív sebessége a v_k sebességgel haladó konvojhoz képest az első esetben $v_1 = v_m - v_k$, a második esetben $v_2 = v_m + v_k$ volt. Mivel tudjuk, hogy az s hosszúságú gépkocsikonvojt a motoros az első esetben $t_1 = 7$ perc$=\frac{7}{60}$h, míg a második esetben $t_2 = 2$ perc $= \frac{2}{60}$h alatt előzte meg, ezeket az előző két egyenletbe helyettesítve: $\frac{s}{t_1} = v_m - v_k$ és $\frac{s}{t_2} = v_m + v_k$. A két egyenletet egymással elosztva $\frac{t_2}{t_1} = \frac{v_m - v_k}{v_m + v_k}$, amelyből v_k-t kifejezve

$$v_k = \frac{v_m(t_1 - t_2)}{(t_1 + t_2)} = \frac{45\,\frac{\text{km}}{\text{h}}(\frac{7}{60}\text{ h} - \frac{2}{60}\text{ h})}{(\frac{7}{60}\text{ h} + \frac{2}{60}\text{ h})} = 25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

II./9.

Az r = 10 km sugarú körpálya kerülete $s = 2r\pi = 2 \cdot 10\text{ km} \cdot \pi = 62{,}83\text{ km}$. Ezt az utat a $v = 810\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 225\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladó repülőgép $t = \frac{s}{v} = \frac{62{,}83\text{ km}}{810\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}0776\text{ h} = 279{,}24\text{ s}$ alatt teszi meg. A fenti időtartam a repülőgép T keringési, vagy periódusideje. Az ω szögsebesség (felhasználva, hogy a repülőgép a T periódusidő alatt 360°-ot, azaz 2π radiánt tesz meg):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{279{,}24\text{ s}} = 0{,}0225\text{ 1/s}.$$

Egy félkört a repülőgép a periódusidő fele, azaz $T_{1/2}$ = 139,62 s alatt tesz meg. Az $a_{cp.}$ centripetális gyorsulás kiszámítása kétféleképpen történhet: $a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{(225\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{10000\text{ m}} = 5{,}06\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, illetve $a_{cp} = \omega^2 r = (0{,}0225\,\frac{1}{\text{s}})^2 \cdot 10000\text{ m} = 5{,}06\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

II./13.

Az a = 5 m/s^2 gyorsulással mozgó golyó által a t_1 és t_2 időpontok között megtett $s(t_1, t_2)$ út:

$$s(t_1,t_2)=\frac{a}{2}t_2^2-\frac{a}{2}t_1^2=\frac{a}{2}(t_2^2-t_1^2)\ .$$

Az első másodpercben megtett út ezek alapján: $s(0,1)=\frac{5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2}\left((1\text{ s})^2-(0\text{ s})^2\right)=2{,}5\text{ m.}$ Hasonlóképpen a 2., 3. és 4. másodpercben megtett utak rendre 7,5 m, 12,5 m és 17,5 m. A négy út aránya 1:3:5:7. Az $a=5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozgó golyó sebességváltozása a t_A = 2 s és t_B = 4 s időpontok között:

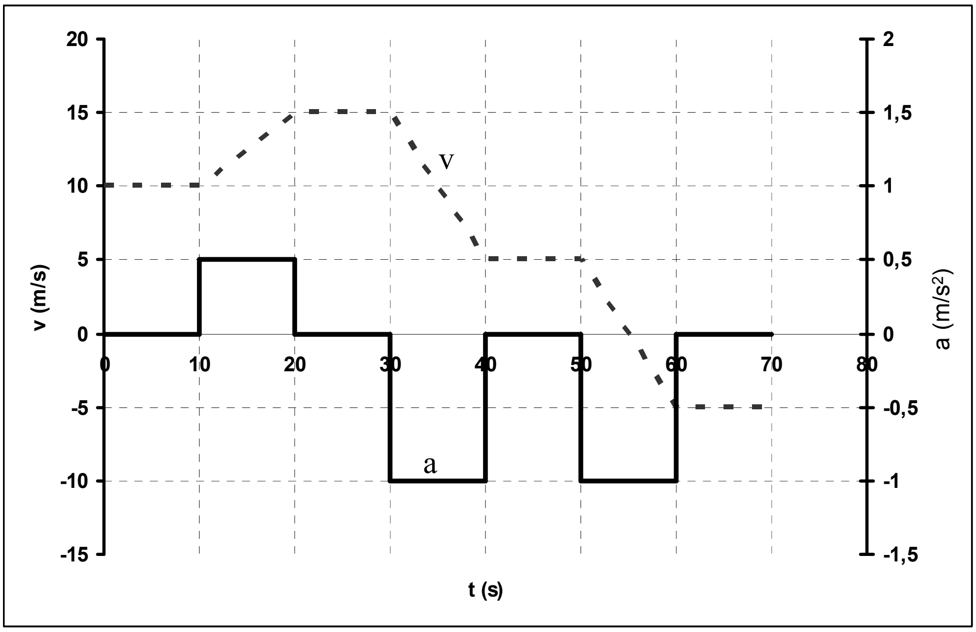
$$\Delta v(t_A,t_B)=at_B-at_A=a(t_B-t_A)=5\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(4\text{ s}-2\text{ s})=10\,\tfrac{\text{m}}{\text{s}}.$$

II./14.

a) Mivel az autó álló helyzetből indult, a v_0 kezdeti sebessége 0 km/h volt. Ha t = 19,3 s alatt érte el a $v=80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességet, az a átlagos gyorsulása $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v\ -\ v_0}{t}=\dfrac{80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{19{,}3\text{ s}}=\dfrac{22{,}22\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{19{,}3\text{ s}}=1{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

II./16.

A test a 0–10 s, a 20–30 s, a 40–50 s, valamint a 60–70 s időtartamok alatt egyenletes, a 10–20 s időtartam alatt egyenletesen gyorsuló, a 30–40 s, valamint az 50–60 s időtartamok alatt egyenletesen lassuló mozgást végez.
A gyorsulás–idő grafikon sebesség–idő grafikon deriválásával nyerhető.



A test elmozdulása a sebesség-idő grafikon alatti területek előjeles összegzésével határozható meg:

$$A=(10{,}75-1{,}25)\text{ négyzetrács}\cdot 5\text{ m/s}\cdot 10\text{ s}=475\text{ m.}$$

II./20.

A v_0 = 20 m/s kezdeti sebességgel feldobott labda $-g=-9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ gyorsulással mozog felfelé. Ha t-vel jelöljük azt az időpontot, amikor a labda sebessége $v\ =\ 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, és felhasználjuk, hogy $v\ =\ v_0-gt$, a t időpontig a labda által megtett út:

$$s=v_0t-\frac{g}{2}t^2=v_0\frac{v-v_0}{-g}-\frac{g}{2}\left(\frac{\text{v}-\text{v}_0}{-g}\right)^2=\left(\frac{v_0-v}{g}\right)\left(v_0-\frac{v_0-v}{2}\right)=\left(\frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}-10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right)\left(20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}-\frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}-10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2}\right)=15{,}29\text{ m.}$$

Mivel a labda pályája szimmetrikus, visszafelé is ugyanennél a pontnál, azaz 15,29 m-rel a kezdőpozíciója felett éri el a $v\ =\ 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességet.

II./23.

A test egyenes vonalú pálya mentén mozog és sebessége az idővel lineárisan változik, így ez a mozgás egyenes vonalú egyenletes gyorsuló mozgás. A $v = v_0 + at$ összefüggéssel összehasonlítva kapjuk, hogy $v_0 = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a = d = 0,6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Ezekkel az adatokkal kiszámítható, hogy az y tengely mentén a test elmozdulása: $\Delta y = v_0 t + \frac{a}{2}t^2 = 6\text{ m} + 2,7\text{ m} = 8,7\text{ m}$.

A test új helyzete: $P'(2\text{ m}; (4,2+8,7)\text{m}) = (2\text{ m}; 12,9\text{ m})$.

Hajítás, nem egyenletesen gyorsuló mozgás, gyorsuló körmozgás

II./24.

Vízszintes hajításkor a test mozgása két, egymástól független elmozdulásra bontható fel. Az egyik elmozdulás vízszintes irányú, egyenes vonalú egyenletes mozgás, a hajítás sebességével: $x = v_0 \cdot t = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\text{ s} = 40\text{ m}$.

A másik elmozdulás függőleges irányú, és szabadesésként írhatjuk le: $y = \frac{g}{2}t^2 \approx 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}(2\text{ s})^2 = 20\text{ m}$.

A kő az elhajítás helyétől 2 s alatt vízszintes irányban 40 métert, függőlegesen lefelé 20 métert távolodott el.

III. A TÖMEGPONT DINAMIKÁJA

Egyenes vonalú mozgás

III./3.

Annak az erőnek a nagysága, amelyet az m tömegű ember fejt ki a lift padlójára: $F = m\cdot(g+a)$, ahol g a gravitációs gyorsulás, a pedig a lift gyorsulása. Az a gyorsulás előjele pozitív, ha a lift felfelé gyorsul, és negatív, ha lefelé gyorsul. A fentieknek megfelelően az ember által a padlóra kifejtett erő nagysága az egyes esetekben:

$F_1 = 70\text{ kg}\cdot 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 686,7\text{ N}$, $F_2 = 70\text{ kg}\cdot(9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 476,7\text{ N}$, $F_3 = 70\text{ kg}\cdot(9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 896,7\text{ N}$.

III./6.

A probléma egy olyan v_o kezdősebességgel történő függőleges hajításnak tekinthető, amelynél a test — a lejtő okozta kényszer következtében — a gravitációs gyorsulás helyett egy

$$a = g\cdot\sin\alpha = 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin 30° = 4,905\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

nagyságú, függőlegesen lefelé irányuló gyorsulással mozog. A holtpont eléréséig eltelt t_1 idő annak felhasználásával kapható meg, hogy a holtponton a test sebessége zérus: $0 = v_o - at_1 \;\;\rightarrow\;\; t_1 = \frac{v_o}{a}$.

A felső holtpont eléréséig megtett út: $s_1 = v_o t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 = v_o\frac{v_o}{a} - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_o}{a}\right)^2 = \frac{v_o^2}{a} - \frac{v_o^2}{2a} = \frac{v_o^2}{2a} = \frac{\left(8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\cdot 4,905\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 6,52\text{ m}$.

Mivel a mozgás szimmetrikus, a visszaérkezésig megtett út a fenti érték kétszerese, azaz 13,04 m. Ugyanezen okból a visszaérkezésig eltelt idő a t_1 időtartam kétszerese, azaz

$$2t_1 = \frac{2v_o}{a} = \frac{2\cdot 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,905\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3,26\text{ s}.$$

III./8.

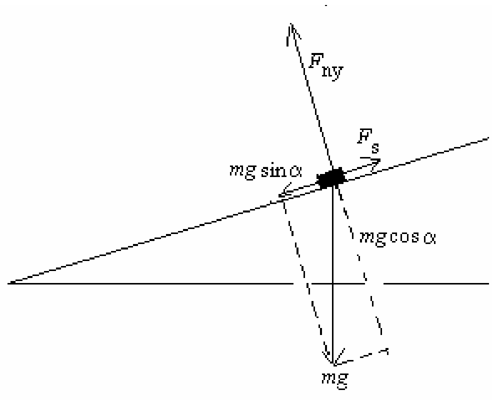
A ládára ható tapadási súrlódási erő $F_{súrl.} = \mu_0 mg$, ahol μ_0 a tapadási súrlódási együttható, m a láda tömege és g a gravitációs gyorsulás. Ahhoz, hogy fékezéskor a láda éppen ne csússzon meg, a ládára ható tehetetlenségi erő legfeljebb akkora lehet, mint a tapadási súrlódási erő: $ma_{fék.} = F_{teh.} \le F_{súrl} = \mu_0 mg$, amiből a fékezés lassulása:

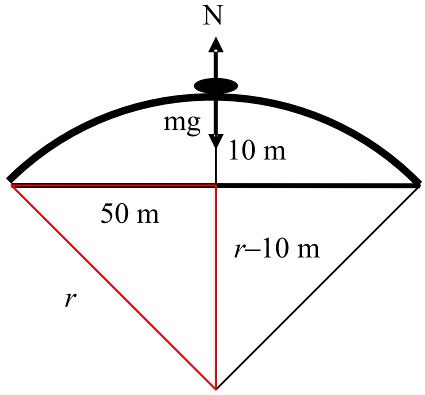
$$a_{fék.} \le \mu_0 g = 0,2\cdot 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1,96\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

III./10.

A lejtőre helyezett test egyensúlyban van mindaddig, amíg meg nem mozdul. Három erő hat rá, a nehézségi erő, a lejtőre merőleges nyomóerő és a súrlódási erő (kezdetben tapadási erő, majd a csúszási súrlódási erő). Ha a nehézségi erőt felbontjuk a lejtővel párhuzamos és arra merőleges összetevőkre, akkor az egyensúly feltételéből kapjuk, hogy $F_{ny} = mg\cos\alpha$ és $F_s = mg\sin\alpha$. Akkor mozdul meg a test, ha a tapadási erő maximális értékét meghaladja a nehézségi erő lejtővel párhuzamos összetevője.

Mivel $F_{t\max} = \mu_0 mg\cos\alpha\ (= \mu_0 F_{ny})$, az egyensúly legfeljebb addig állhat fel, amikor a lejtő szöge egy kicsivel kisebb, mint 30°. Mivel már $mg\sin 30° > \mu_0 mg\cos 30°$, innen $\mu_0 < \mathrm{tg}30° = 0,577$. Abból, hogy 30°-nál éppen megmozdul a test, az következik, hogy $\mu_0 \approx 0,577$. A mozgás adataiból, $s = \frac{1}{2}at^2$ felhasználásával kapjuk, hogy $a = 0,5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. A csúszási súrlódási erő $F_s = \mu mg\cos\alpha$, a mozgásegyenlet $mg\sin\alpha - F_s = ma$, innen $\mu = \dfrac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} = 0,518 \approx 0,52$.





III./13.

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt a piros színnel kiemelt derékszögű háromszögre: $(50\ \mathrm{m})^2 + (r - 10\ \mathrm{m})^2 = r^2$, ebből r = 130 m. Ha az autó a híd tetején egyenletes körmozgást végez, akkor a körmozgáshoz szükséges erőre felírható az

$$mg - N = \frac{mv^2}{r}$$

összefüggés, ahol mg a súlyerő és N a nyomóerő. Az autó nem válik el az úttól, ha $N \geq 0$, amiből az autó sebességére a $g - \dfrac{v^2}{r} \geq 0$ összefüggés adódik. Ebből az autó maximális sebessége: $v_{\max.} = \sqrt{gr} = \sqrt{9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 130\ \mathrm{m}} = 35,7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 128,6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

III./14.

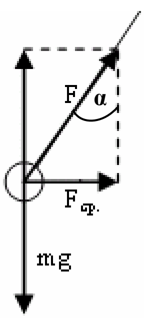
Jelölje v a test sebességét, ω a körmozgás szögsebességét és $F_{cp.}$ a körmozgás fenntartásához szükséges centripetális erőt. A t = 1 s alatt megtett szögelfordulás: $N = \dfrac{\omega \cdot t}{2\pi} = \dfrac{15\ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 1\ \mathrm{s}}{2\pi} = 2,39$ fordulat. A test tömege a centripetális erő nagyságából határozható meg, felhasználva, hogy $v = \omega \cdot r$:

$$F_{cp.} = \frac{mv^2}{r} \quad \to \quad m = \frac{F_{cp.} \cdot r}{v^2} = \frac{F_{cp.} \cdot \frac{v}{\omega}}{v^2} = \frac{F_{cp.}}{v \cdot \omega} = \frac{15\ \mathrm{N}}{2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 15\ \frac{1}{\mathrm{s}}} = 0,5\ \mathrm{kg}.$$

III./15.

A leválás pillanatszerű, ezért a rugóban ébredő erő nem tud megváltozni. A rugóban lévő erő nagyobb, mint amekkora a körpályán tartáshoz szükséges, ezért a többleterő miatt a körpályához képest befelé kell a maradék résznek elmozdulnia. A levált rész pedig az elválás pontjában az eredeti pálya érintőjének irányába mozdul el.

III./17.



Az F kötélerő függőleges komponense a golyóra ható gravitációs erővel tart ellent, így azzal azonos nagyságú, míg a vízszintes komponens a körmozgás fenntartásához szükséges centripetális erőt biztosítja. Ezek alapján $F \cdot \cos\alpha = mg$, amiből a kötél függőlegessel bezárt szöge:

$$\alpha = \mathrm{arc\ cos}\ \frac{mg}{F} = \mathrm{arc\ cos}\ \frac{5,1\ \mathrm{kg} \cdot 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{60\ \mathrm{N}} = 33,5°$$

A fenti értékből a kötél vízszintessel bezárt szöge 90° – 33,5° = 56,5°.
Az l hosszúságú kötélen függő golyó által bejárt körpálya sugara $r = l \cdot \sin\alpha$, a centripetális erő nagysága pedig $F_{cp.} = F \cdot \sin\alpha$.

Mivel $F_{cp.} = \dfrac{mv^2}{r}$, a golyó kerületi sebessége:

$$v=\sqrt{\frac{F_{cp.}r}{m}}=\sqrt{\frac{F\cdot\sin\alpha\cdot l\sin\alpha}{m}}=\sqrt{\frac{60\ \mathrm{N}\cdot\sin^2 33,5°\cdot 2,4\ \mathrm{m}}{5,1\ \mathrm{kg}}}=2,93\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=0,81\ \tfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

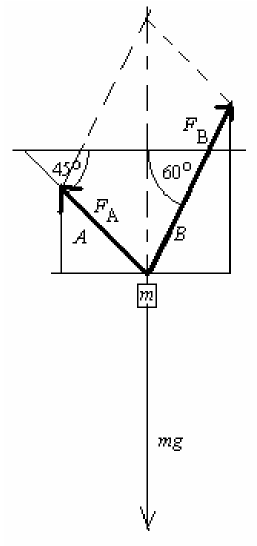
Az ω szögsebességgel történő körmozgás periódusideje:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{v}{r}}=\frac{2\pi(l\cdot\sin\alpha)}{v}=\frac{2\pi\cdot 2,4\ \mathrm{m}\cdot\sin 33,5°}{2,93\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}=2,84\ \mathrm{s}.$$

III./21.

Ha az l hosszúságú deszkából α hajlásszögű lejtőt készítünk, a rajta lévő *m'* teher súlyának csak a normális komponensét, azaz $m'g\cos\alpha$ nagyságú erőt kell elbírnia. Ha az *m* kg teherbírású deszka lejtő formájában elbírja az *m'* tömegű testet, teljesül a következő egyenlet: $mg\geq m'g\cdot\cos\alpha$, amiből a lejtő hajlásszögére

$$\alpha\geq\arccos\frac{m}{m'}=\arccos\frac{60\ \mathrm{kg}}{75\ \mathrm{kg}}=36,86°\ \text{ adódik.}$$



III./22.

Egészítsük ki az ábrát, az erők berajzolásával. A testre három erő hat, a két kötélben ébredő erő és a nehézségi erő, melyek eredője zérus, hiszen a test egyensúlyban van. Általános helyzetű erők esetén célszerű a komponenseket összehasonlítani.

Tekintsük a vízszintes összetevőket: $F_A\cos 45°=F_B\cos 60°$

A függőleges komponensekre: $F_A\sin 45°+F_B\sin 60°=mg$.

Az első egyenletből $F_B=F_A\dfrac{\cos 45°}{\cos 60°}=4,24\ \mathrm{N}.$

A test tömege: $m=\dfrac{F_A\sin 45°+F_B\sin 60°}{g}=0,59\ \mathrm{kg},\ \text{ahol } g=9,81\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

IV. IMPULZUS, IMPULZUSNYOMATÉK, MUNKA, ENERGIA, TELJESÍTMÉNY

Impulzus, impulzusnyomaték

IV./1.

Legyen a koordinátatengely függőleges, kezdőpontja a talajon, és induljon a test az x_0= 5 m pontból.

A talajra érkezés ideje: $x_0=\frac{1}{2}gt_1^2$ összefüggésből: $t_1=\sqrt{\frac{2x_o}{g}}=1\ \mathrm{s}$. A sebessége a leérkezésig negatív, ezért $v=-gt$, ahol $t\leq 1\ s$. A leérkezéskor a sebessége $v_1=-9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. A test helyzete $x=x_0-\frac{1}{2}gt^2$, ahol $t\leq 1$ s. Az utóbbi egyenletből kifejezzük *t*-t, és a sebesség összefüggésébe helyettesítve, kapjuk, hogy az impulzus: $I=-m\sqrt{2g(x_0-x)}$.

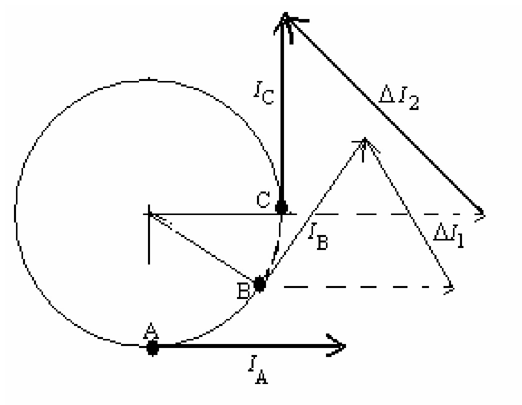
A rugalmas ütközés után a sebességnek csak az előjele változik meg, majd csökken az emelkedés közben, úgy, hogy $I=m\sqrt{2g(x_0-x)}$.

IV./1.

r= 0,6 m *m*= 0,2 kg *T*= 12 s

A test $\omega=\frac{2\pi}{T}=0,523\ \frac{1}{s}$ szögsebességgel, és $v=0,314\ \frac{m}{s}$ kerületi sebességgel végez körmozgást. Impulzusának nagysága: $I=mv=0,0628\ \frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s}}$, amely időben állandó.

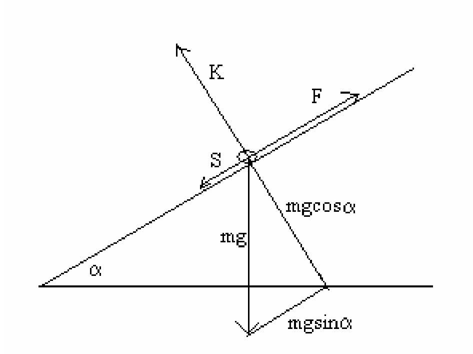
Az impulzus(vektor) azért változik meg ebben az esetben, mert a test impulzus mindig a pálya érintője irányába mutat, ahogy a sebessége is. Az impulzusváltozás nagysága 2 s alatt éppen egyenlő az impulzus nagyságával: $|\Delta I_1|=I.$ Míg a 3 s alatti változás nagysága a



megrajzolt derékszögű háromszög átfogójából számolható ki: $\Delta I_2 = I\sqrt{2} = 0,0888\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$.

Az impulzusnyomaték-vektor a rajz síkjára merőlegesen kifelé mutató vektor, nagysága: $N = r\cdot(mv) = r\cdot I = 0,0377\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$. Ha a fonál elszakad, akkor a test a pályát érintő irányban hagyja el v sebességgel, és $s=\sqrt{(1\text{ m})^2-(0,6\text{ m})^2} = 0,8\text{ m}$ megtétele után lesz a megadott távolságban, vagyis $t = \frac{s}{v} = 2,55\text{ s}$ idő múlva.

IV./5.



Először határozzuk meg a testre ható erőket:
A nehézségi erőt bontsuk fel a rajz szerint a lejtővel párhuzamos, és arra merőleges összetevőkre. A feladat szerint a gyorsulás 0, ezért $\vec{F}_{eredő} = 0$.
Írjuk fel a lejtővel párhuzamos és merőleges összetevőkre a mozgásegyenletet:

$$F - S - mg\sin\alpha = 0,$$
$$K - mg\cos\alpha = 0.$$

Innen: $K = mg\cos\alpha = 33,98\text{ N}$, ahol $F_g = mg = 39,24\text{ N}$. A súrlódási erőről tudjuk, hogy $S = \mu K = \mu mg\cos\alpha = 5,10\text{ N}$, ezt az első egyenletbe helyettesítve: $F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = 24,72\text{ N}$, az erők iránya pedig az ábrán látható.

Az út: $s = \dfrac{h}{\sin\alpha} = 4\text{ m}.$

Az egyes erők munkája: $W_g = mgs\cos(90°+\alpha) = -mgh = -78,48\text{ J}$, $W_F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\dfrac{h}{\sin\alpha} = 98,87\text{ J}$, $W_S = S\dfrac{h}{\sin\alpha}\cos 180° = -20,40\text{ J}$, $W_K = K\cdot s\cos 90° = 0$.

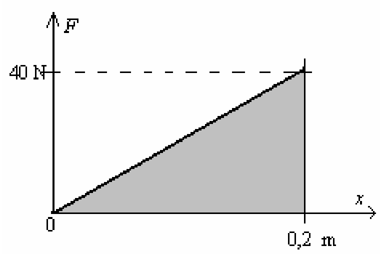
Az erők munkájának összege: $W = W_g + W_F + W_K + W_S = 0.$

IV./6.

A végzett munkát a „görbe alatti területből” számolhatjuk ki. Az x tengely feletti területet pozitív, az alatti részt negatív előjellel kell számításba venni:

$$W = \frac{2\text{ N}\cdot 2\text{ m}}{2} - \frac{2\text{ m}+1\text{ m}}{2}\cdot 1\text{ m} = 0,5\text{ J},\ P_{átl} = \frac{W}{t} = 125\text{ mW}.$$

IV./8.



A megnyújtást végezzük nagyon lassan, akkor a rugóban ébredő erő és az általunk kifejtett erő egymással egyenlő lesz, és az elmozdulással mindig arányos: $F = |F_r| = D\cdot x$, ahol $0 \le x \le 0,2$ m. Ábrázoljuk az erőt az elmozdulás függvényében, és határozzuk meg a görbe alatti területet:

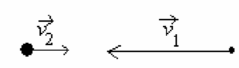
$$W = \frac{F_{\max}x_{\max}}{2} = \frac{Dx_{\max}^2}{2} = 4\text{ J, ahol } D = \frac{F_{\max}}{x_{\max}} = 200\,\tfrac{\text{N}}{\text{m}}.$$

A rugóban tárolt energia megegyezik a megnyújtásakor végzett munkával.

IV./16.

T= 300 K, M_1= 28 g/mol, M_2= 115 g/mol, v_2= 5 m/s, ρ_2= 7,31 g/cm^3, N_A=6·10^{23} 1/mol, R =8,31 J/K

További jelölések:



a nanorészecske tömege, sugara, atomjainak száma, ütközés utáni sebessége: m_2, r_2, N_2, u_2
a nitrogénmolekula tömege, ütközés előtti és ütközés utáni sebessége: m_1, v_1, u_1

Először határozzuk meg a nitrogénmolekula átlagos sebességének nagyságát: $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m_1\overline{v^2}$. Innen $v_{átl} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M_1}} = 517\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = |v_1|$. Tegyük fel, hogy egy pontosan átlagos sebességgel mozgó nitrogénmolekula centrális, egyenes ütközést szenved egy nanorészecskével. Akkor lesz nagyobb a sebességváltozás, ha ez az ütközés ellentétes sebességgel rendelkező részek között jön létre. Ha a sebességváltozást akarjuk meghatározni, akkor választhatjuk azt a megfigyelési rendszert, melyben ütközés előtt a nanorészecske állt, ebben a rendszerben a megfelelő sebességekre a v_{1rel}, v_{2rel}, u_{1rel}, u_{2rel} jelöléseket használjuk. (A feladat megoldható laboratóriumhoz rögzített rendszerben is.) Ekkor: $v_{1rel} = v_1 - v_2$. Az ütközés tökéletesen rugalmas, a részecskék szembe repülnek egymással, hanyagoljuk el az elektrosztatikus kölcsönhatást. A lendületmegmaradás törvényéből: $m_1 \cdot v_{1rel} = m_1 \cdot u_{1rel} + m_2 \cdot u_{2rel}$, a mechanikai energia megmaradásának törvényéből: $\frac{1}{2} m_{1rel} v_{1rel}^2 = \frac{1}{2} m_{1rel} u_{1rel}^2 + \frac{1}{2} m_{2rel} u_{2rel}^2$. Innen

$$u_{2rel} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1rel} \text{ és } u_2 = u_{2rel} + v_2 = \frac{2m_1 v_1 - (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}.$$

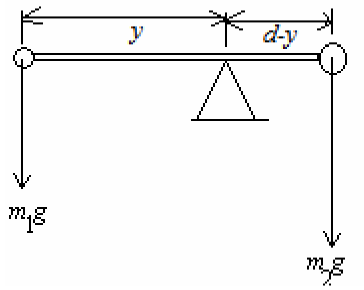
Azt az esetet vizsgáljuk, amikor $|u_{2rel}| = 0{,}05 v_2$, vagyis: $0{,}05 v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} |v_{1rel}|$, $0{,}05 v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} |v_1 - v_2|$, ahonnan a nanorészecske tömege: $\underline{\underline{m_2}} = 40 m_1 \frac{|v_1| + v_2}{v_2} - m_1 = 4175 m_1 = 1{,}95 \cdot 10^{-19}$ g.

Mivel $\frac{4 r_2^3 \pi}{3} \rho_2 = m_2$, a részecske sugara $r_2 = \sqrt[3]{\frac{3m_2}{4\pi\rho_2}} = 1{,}85$ nm. A nanorészecskét alkotó atomok számát megbecsülhetjük: $\underline{\underline{N_2}} \approx \frac{m_2}{M_2} N_A = \underline{\underline{1017}}$.

V. PONTRENDSZERRE VONATKOZÓ FELADATOK (folyt.), MEREV TESTEK

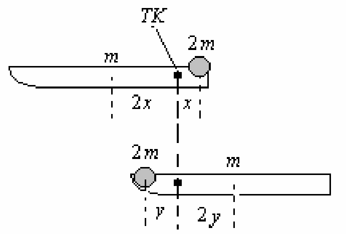
Pontrendszerre vonatkozó tételek

V./1.



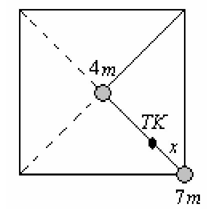
A pontok sajátos helyzete miatt könnyen leolvasható a két pont távolsága egymástól (7 m). Tekinthetünk egy elhanyagolható tömegű, $d = 7$ m hosszúságú rudat, melynek egyik végére 3 kg-os, másik végére 4 kg-os, pontszerűnek tekinthető testet erősítünk. Ennek ott lesz a tömegközéppontja, ahol alátámasztva egyensúlyban lesz. Készítsünk egy egyszerű ábrát, melyről az egyensúly feltétele: $m_1 g \cdot y = m_2 g(d - y)$, innen $y = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d = 4$ m. Ebből kiszámítható, hogy a 3 kg-os testtől a tömegközéppont 4 m távolságra van. Egy kicsit átalakíthatjuk ezt az eredményt $\frac{m_1}{m_2} = \frac{d - y}{y}$ alakba, amit úgy is megfogalmazhatunk, hogy a tömegek fordítottan arányosak a tömegközépponttól mért távolságukkal. Ez az általánosítás akkor is használható, ha a tömegpontok tetszőleges irányban helyezkednek el. A tömegközéppont helye: $TK = (1 \text{ m}, -2 \text{ m})$

V./2.



Tételezzük fel, hogy a mozgás elég lassú, továbbá a csónak és a víz között fellépő súrlódási erőt hanyagoljuk el. Ha a csónakot és a gyereket tekintjük egy rendszernek, akkor erre a rendszerre mint külső erő a nehézségi erő és a víz felhajtóereje hat. Ezek eredője 0, ezért a gyerek és a csónak között fellépő belső erők hatására a tömegközéppont vízszintesen nem mozdulhat el (függőlegesen sem). Ez azt jelenti, hogy a csónak és a gyerek közben elmozdul. Az üres csónak tömegközéppontja legyen a csónak végétől $3x$ távolságra, az orrától pedig $3y$-ra, azaz $3x + 3y = 3$ m. Az együttes, mindvégig álló *TK* tömegközéppont a gyerektől az első esetben x, a második esetben y távolságban van (a tömegközéppont távolsága a tömeggel fordítottan arányos). Vagyis a gyermek parthoz képest mért elmozdulása: $x + y = 1$ m.

V./3.



A 2 cm sugarú golyó tömege megegyezik 8 db 1 cm sugarú golyó 8 m tömegével. Először gondolatban a négy csúcsba tegyünk 4 egyforma golyót, ezek tömegközéppontja a négyzet átlóinak metszéspontjában lesz. Az átformált feladat a következőképpen szemléltethető: $4m$ a középpontban van, majd a maradék 7 m a „negyedik” csúcsban. Az ezeket összekötő szakaszt a tömegközéppont 4:7 arányban osztja fel: $x = \frac{4}{11}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} 10 \text{ cm}\right)$=2,57 cm.

A merev testre ható erők összetevése, forgatónyomaték, merev test egyensúlya

V./4.

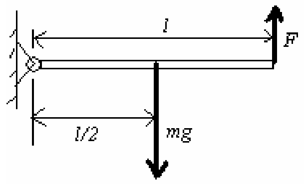
Rajzoljuk le az erőt az x–y síkban. Az erő hatásvonala metszi mind az x, mind az y tengelyt, ezért ezekre a tengelyekre a forgatónyomaték nulla. Hasonlóan látszik, hogy ezekre a tengelyekre az erő komponenseinek forgatónyomatékai is zérus. A z tengelyre $M_z = F \cdot k = 10\sqrt{2}\text{N} \cdot \sqrt{2}\text{m}$=20 Nm, iránya a $+z$ tengely irányába mutat, mert onnan visszanézve a forgás iránya ellentétes az óramutató járásával (megegyezés szerint ezt az irányt szokás pozitívnak tekinteni).

V./10.

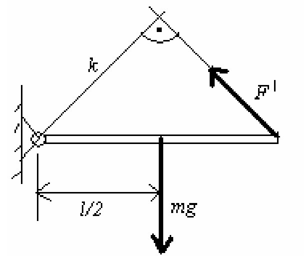
Jelöljük a bal és a jobb oldali mérlegkar hosszát l_b-vel, ill. l_j-vel, kiegyensúlyozó tömeget az első esetben m_1-gyel, a másodikban m_2-vel. Az egyensúly feltétele, hogy a két oldalon ható nehézségi erők forgatónyomatéka azonos nagyságú legyen. Az első esetben $mgl_b = m_1 g l_j$, a másodikban $m_2 g l_b = mgl_j$. Ezek felhasználásával kapjuk, hogy

$$m = \sqrt{m_1 m_2} = 0{,}6 \text{ kg, illetve } \frac{l_b}{l_j} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = 2.$$

V./14.

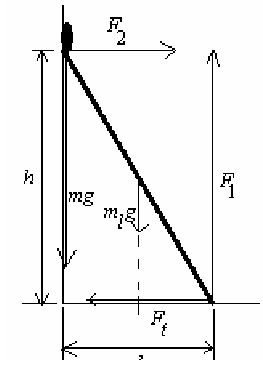


Készítsünk rajzot az első esethez. Az egyensúly feltétele, hogy a forgatónyomatékok eredője legyen nulla: $F \cdot l - mg\dfrac{l}{2} = 0$, innen $F = \dfrac{mg}{2} = 125$ N.



A második esetben az erő karja az ábra alapján $k = l\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}41 \text{ m}$. Az egyensúly feltétele: $F' \cdot k = mg\dfrac{l}{2}$, innen $F' = mg\dfrac{l}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{l} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}mg = 176{,}8 \text{ N}$.

V./16.

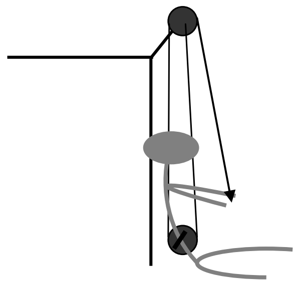


Készítsünk egy ábrát, amelyen tüntessük fel a jelöléseket. A rúd és a létra együttese akkor lesz egyensúlyban, ha az erők eredője és az erők forgatónyomatékainak összege egy tetszőlegesen választott tengelyre zérus. Az erők függőleges és vízszintes komponenseire is felírva az egyenletet $mg + m_l g = F_1$ és $F_2 = F_t$. A tapadási erőről tudjuk, hogy $F_t \le \mu_0 F_1$. Válasszuk forgástengelyül a rajz síkjára merőleges, a sarokponton átmenő tengelyt.

Ekkor $F_1 d - F_2 h - m_l g\dfrac{d}{2} = 0$, ahol $h = \sqrt{(3\text{m})^2 - (1{,}2\text{m})^2} = 2{,}75 \text{ m}$, innen $F_2 = (2m + m_l)g\dfrac{d}{2h} = 363{,}8\text{N}$. Felhasználva az eddigi eredményeket:

$$\mu_0 \ge \frac{F_2}{F_1} = \frac{2m + m_l}{2(m + m_l)}\frac{d}{h} = 0{,}41.$$

V./19.

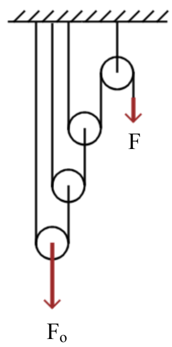


A csigasor álló és mozgó csigákból összeállított gép. Az egyes csigákat úgy építik be, hogy az egy tengelyen elhelyezkedő csigák nemcsak a tengelyhez, hanem egymáshoz képest is el tudnak fordulni. A gyakorlatban a csigasort gyakran úgy készítik el, hogy az álló csigákat és a mozgó csigákat is egy-egy közös tengelyre szerelik, a tengelyt pedig zárt keret tartja. Az *n* csigából álló csigasor utolsó állócsigájáról lefutó kötélre kifejtendő erő a teher által kifejtett erő *n*-ed részével egyenlőre van szükség.
Mivel jelen esetben *n* = 2, az ipari alpinistának

$$F = \frac{mg}{n} = \frac{75 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2}{2} = 367{,}875 \text{ N}$$

nagyságú erőt kell kifejtenie a saját testsúlyának felemeléséhez.

V./20.



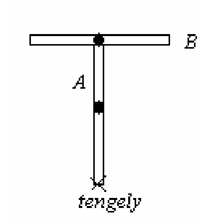
Az arkhimédészi csigasor egy álló csigából és több mozgó csigából áll. A mozgó csigák egyik kötélágát rögzítik, a másik kötélág az előző mozgócsiga tengelyét terheli. Az első mozgó csiga mozgó kötélága az álló csigán van átvetve. Ezzel az elrendezéssel nagyon nagy áttételt lehet megvalósítani, ennek ellenére a gyakorlatban ritkán használják.

Ha egy arkhimédészi csigasor *n* db csigából áll, az ábra jelöléseit használva $F = \dfrac{F_0}{2^n}$. Jelen feladatban F_0 = 1200 N és F = 75 N. A fenti összefüggés alapján

$$n = \log_2\frac{F_0}{F} = \log_2\frac{1200}{75} = 4.$$

Merev test forgó mozgása

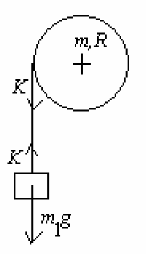
V./22.



A tehetetlenségi nyomaték additív mennyiség, értéke az egyes részek tehetetlenségi nyomatékából tevődik össze. Az egyes rudaknak, a sötéttel megjelölt tömegközéppontján átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka: $\Theta_0 = \frac{1}{12}ml^2$, a kijelölt tengelyre: $\Theta_A = \Theta_0 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$ és $\Theta_B = \Theta_0 + ml^2$, az egész rendszerre: $\Theta_t = 2\Theta_0 + \frac{5}{4}ml^2 = \frac{17}{12}ml^2 = 0{,}177\ \mathrm{kgm}^2$. A legkisebb a tehetetlenségi nyomaték, a rendszer tömegközéppontján átmenő tengelyre, a rendszer tömegközéppontja a két rúd tömegközéppontját felező távolságban van:

$$\theta_{\min} = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{11}{48}ml^2 = 0{,}0287\ \mathrm{kgm}^2.$$

V./24.



A korong gyorsuló forgó mozgást végez a $K \cdot R = \Theta \cdot \beta$ egyenlet szerint, a hasáb pedig egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgást végez az $m \cdot a = mg - K$ egyenlet szerint. A kötélről feltételezzük, hogy nyújthatatlan, ebből következik az $a = \beta \cdot R$ kényszerfeltétel. A három egyenletből: $a = \frac{m_1}{m_1 + \frac{m}{2}}g$, $\beta = \frac{m_1}{m_1 + \frac{m}{2}}\frac{g}{R}$ és $K = \frac{1}{2}\frac{m \cdot m_1}{m_1 + \frac{m}{2}}g$.

Az ***a)*** esetben $\beta = \frac{2}{3}\frac{g}{R}$ és $K = \frac{1}{3}mg$, a ***b)*** esetben pedig $\beta = \frac{g}{2R}$ és $K = \frac{1}{4}mg$.

V./25.

A test süllyedéséből tudjuk, hogy a rá ható erők eredője nulla, továbbá a kényszer miatt a korong sem gyorsulhat. A kötélben ébredő erő egyenlő a testre ható nehézségi erővel: $K = mg$. A kötél a koronghoz húzott érintő irányában K erővel $M_{kötél} = K \cdot r$ forgatónyomatékot fejt ki a korongra, ennek a forgatónyomatéknak egyenlőnek kell lenni a fékező nyomatékkal: $M_{kötél} = K \cdot r = 0{,}1\ \mathrm{Nm}$. Innen $K = 0{,}5\ \mathrm{N}$, $m = 0{,}051\ \mathrm{kg}$, $E_k = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_k r^2\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4}m_k v^2 = 0{,}1875\ \mathrm{J}$,

$E_{test} = \frac{1}{2}mv^2 = 6{,}4\ \mathrm{mJ}$, $W_g = -W_f = mg \cdot s = mg \cdot vt = 0{,}5\ \mathrm{J}$.

V./27.

Tételezzük fel, hogy a fékpofák a kerék peremén vannak elhelyezve. Ekkor összesen $M_f = F_s \cdot r = \mu \cdot 2F_{ny} \cdot r = 3{,}375\ \mathrm{Nm}$ fékező forgatónyomatékot fejtenek ki. A személy által végzett munka $W = -W_f = |M_f| \cdot 10 \cdot 48 \cdot 2\pi = 10{,}17\ \mathrm{kJ}$, teljesítménye $P \approx 17\ \mathrm{W}$, egy 60 kg tömegű ember ennyi munka árán, kb. 17 méter magasra jutna egy toronyban.

V./28.

A rúd a helyzeti energiája rovására mozgási energiára tesz szert, a mechanikai energiamegmaradás elve szerint $E_{kin2} + E_{pot2} = E_{kin1} + E_{pot1}$, vagyis $E_{kin2} = |\Delta E_{pot}| = m_{összes}g|\Delta h_{TK}| = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$, innen $\omega = \sqrt{\frac{2m_{összes}g|\Delta h_{TK}|}{\Theta}}$, $v = \omega \cdot l$.

Az ***a)*** esetben $|\Delta h_{TK}| = l,\ m_{összes} = m,\ \Theta = ml^2$, ezekkel $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}} = 3{,}13\ \frac{1}{\mathrm{s}}$, $v = 6{,}26\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Ha a rúd tömege nem hanyagolható el a ***b)*** eset szerint $|\Delta h_{TK}| = \frac{3}{4}l,\ m_{összes} = 2m,\ \Theta = ml^2 + \frac{1}{3}ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$, innen

$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}} = 3{,}32\ \frac{1}{\mathrm{s}}$, $v = 6{,}64\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

VI. A DEFORMÁLHATÓ TESEK FIZIKÁJA

Szilárd testek rugalmassága

VI./1.

Ha egy függőleges helyzetű huzalra egy súlyt függesztünk, akkor a huzal úgy fog viselkedni, mint egy rugó. Fejezzük ki a rugóállandót a huzal méreteivel és az anyagának Young modulusával! A megnyúlásra vonatkozó összefüggésből fejezzük ki az erőt: $F = \frac{Eq}{l}\Delta l$, és hasonlítsuk össze a rugóra vonatkozó erőtörvénnyel, amely szokásos alakja: $F = -D\Delta l$. Ebből látszik, hogy $D = \frac{Eq}{l}$.

VI./2.

$\Delta l_2 = 0,05$ mm

VI./3.

A négy függesztő drótban ébredő többleterő összesen egyenlő a nehézségi erővel, ezért egy-egy drót megnyúlása:

$$\Delta l = \frac{1}{E}\frac{F}{q}l = \frac{1}{E}\frac{mh}{4q}l = \frac{1}{E}\frac{mg}{d^2\pi}l = 0,22 \text{ mm.}$$

VI./4.

$p = 2,49\cdot 10^9$ Pa

VI./5.

d = 1,16 mm

Folyadékok és gázok sztatikája

VI./6.

A munkahenger egyensúlyának az a feltétele, hogy a túlnyomásból származó erő egyenlő legyen a megemelendő tárgy súlyával: $mg \le p_{\max} q_{\text{munka}}$, $m \le \frac{p_{\max} q_{\text{munka}}}{g} = 3,07$ t.

VI./7.

A test nyugalomban van, ezért a rá ható erők eredője nulla. A rugóban ébredő erő, a felhajtóerő felfelé mutat, míg a nehézségi erő lefelé mutató erő: $F_{rugó} + F_{felh.} - mg = 0$, ahol $F_{rugó} + F_{felh.} = \frac{m}{\rho}\rho_{víz} g$. Innen $\rho = \frac{m\rho_{víz} g}{mg - F_{rugó}} = 1096\,\frac{kg}{m^3}$.

VI./8.

Feltételezzük, hogy emberünk mindvégig jól egyensúlyoz, ezért a jég teljes egészében be tud merülni a vízbe úgy, hogy emberünk álló helyzetben marad és még a cipője sem merül a vízbe. Ennek feltétele:

$$mg + hA\rho_{jég} g \le hA\rho_{víz} g, \text{ innen } A = 6,67 \text{ m}^2.$$

VI./9.

A nyomások: $p_{külső} = 2,80\cdot 10^4$ kPa, $p_{belső} = 1,013\cdot 10^5$ kPa.

Az erő a két felületre ható erő eredője: $F_{eredő} = A(p_{belső} - p_{külső}) = 4,40$ kN, ahol $A = 0,4 \text{ m}^2$.

VI./10.

$p^* + h_1\cdot\rho_1\cdot g = p^* + h_2\cdot\rho_2\cdot g = p_0$, ahol $p_0 = 1,013\cdot 10^5$ Pa és p^* a cső belsejében maradt levegő nyomása. Innen

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Felületi feszültség és kapillaritás

VI./11.

Ki kell számítani az új csepp sugarát: $2V_1 = V_2$, $r_2 = r_1\sqrt[3]{2}.$ Ebből a felületi energia csökkenése:

$$\Delta E = \alpha\Delta A = \alpha(4r_2^2\pi - 2\cdot 4r_1^2\pi) = -2,49\cdot 10^{-7} \text{ J.}$$

VI./12.

A kapillárisban a folyadékoszlop emelkedése: $h = \dfrac{2\alpha}{\rho r g}$, innen a sugár: $r = \dfrac{2\alpha}{\rho h g} = 2{,}48 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = 0{,}248\mathrm{mm}$.

A Boyle–Mariotte-törvény. Barometrikus magasságformula

VI./13.

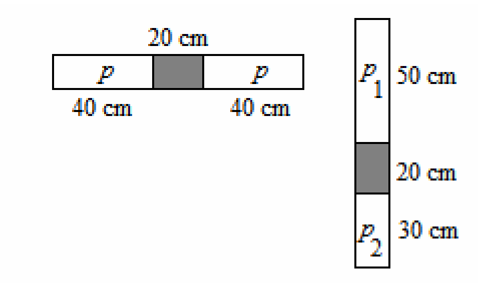
Jelöljük a keresett nyomás értékét p-vel, a gázoszlopok hosszát h_i-vel, és mindkét gázrészre írjuk fel a Boyle-Mariotte törvényt:

$$p \cdot h \cdot A = p_1 \cdot h_1 \cdot A, \text{ és } p \cdot h \cdot A = p_2 \cdot h_2 \cdot A.$$

Innen: $\dfrac{p_1}{p} = \dfrac{4}{5}$ és $\dfrac{p_2}{p} = \dfrac{4}{3}$.

Függőleges helyzetben a nyomásokra igaz az, hogy

$p_2 = p_1 + \rho_{Hg} h_{Hg} g$, ebből adódóan $p = 4{,}97 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$.



VI./14.

Tegyük fel, hogy a levegő normálállapotú a felszínen: $\rho_0 = 1{,}29\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$. A barometrikus magasságformula segítségével: $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h}$, ahonnan h = 5,55 km.

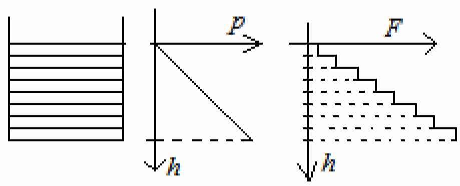
Folyadékok és gázok áramlása: a kontinuitási egyenlet, a Bernoulli-féle egyenlet és alkalmazásai

VI./15.

A kontinuitási egyenlet szerint a $A \cdot v = \text{állandó}$, ezért $A_1 v_1 = A_2 v_2$, vagyis A^2=16 cm^2.

VI./16.

A zsilipre ható nyomás a vízszinttől mért távolsággal lineárisan nő. Osszuk fel a zsilipet azonos magasságú sávokra, az ezekre ható erő változását az ábrán láthatjuk. Természetesen ha a sávok számát növeljük, akkor ez a lépcsős függvény egyre jobban megközelíti a lineáris függvényt:



$$F_{eredő} = \frac{F_{\min} + F_{\max}}{2} \frac{h}{\Delta h} = \frac{0 + \rho g h(\Delta h d)}{2} \frac{h}{\Delta h} = \frac{\rho g h (h d)}{2} = 2759\ \mathrm{N},$$

ahol d a zsilip szélessége. Az erő támadáspontja a csatorna fenekétől számítva a vízmagasság harmadolópontjában, vízszintes irányban a fele távolságban van. (Itt számolás helyett próbáljunk analógiát keresni. Tekintsünk egy derékszögű háromszög keresztmetszetű, homogén anyagú hasábot, és vizsgáljuk meg hol található annak a tömegközéppontja, ott lesz a nehézségi erő támadáspontja.)

A kiáramlás sebességénél használjuk fel a Bernoulli-egyenletet, válasszuk az áramlási csövet úgy, hogy a felső vége a víz színén, az alsó vége a zsilip alatti nyílás legyen:

$p_0 + \rho g h = p_0 + \dfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g \dfrac{h^*}{2}$, innen $v = \sqrt{2g\left(h - \dfrac{h^*}{2}\right)} = 3{,}77\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Vagyis a kiáramlás sebessége egyenlő azzal a sebességgel, amellyel h magasságból szabadeséssel érkezne a folyadék.

A zsilip alatt Δt idő alatt kiáramló folyadék tömege: $\Delta m = \Delta V \cdot \rho = \left(d h^* v \Delta t\right)\rho$. Az ennek megfelelő impulzusváltozás:

$\Delta I = \Delta m \cdot v = \left(d h^* v \Delta t\right)\rho v$. Ez csak akkor lehetséges, ha a többi, a zsilipet nyomó víz $F = \dfrac{\Delta I}{\Delta t} = d h^* v^2 \rho = 711\ \mathrm{N}$ erővel hat a kiáramló vízre, azaz ennyivel csökkenni fog a zsilipre ható erő, és ekkor a zsilipre 2048 N erő fog hatni.

Réteges áramlások. A Poiseuille és a Stokes-féle törvény

VI./17.

A golyó lefelé fog mozogni, és amikor eléri az állandósult sebességét, akkor $m_1 g = F_{ell,1} + F_{felh,1}$. A buborék pedig felfelé fog mozogni, mozgására felírhatjuk, hogy $m_2 g + F_{ell,2} = F_{felh.2}$.

Átalakítások után: $v_g = \dfrac{2r_1^2\left(\rho_1 - \rho_f\right)g}{9\eta}$, $v_b = \dfrac{2r_2^2\left(\rho_f - \rho_2\right)g}{9\eta}$, innen a sebességek nagyságának hányadosa:

$$\frac{v_g}{v_b} = \frac{r_1^2(\rho_1 - \rho_f)}{r_2^2(\rho_f - \rho_2)} = 15,5.$$

VI./18.

Az előző feladat megoldásában láttuk, hogy a gömb alakúnak feltételezett részecske állandósult sebessége $v_{szén} = \dfrac{2r^2\left(\rho_{szén} - \rho_{levegő}\right)g}{9\eta} \approx \dfrac{2r^2\rho_{szén}g}{9\eta} = 5,01\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. A 2 m magasságot így kb. 40 s alatt teszi meg.

VI./19.

A csövön egységnyi idő alatt kifolyó folyadék mennyisége (Hagen–Poiseuille törvénye szerint) $I \sim \dfrac{\Delta p}{l} r^4$. A nyomáskülönbségről feltehetjük, hogy állandó (számottevően nem csökken a bödönben a méz magassága), így a töltéshez szükséges idők arányát a cső geometriai adatai határozzák meg: $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{r_1^4}{l_1}\dfrac{l_2}{r_2^4} = \dfrac{\left(2r_2\right)^4}{4l_2}\dfrac{l_2}{r_2^4} = \dfrac{8}{4} = 2.$

VII. HARMONIKUS REZGÉSEK ÉS HULLÁMOK

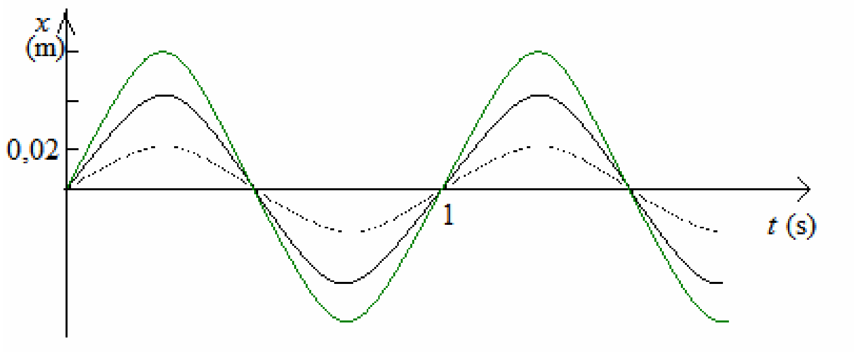
VII./1.

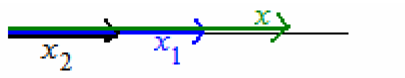
A matematikai inga periódusideje a következőképpen számítható ki: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$. Ebből az látszik, hogyha az *A* inga hossza 4-szerese a *B* inga hosszának, akkor tömegüktől <u>függetlenül</u> a lengésidők között mindig fennáll a $T_A = 2T_B$ összefüggés.

VII./6.

Az eredő mozgás az *x* tengely irányában harmonikus rezgés lesz, mert két azonos irányú, azonos frekvenciájú rezgést adunk össze:

$$x = x_1 + x_2 = 0,04\,\text{m}\sin 2\pi\tfrac{1}{\text{s}}t + 0,02\,\text{m}\sin\left(2\pi\tfrac{1}{\text{s}}t + 2\pi\right) = 0,04m\sin 2\pi\tfrac{1}{\text{s}}t + 0,02\,\text{m}\sin 2\pi\tfrac{1}{\text{s}}t =$$
$$= 0,06\,\text{m}\sin 2\pi\tfrac{1}{\text{s}}t$$





Az eredő rezgés amplitúdója 0,06m, periódusideje 1 s, körfrekvenciája $2\pi\frac{1}{\text{s}}$.

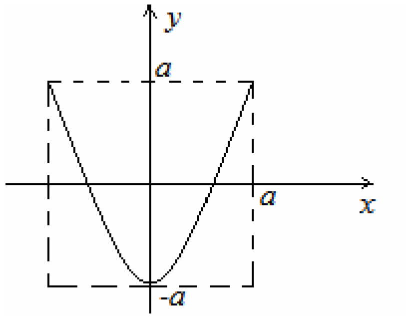
A forgóvektoros ábra rendkívül egyszerű lesz ennél a feladatnál, hiszen a két eredeti rezgéshez tartozó vektor a szokásos vízszintes tengely irányába esik, így összegük is arra mutat.

VII./9.

A feladatban egy síkgörbe paraméteres alakban adott, matematikai feladatunk az, hogy a t paramétert kiküszöböljük. Célszerű először átalakítani az y koordinátát leíró függvényt:

$y = a\cos 2\omega t = a\left(\cos^2\omega t - \sin^2\omega t\right) = a\left(2\cos^2\omega t - 1\right)$, most pedig az x összefüggéséből helyettesítsük be a $\cos\omega t$-t, innen

$y = a\left(\dfrac{x^2}{a^2} - 1\right)$. Egy parabola egyenletét kaptuk, és az eredeti összefüggésekből $x \in [-a; a]$, $y \in [-a; a]$..



VII./11.

Számoljuk ki a kötélen terjedő hullám hullámhosszát: $\lambda = T \cdot v = 2\,\mathrm{s} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m/s} = 1{,}6\,\mathrm{m}$. A szomszédos hullámhegyek távolsága a hullámhosszal egyenlő, egy hullámhegy a legközelebbi hullámvölgytől (a transzverzális hullám minimumhelyétől) $\lambda/2$ távolságra van.
Hullámhegyek lesznek: 0,3 m, 1,9 m, 3,5 m...
Hullámvölgyek helyei: 0,3 + 0,8 m = 1,1 m, 2,7 m, 4,3 m…

VII./12.

Az l hosszúságú húron kialakuló sajátrezgésnél a húr végein csomópont alakul ki, a szomszédos csomópontok távolsága egyenlő a λ hullámhossz felével, ezért:

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \text{ ahol } n \text{ egész szám.}$$

A feladatban szereplő két frekvenciaértékre:

$$l = n\frac{\lambda_n}{2} = n\frac{c}{2 \cdot f_n}, \qquad l = (n+1)\frac{\lambda_{n+1}}{2} = (n+1)\frac{c}{2 \cdot f_{n+1}}.$$

A két egyenlet elosztásával:

$\dfrac{f_n}{n} = \dfrac{f_{n+1}}{n+1}$, behelyettesítés és egyszerűsítés után: $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{5}{6}$, azaz $n = 5$.

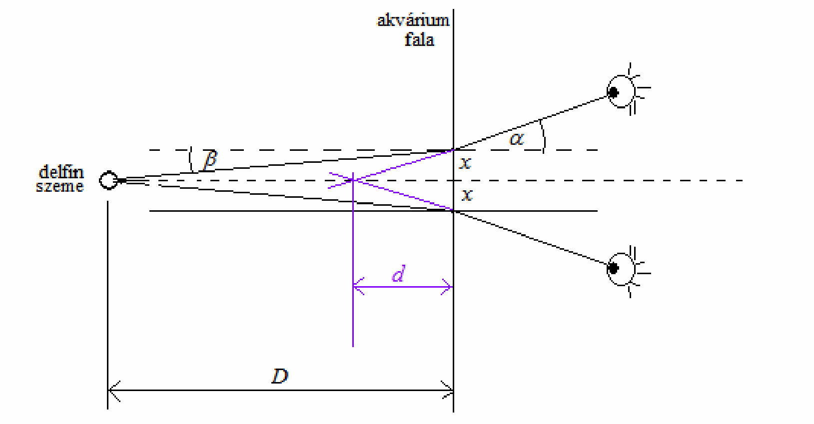
A hullám terjedési sebessége: $c = \dfrac{2lf_n}{n} = 54{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, az alapfrekvencia $f_1 = \dfrac{f_5}{5} = 17\,\mathrm{Hz}$, a 85 Hz-es hullám félhullámhossza: $\dfrac{\lambda_5}{2} = \dfrac{l}{5} = 32\,\mathrm{cm}$.

VIII. OPTIKA 1.

Fény visszaverődése és törése síkfelületen

VIII./6.

Tételezzük fel, hogy az akvárium falának vastagsága elhanyagolható a többi méret mellett, és készítsünk rajzot, amelyen a delfin szeméből kiinduló fénysugár a megfigyelő két szemébe érkezik:



A tárgyakat a szemünkbe jutó fény meghosszabbításában látjuk. Ezen az ábrán az akvárium falánál törik meg a fény, ezért a szemünkbe jutó fény kékkel rajzolt meghosszabbításában látjuk a delfin szemét.
A számolásnál felhasználjuk, hogy az ember szemeinek távolsága a feladatban szereplő méretekhez képest kicsi, ezért a szögek is kicsik, $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\,\alpha$.

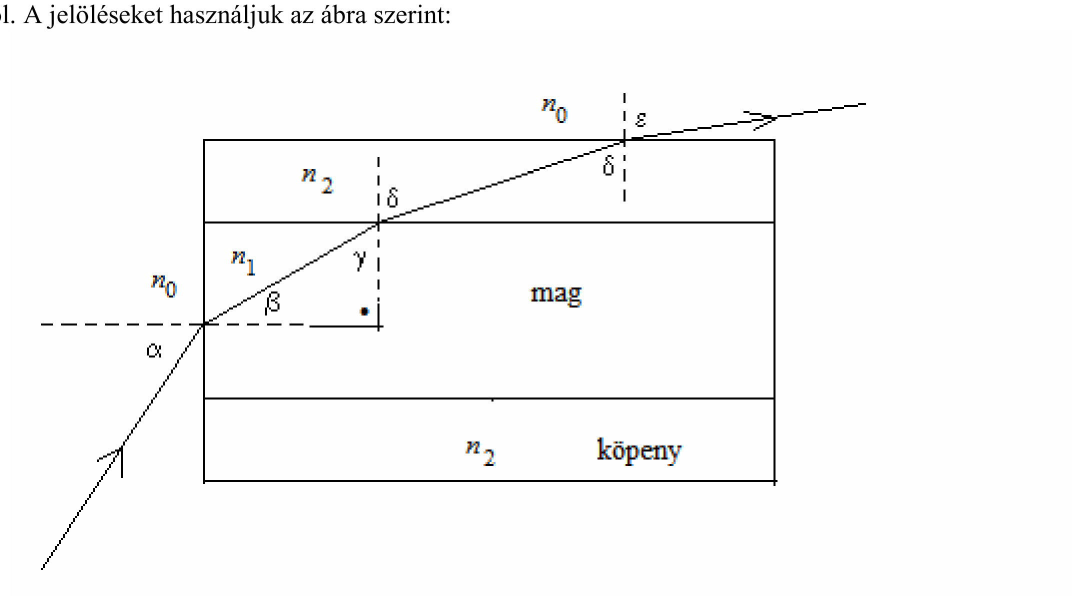
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{víz}, \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{x}{D}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x}{d} \quad \text{és} \quad \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{\frac{x}{d}}{\frac{x}{D}} = \frac{D}{d}, \quad \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta} \approx \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$\text{ebből} \quad \frac{D}{d} \approx n_{víz}, \quad \text{innen} \quad d \approx \frac{D}{n_{víz}} = \frac{1\text{ m}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}\text{m} = 0{,}75\text{ m}.$$

A delfin szemét tehát az akvárium fala mögött 75 cm távolságban látjuk.

VII./9.

A fény akkor nem jut át a számolás egyszerűsítése végett egyenesnek gondolt fényvezetőn, ha három törés után kilép a köpenyből. A jelöléseket használjuk az ábra szerint:



Írjuk fel a törés törvényét egymás után a három törésre:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_1}{n_0}, \qquad \frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad \frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} = \frac{n_0}{n_2}..$$

Akkor nem lép ki fény a köpenyen keresztül, ha δ eléri a teljes visszaverődés határszögét, vagy annál nagyobb. A határszögnél $\varepsilon = 90°$, $\sin\delta_h = \frac{n_0}{n_2}$, a második törést leíró egyenletből a δ_h-hoz tartozó γ_{min}-t számíthatjuk ki, a feladat feltétele szerint a γ szög ennél nem lehet kisebb. Mivel a β és γ egy derékszögű háromszög két hegyes szöge, $\beta = 90° - \gamma$, így $\beta_{max} = 90° - \gamma_{min}$.
Ezeket felhasználva a következőt kapjuk:

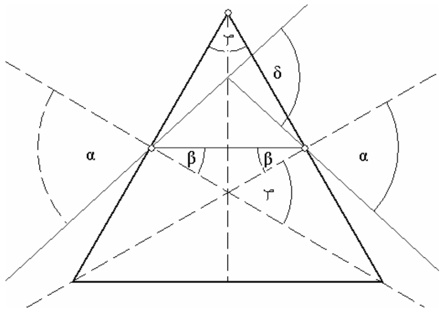
$$\frac{\sin\alpha_{max}}{\sin\beta_{max}} = \frac{n_1}{n_0}, \quad \sin\alpha_{max} = \frac{n_1}{n_0}\sin\beta_{max} = \frac{n_1}{n_0}\sin\left(90^0 - \gamma_{min}\right) = \frac{n_1}{n_0}\cos\gamma_{min} = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\sin\gamma_{min}} =$$

$$= \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2\delta_h} = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\left(\frac{n_0}{n_2}\right)^2} = \frac{n_1}{n_0}\sqrt{1-\left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^2 - 1} = \sqrt{n_1^2 - 1},$$

$$\sin\alpha_{max} = \sqrt{n_1^2 - 1}.$$

Ha $n_1 \geq \sqrt{2} = 1{,}41$, akkor bármely beesési szög esetén áthalad a fényvezetőn a fény.

VIII./10.



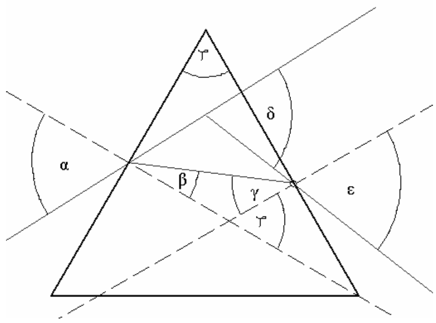
Ha a prizmában a fénysugár útja merőleges a prizma törőszögének szögfelezőjére, a fénysugár szimmetrikusan halad a prizmában. Jelölje α és β a beesési és törési szögeket, φ a prizma törőszögét, valamint δ a nyaláb eltérítési szögét (mely jelen esetben a legkisebb eltérítési szög, ezért ezentúl $\delta_{\text{min.}}$-nel jelöljük). Geometriai megfontolásokból $\beta = \frac{\varphi}{2}$ és $\delta_{\text{min.}} = 2(\alpha - \beta)$, ez utóbbiból $\alpha = \frac{\delta_{\text{min.}} + \varphi}{2}$.

Írjuk fel a Snellius–Descartes-törvényt a prizma lapján végbemenő törésre (a megadott n törésmutató a prizma anyagának a prizmát körülvevő közegre vonatkoztatott relatív törésmutatója):

$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{\delta_{\text{min.}} + \varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, amelyből a legkisebb eltérítés szöge $\delta_{\text{min.}} = 2\arcsin\left(n \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\right) - \varphi$. A legkisebb eltérítés szöge a két különböző törőszögű prizmára vonatkozóan:

$$\delta_{45°} = 2\arcsin\left(1{,}519 \cdot \sin\frac{45°}{2}\right) - 45° = 26{,}08° \text{ és } \delta_{60°} = 2\arcsin\left(1{,}519 \cdot \sin\frac{60°}{2}\right) - 60° = 38{,}84°.$$

VIII./11.



Az előző feladatból tudjuk, hogy a zöld fénysugárra az eltérítés szöge $\delta_2 = \delta_{60°} = 38{,}84°$ lesz, és a háromszínű fénynyaláb $\alpha = \frac{\delta_{60°} + \varphi}{2} = \frac{38{,}84° + 60°}{2} = 49{,}42°$-os szög alatt érkezik a prizma első törőfelületére.

A prizmában haladó fénysugár útja a kék sugárra nem a szimmetrikus sugármenetet követi, az eltérítés szögének kiszámításához az alábbi jelöléseket vezetjük be. Az ábra alapján felírható, hogy $\delta = (\alpha - \beta) + (\varepsilon - \gamma)$ és $\varphi = \beta + \gamma$, amelyekből $\delta = \alpha + \varepsilon - \varphi$. Írjuk fel a Snellius–Descartes-törvényt az első törőfelületen bekövetkező törésre: $n_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, amelyből

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 49{,}42°}{1{,}530}\right) = 29{,}76°.$$

A $\varphi = \beta + \gamma$ összefüggésből $\gamma = \varphi - \beta = 60° - 29{,}76° = 30{,}24°$ adódik. Most a második törőfelületre írjuk fel a Snellius–Descartes-törvényt: $n_1 = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma}$, ebből $\varepsilon = \arcsin(n_1 \cdot \sin\gamma) = \arcsin(1{,}530 \cdot \sin 30{,}24°) = 50{,}40°$.

Ezt az ábra alatt található összefüggésbe visszahelyettesítve:

$$\delta_1 = \alpha + \varepsilon - \varphi = 49{,}42° + 50{,}40° - 60° = 39{,}82°.$$

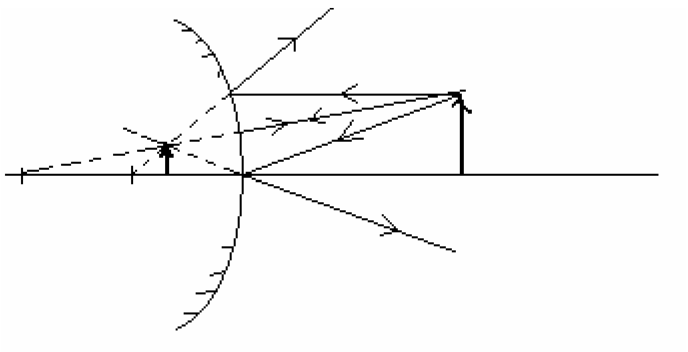
A vörös színű fénysugárra a fenti gondolatmenetet követve $\beta = 30{,}11°$, $\gamma = 29{,}89°$ és $\varepsilon = 48{,}98°$, ezekből $\delta_3 = 38{,}40°$. A három eltérítési szögből a kilépő fénysugaraknak a középső, zöld színű nyalábbal bezárt szögük

$$\phi_{kék-zöld} = \delta_1 - \delta_2 = 39{,}82° - 38{,}84° = 0{,}98° \text{ és } \phi_{vörös-zöld} = \delta_3 - \delta_2 = 38{,}40° - 38{,}84° = -0{,}44°.$$

IX. OPTIKA 2.

Gömbtükrök és gömbi vékony lencsék

IX./1.



$f = -30$ cm, $t = 60$ cm

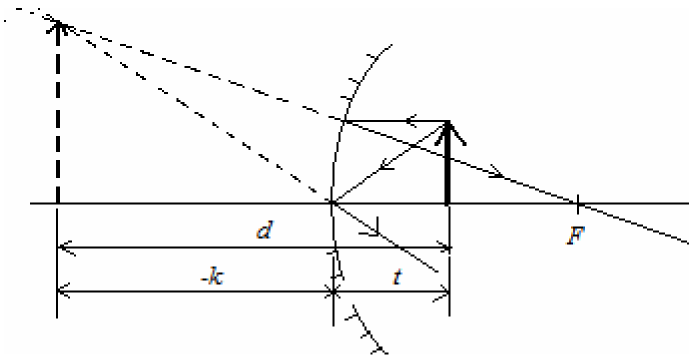
A tüköregyenletet használjuk fel:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{f} - \frac{1}{t}, \quad k = \frac{t \cdot f}{t - f} = -20\,\text{cm}$$

$$N = -\frac{k}{t} = -\frac{-20\text{ cm}}{60\text{ cm}} = \frac{1}{3}.$$

IX./3.

A borotválkozótükör használatánál egyenes állású képet nézünk, ez azt jelenti, hogy a kép látszólagos. Nagyított képet csak homorú tükörrel tudunk előállítani. Készítsünk erről egy vázlatot:



$d = 25$ cm, $N = 2$

Az ábra szerint: $d = -k + t$

A nagyításból: $N = -\frac{k}{t} = 2, \quad -k = 2t$

Vagyis: $d = 3t, \quad t = d/3, \quad -k = 2d/3.$

Helyettesítsünk a tüköregyenletbe:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{f} = \frac{3}{d} - \frac{3}{2d} = \frac{6-3}{2d} = \frac{3}{2d},$$

$$f = \frac{2d}{3} = \frac{50}{3}\,\text{cm}.$$

IX./5.

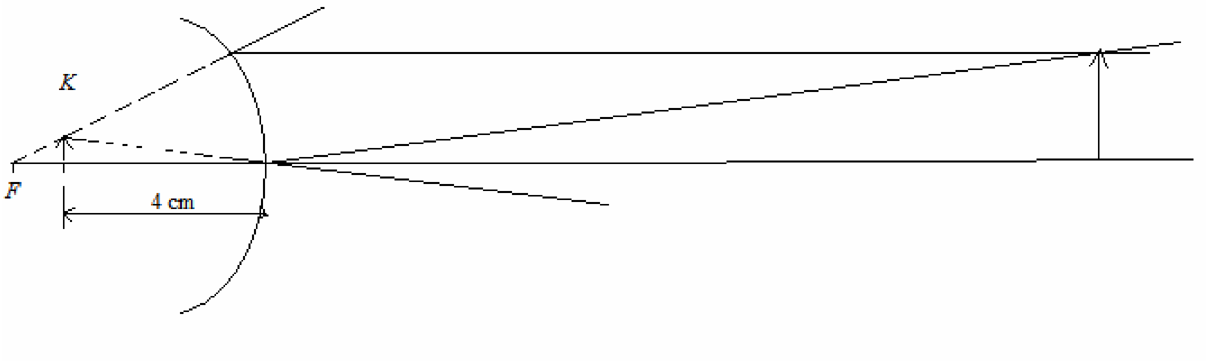
$r = 40$ cm, $k = -60$ cm

A fókusztávolság $f = r/2 = 20$ cm. Használjuk fel a tüköregyenletet a tárgytávolság kiszámítására:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{f} - \frac{1}{k}, \quad t = \frac{k \cdot f}{k - f} = \frac{(-60\text{ cm}) \cdot 20\text{ cm}}{-60\text{ cm} - 20\text{ cm}} = \frac{-1200}{-80}\,\text{cm} = 15\,\text{cm}.$$ A nagyítás: $N = -\frac{k}{t} = -\frac{-60\text{ cm}}{15\text{ cm}} = 4.$

IX./7.

A domború tükör látszólagos, egyenes állású képet hoz létre, a tükör mögött. Az $r = 10$ cm görbületi sugár miatt $f = -5$ cm és $k = -4$ cm.



Számítsuk ki a tárgytávolságot:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k},\quad \frac{1}{t}=\frac{1}{f}-\frac{1}{k},\quad t=\frac{k\cdot f}{k-f}=\frac{(-4\ \mathrm{cm})\cdot(-5\ \mathrm{cm})}{-4\ \mathrm{cm}-(-5\ \mathrm{cm})}=\frac{20}{1}\ \mathrm{cm}=20\ \mathrm{cm}.$$

IX./9.

$f = 20$ cm, $K_1 = 10$ cm, $K_2 = 2{,}5$ cm, $t_1 = k_2$ és $t_2 = k_1$.

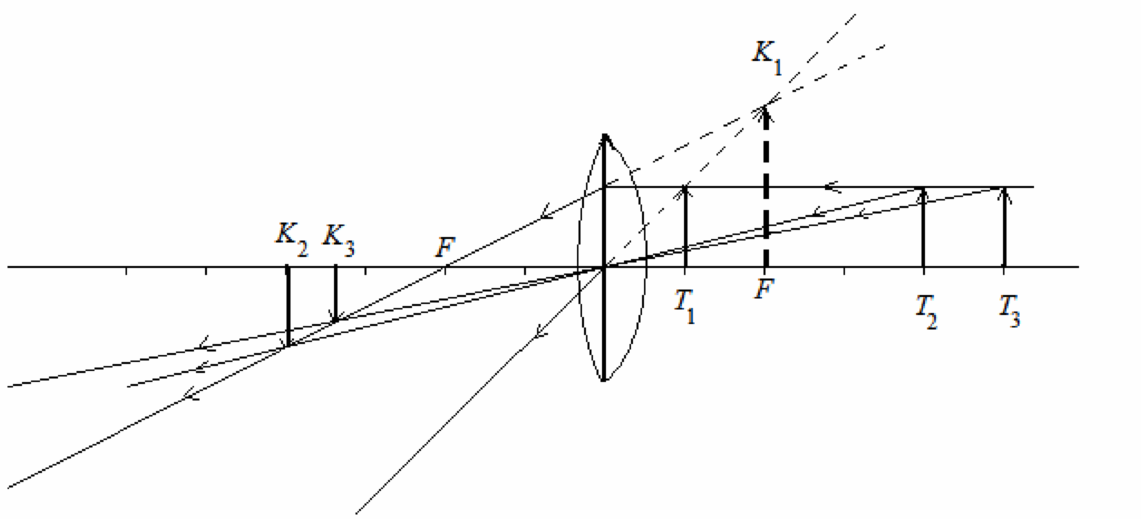
A nagyítás miatt: $\frac{K_1}{T}=\frac{k_1}{t_1},\quad \frac{K_2}{T}=\frac{k_2}{t_2}=\frac{t_1}{k_1}$. Innen $\frac{K_1}{T}\frac{K_2}{T}=\frac{k_1}{t_1}\frac{t_1}{k_1}=1,\quad T^2=K_1\cdot K_2=25\ \mathrm{cm}^2,\ T=5\ \mathrm{cm}.$

Továbbá $\frac{k_1}{t_1}=\frac{K_1}{T}=\frac{5\ \mathrm{cm}}{10\ \mathrm{cm}}=2,\ k_1=2t_1.$

A tüköregyenletből: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{k_1}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{2t_1}=\frac{3}{2t_1}$, innen $t_1=\frac{3f}{2}=30\ \mathrm{cm},\ k_1=60\ \mathrm{cm}.$

IX./11.

A képszerkesztésnél kihasználtuk, hogy az optikai tengellyel párhuzamos sugár mindhárom tárgyhelyzethez felhasználható!



IX./13.

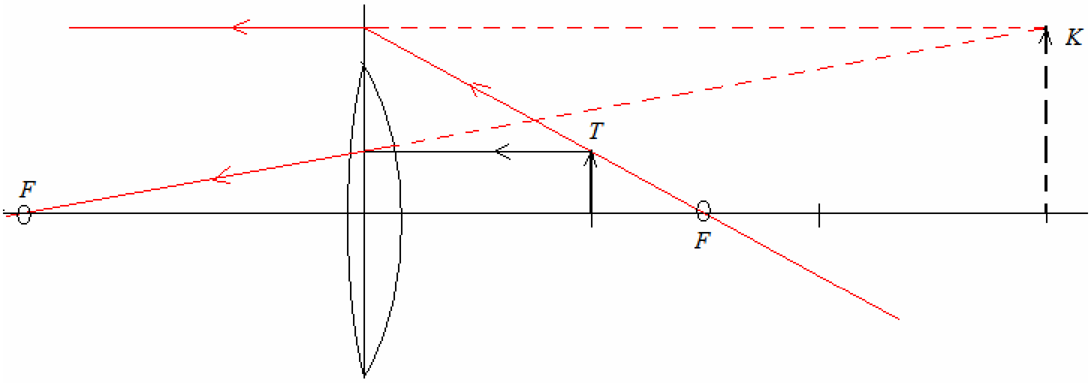
$t = 60$ m, $T = 15$ m, $K = 2$ mm.

Az adatokból kiszámíthatjuk a képtávolságot: $\frac{k}{t}=\frac{K}{T},\quad k=t\frac{K}{T}=60\ \mathrm{m}\ \frac{2\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}}{15\ \mathrm{m}}=8\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}=8\ \mathrm{mm}.$

A lencseegyenletet felhasználva: $\frac{1}{f}=\frac{1}{t}+\frac{1}{k}=\frac{1}{60\ \mathrm{m}}+\frac{1}{8\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}}=\frac{60{,}008}{0{,}48}\frac{1}{\mathrm{m}},\quad f\approx8\ \mathrm{mm}.$ Ez abból a tényből is megbecsülhető, hogy az $\frac{1}{60\ \mathrm{m}}$ elhanyagolható az $\frac{1}{8\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}}$ mellett.

IX./15.

$f = 1/D = 1/4$ m = 25 cm, $N = 3$ (látszólagos a kép).
Szerkesztéssel is megoldhatjuk a feladatot. Rajzoljuk le a lencsét, és mellé a tárgyat. Az önkényesen kijelölt tárgytávolság háromszorosára (ugyanarra az oldalra) rajzoljuk a háromszoros méretű egyenes állású képet. Felhasználva, hogy a képpontban a valóságos sugarak meghosszabbításai metszik egymást, megrajzolhatjuk a tárgy- és képpontok felhasználásával a pirossal berajzolt nevezetes sugarakat, melyek az optikai tengelyből kimetszik a fókuszpontokat.

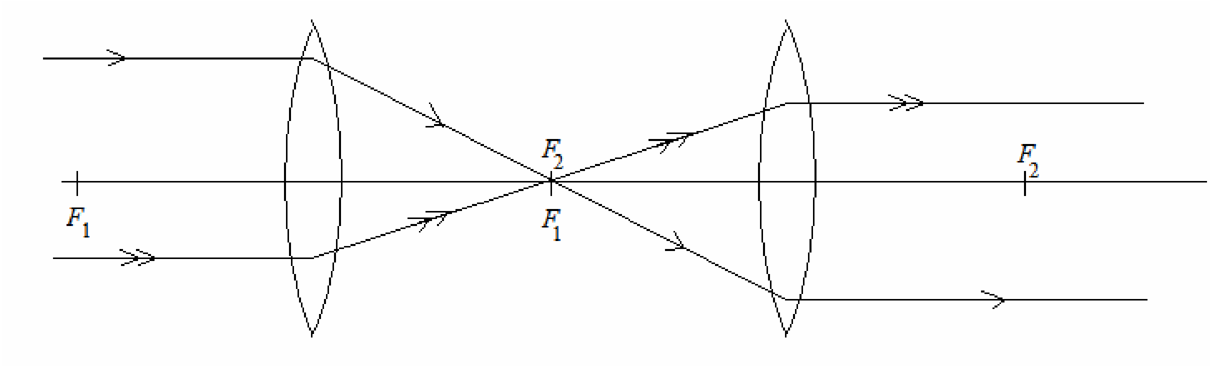


Számítással pontosabb értékeket kapunk:

$$k = -3t,\quad \frac{1}{f} = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t} = \frac{2}{3t},\quad t = \frac{2}{3}f = 16{,}7 \text{ cm},\quad k = -50 \text{ cm}.$$

IX./17.

Az első lencséről úgy haladnak tovább a sugarak, hogy egy ponton, a fókuszponton átmennek. Vagyis a következő lencsére érkező sugarakat úgy tekinthetjük, mintha azok egyetlen pontból (az első lencse fókuszából indulnának). Egy pontból kiinduló sugarakat egy gyűjtőlencse akkor tesz párhuzamossá, ha a pontszerű forrás egybe esik a második lencse fókuszpontjával. Akkor lesz az elrendezés megfelelő, ha a két lencse egymás felőli fókuszpontja egybeesik.

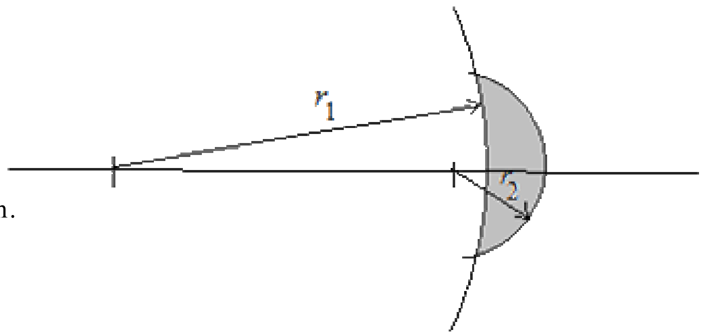


IX./19.

$f = 50$ cm, $r_1 = -80$ cm, $n = 1{,}522$

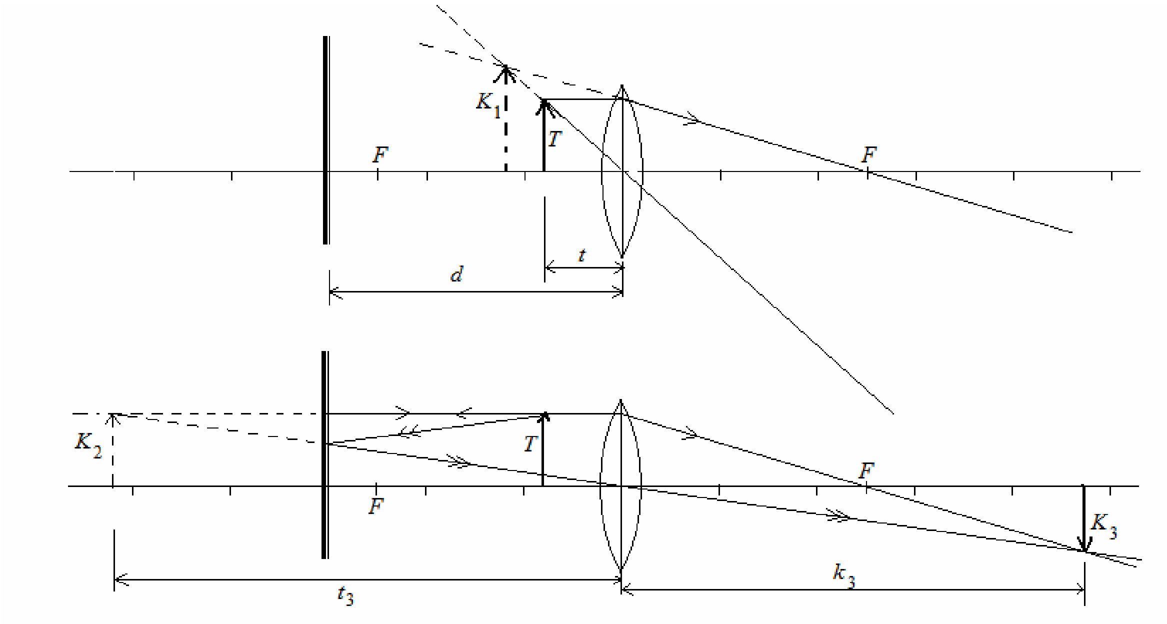
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),\quad \frac{1}{f(n-1)} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2},$$

$$r_2 = \frac{f(n-1)r_1}{r_1 - f(n-1)} = \frac{50 \text{ cm}\cdot 0{,}522\cdot(-80 \text{ cm})}{-80 \text{ cm} - 50 \text{ cm}\cdot 0{,}522} = 19{,}68 \text{ cm}.$$



IX./21.

$f = 25$ cm, $d = 30$ cm, $t = (30 - 22)$ cm = 8 cm.



Az első ábrán az a kép látható, amely úgy keletkezik, hogy a fénysugarak nem érintik a síktükröt:

$k_1 = \dfrac{t \cdot f}{t - f} = \dfrac{8\ \text{cm} \cdot 25\ \text{cm}}{8\ \text{cm} - 25\ \text{cm}} = -11{,}76\ \text{cm}$. Ez látszólagos kép, ernyőn nem fogható fel, nagysága $K_1 = \dfrac{k_1}{t} T = -1{,}47T$.

Az alsó ábrán, a fénysugarak először a síktükörre esnek, ott visszaverődnek (keletkezik egy látszólagos kép a tükör mögött K_2), majd a visszaverődő sugarak úgy haladnak, mintha a K_2 valóságos forrásuk lenne, ezután áthaladnak a lencsén, és létrehozzák a K_3 valódi, ernyőn felfogható képet k_3 távolságban:

A K_2 kép lencsétől való távolsága $t_3 = 22\ \text{cm} + 30\ \text{cm} = 52\ \text{cm}$., a képtávolság $k_3 = \dfrac{t_3 \cdot f}{t_3 - f} = 48{,}15\ \text{cm}$. A harmadik kép nagysága $K_3 = \dfrac{k_3}{t_3} |T_2| = 0{,}93T$.