Hullámtan és optika

Rezgések és hullámok; hangtan

- Rezgéstan
- Hullámtan
    - **Optika**
- Geometriai optika
- Hullámoptika

Ajánlott irodalom

Budó Á.: **Kísérleti fizika I, III.** (Tankönyvkiadó, 1992)

Demény-Erostyák-Szabó-Trócsányi: **Fizika I, III.** (Nemzeti Tankönykiadó, 2005)

Tarnóczy T.: **Fizikai akusztika** (Akadémiai Kiadó, 1963)

Tarnóczy T.: **Hangnyomás, hangosság, zajosság** (Akadémiai Kiadó, 1984)

Ábrahám Gy.: **Optika** (Panem- McGraw-Hill, 1998)

Sain M.: **A fény birodalma** (Gondolat, 1980)

Bernolák K.: **A fény** (Műszaki Könyvkiadó, 1981)

Mátrai T., Csillag L.: **Kísérleti spektroszkópia** (Tankönyvkiadó, 1990)

Rezgéstan

A rezgések típusai

Rezgés:

- Rezgés: f fizikai mennyiség az időnek periodikus függvényeként változik:

megadható olyan T mennyiség, melyre $\boxed{f(t+T) = f(t)}$ $\forall t$ - re teljesül.

T a rezgésidő, vagy periódus

$\nu = 1/T$ a rezgésszám, vagy frekvencia

- Rezgésről beszélünk akkor is, ha valamilyen fizikai mennyiség egy adott érték körül ingadozik nem feltétlenül periodikusan (pl: csillapodó rezgés).
- Vagyis a rezgés fogalma nem teljesen egyértelmű.

Harmonikus rezgés:

$$\boxed{f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \qquad \omega = 2\pi\nu$$

- A a rezgés amplitúdója,
- ω a rezgés körfrekvenciája,
- α a rezgés kezdőfázisa,
- $\varphi = \omega t + \alpha$ a rezgés fázisa.

Anharmonikus rezgés:

- Minden olyan rezgést, amely nem harmonikus rezgés, anharmonikus rezgésnek nevezünk.

- A rezgéstan szempontjából sokszor nem lényeges, hogy milyen fizikai mennyiség rezeg!
- **Ennek oka**: a fizikai mennyiségek, és ezek időbeli lefolyását meghatározó fizikai törvények különböznek, a törvények ***azonos időbeli változást leíró matematikai egyenletre*** vezetnek!

- Rezgésekkel találkozhatunk:

  mechanikában,

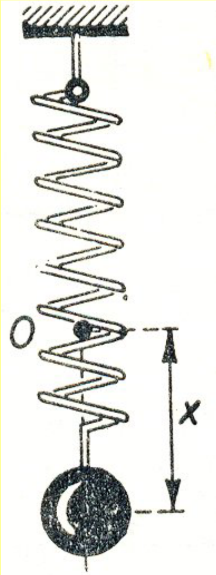
  elektromosságtanban,

  csillagászatban (pl. Jupiter holdjainak látszólagos mozgása, változó csillagok, napfoltok),

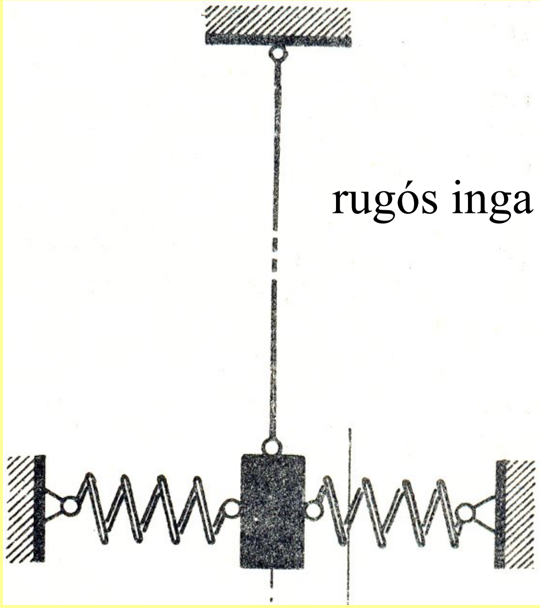
  atom- és molekula fizikában, stb.

- **A rezgések néhány fontos alkalmazása:**
  - Időmérés.
  - Épületek, hidak, járművek tervezése.
  - Földrengések (rezgések) regisztrálása.
  - Hangtan (hangszerek, hangterjedés, stb.)
  - Telekommunikáció (telefon, rádió, televízió, stb.)
  - Orvosi alkalmazások (ultrahang, CT, PET, stb.)
  - Űrkutatás (pl. tömegmérés!)

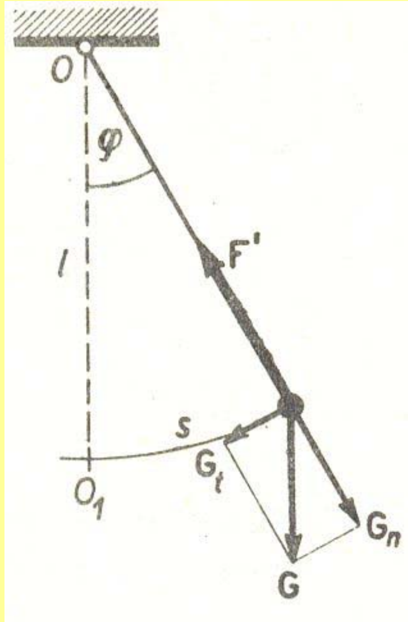
Néhány példa rezgést végző fizikai rendszerre



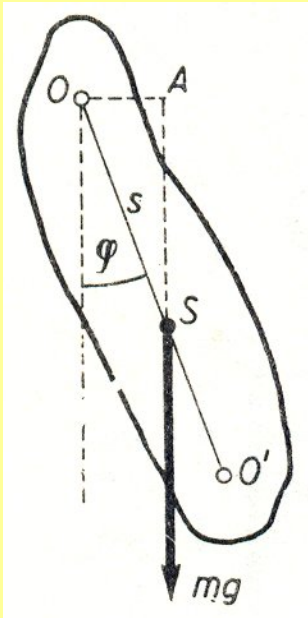
rugó-tömeg rendszer



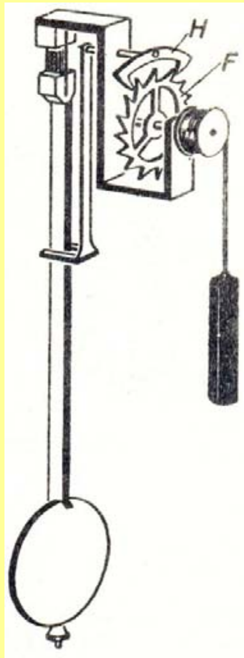
rugós inga



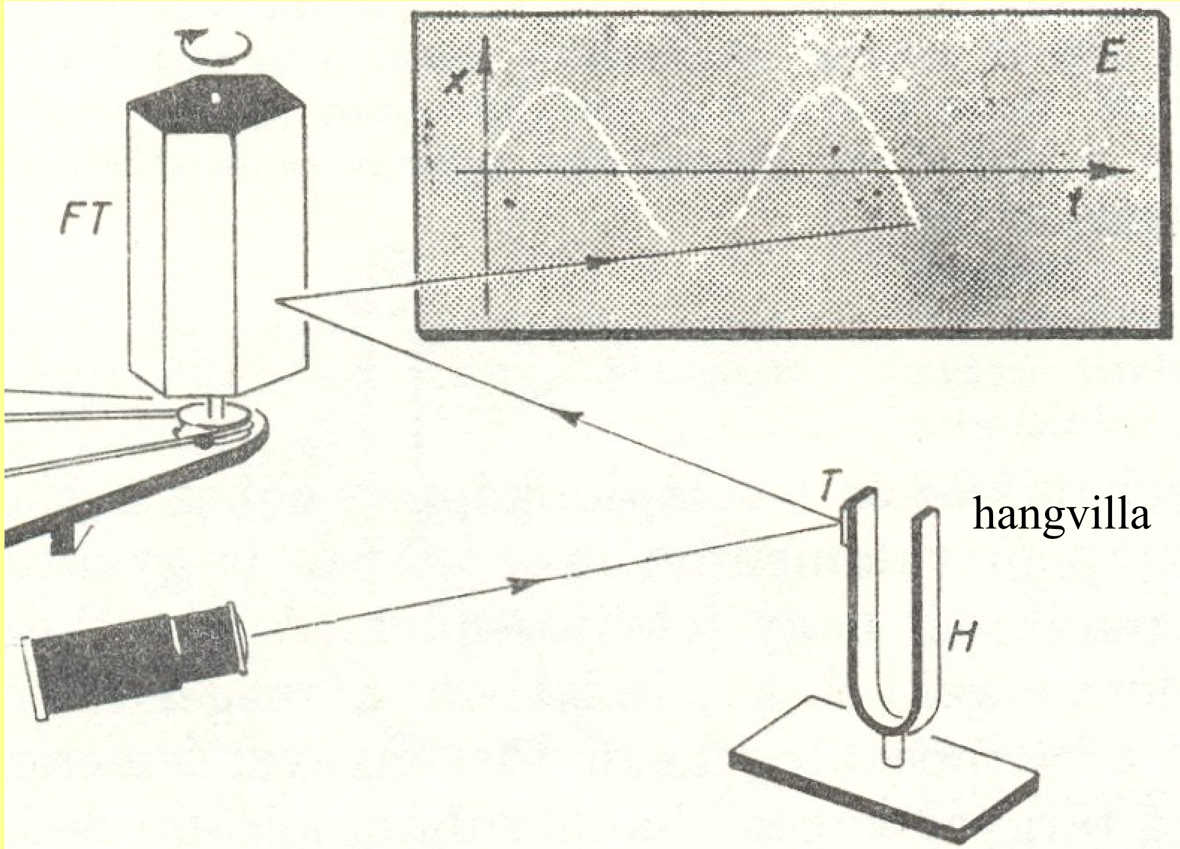
matematikai inga



fizikai inga

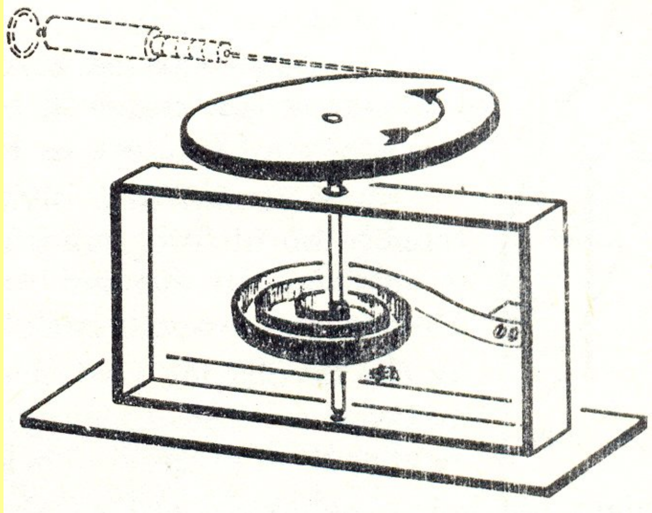


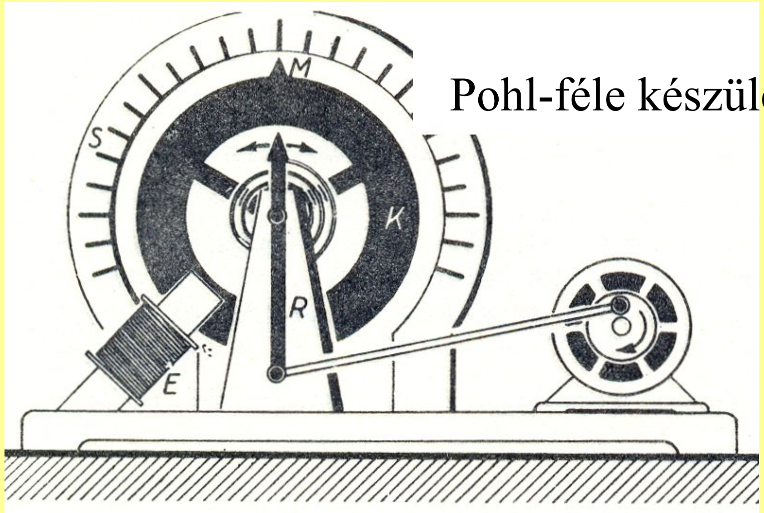
ingaóra



hangvilla

torziós inga



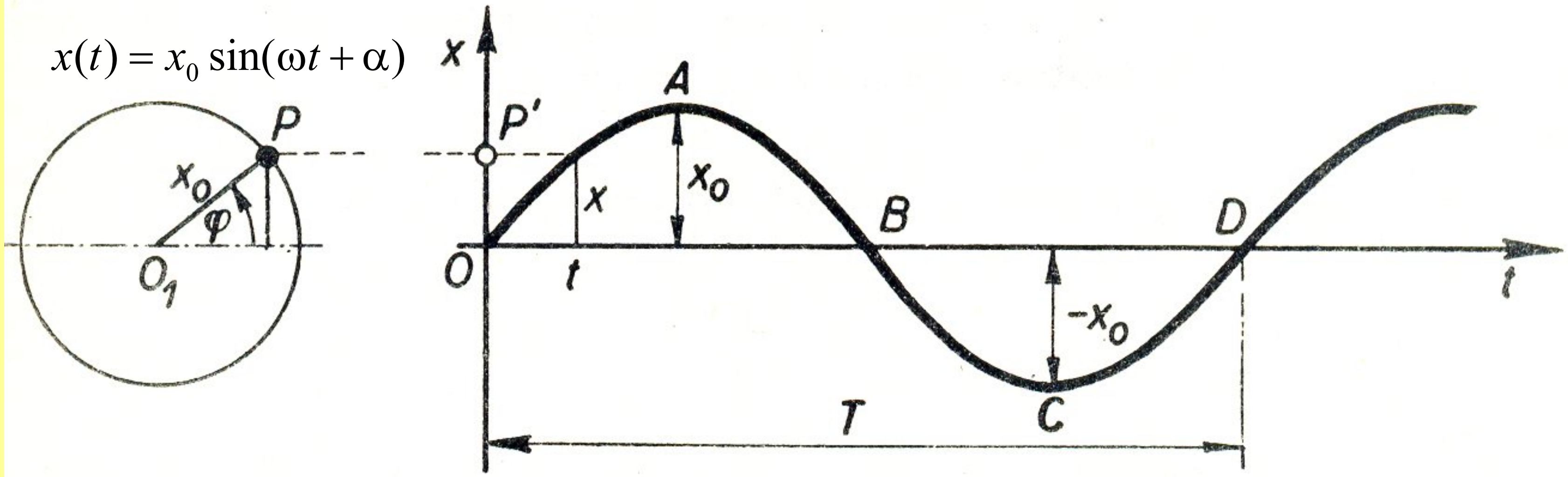


Pohl-féle készülék

- Az előbbi rendszerek mindegyike példa lehet harmonikus és anharmonikus rezgésre is!
- A rezgés többnyire kis kitérésekre jó közelítéssel harmonikus, nagyobb kitérésekre anharmonikus.
- Az anharmonikus rezgések periódus ideje függ az amplitúdótól!

A harmonikus rezgés az egyenletes körmozgás vetülete

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \alpha)$$



8,3. ábra

Következmény: egy harmonikus rezgés egy egyenletesen forgó vektorral szemléltethető!

Harmonikus rezgések összetevése

- Gyakori, hogy egy adott fizikai mennyiség két (vagy több) hatás következtében rezeg.
- Az együttes hatás következtében kialakult rezgés megegyezik a hatások által egyenként létrehozott rezgések összegével.
- Ez az un. **szuperpozíció elve**, amely lényeges szerepet játszik a fizika számos területén!

Két fontos alesetet különböztetünk meg:

- azonos irányú harmonikus rezgések összetevése,
- egymásra merőleges irányú harmonikus rezgések összetevése.

Azonos irányú harmonikus rezgések összetevése

$$y_1(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$y_2(t) = a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$ milyen rezgés?

- **Egyenlő frekvenciájú eset**, azaz $\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

$$\boxed{y(t) = a \sin(\omega t + \alpha)}$$, ahol

$$\boxed{a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}}$$

Két azonos irányú és azonos frekvenciájú harmonikus rezgés összege szintén ugyanolyan frekvenciájú harmonikus rezgés, amelynek amplitúdóját és kezdőfázisát a két összeadott rezgés amplitúdója és kezdőfázisa határozza meg az előző formulákkal leírt módon.

Szemléltetés: oszcilloszkóppal **Igazolás:** forgó vektorokkal

$I. \quad y_1(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$

$II. \quad y_2(t) = a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$

$\boxed{III. \quad y(t) = a \sin(\omega t + \alpha)}$

I+II – III együtthatóiból

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2}{a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2}}$$

$I^2+II^2 - III^2$ együtthatóiból

$$\boxed{a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}}$$

Adott amplitúdók esetén mikor ***maximális*** és ***minimális*** az eredő rezgés amplitúdója?

- rögzített a_1 és a_2 esetén az a amplitúdó értékét a két rezgés $\boxed{\delta = \alpha_2 - \alpha_1}$ fáziskülönbsége határozza meg, ugyanis

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\delta} \quad \Rightarrow \quad |a_1 - a_2| \le a \le a_1 + a_2$$

$\cos\delta = -1$ $\qquad$ $\cos\delta = 1$

- *A maximális erősítés feltétele*: $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots, 2m\pi, \ldots$, vagyis a rezgések fázisa azonos!
- *A maximális gyengítés feltétele*: $\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots, (2m+1)\pi, \ldots$, vagyis a rezgések fázisa ellentétes!

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

- **Különböző frekvenciájú eset** $(\omega_1 \neq \omega_2)$ $x = a_1 \cos\omega_1 t + a_2 \cos(\omega_2 t + \delta)$
  - ***A frekvenciák aránya racionális szám***, azaz $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$, ahol n_1 és n_2 pozitív, relatív prím egészek.

    Belátható, hogy a két rezgés összege olyan ***periodikus*** folyamatot eredményez, melynek

    $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ a körfrekvenciája $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ a periódus ideje.

    $x = a_1 \cos n_1 \omega t + a_2 \cos(n_2 \omega t + \delta)$ az amplitudója

  - ***A frekvenciák aránya irracionális szám.***

    Belátható, hogy a két rezgés összege ***nem periodikus*** folyamat.

  - ***Lebegés*****:** Szemléltetés hangvillákkal

    A két rezgés frekvenciáinak eltérése sokkal kisebb, mint az összegük: $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$

    Az amplitudók megegyeznek: $a = a_1 = a_2$

    Az eredő amplitudó: $x = a\left[\cos\omega_1 t + \cos(\omega_2 t + \delta)\right] =$

    $$2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\delta}{2}\right)$$

    A lebegés frekvenciája az amplitudó ingadozások frekvenciája:

    $$\omega_l = 2\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \qquad \boxed{\nu_l = |\nu_1 - \nu_2|}$$

    Igazolása Excell szimulációval

Egymásra merőleges harmonikus rezgések összetevése

$$x(t) = a\sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$y(t) = b\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

- **Egyenlő frekvenciájú eset**, ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$).

$$x(t) = a\cos(\omega t) \qquad\qquad y(t) = b\cos(\omega t + \delta)$$

$$\frac{y}{b} = \cos\omega t\cos\delta - \sin\omega t\sin\delta = \frac{x}{a}\cos\delta - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sin\delta$$

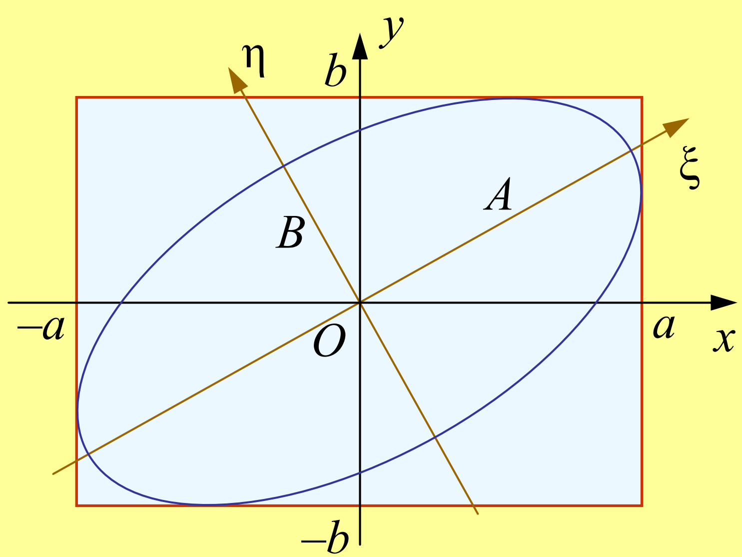
$$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\delta\right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2\delta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta = \sin^2\delta}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} = 1$$

ellipszis egyenlete!



A két rezgés összege ellipszisben poláros rezgés.

Speciális esetek

- lineárisan poláros rezgés ($\delta = 0; \pi$)
- körben poláros rezgés ($a = b$ és $\delta = \pi/2; 3\pi/2$)

- **Különböző frekvenciájú eset**

  A pont az un. ***Lissajous-féle görbéken*** mozog.

  Közeli frekvenciák esetében:

  $x = a\cos\omega_1 t, \quad y = b\cos(\omega_2 t + \delta) = b\cos(\omega_1 t + \varepsilon t + \delta)$

- Ha **a frekvenciák aránya racionális szám**, a görbe záródik (periodikus mozgás).
- Ha **a frekvenciák aránya irracionális szám**, a görbe nem záródik (nem periodikus).

Rezgések felbontása harmonikus rezgésekre

- Az olyan egyirányú harmonikus rezgések összege, amelyek körfrekvenciái egy ω körfrekvencia egész számú többszörösei, periodikus folyamatot eredményeznek.
- A rezgés periódusa a legkisebb frekvenciájú harmonikus rezgés periódusával egyezik meg.
- Igaz-e az állítás megfordítása?

Fourier tétele

Általában bármilyen periodikus folyamat ($f(t) = f(t+T)$ $\forall t$-re) egyértelműen előállítható olyan, megfelelő amplitúdójú és fázisú harmonikus rezgések összegeként, melyek körfrekvenciái a rezgés körfrekvenciája és ennek egész számú többszörösei:

$$\boxed{f(t) = A_0 + A_1\sin(\omega t + \alpha_1) + A_2\sin(2\omega t + \alpha_2) + \ldots + A_n\sin(n\omega t + \alpha_n) + \ldots}\quad \text{, ahol} \quad \omega = 2\pi/T$$

A matematikusok sokszor a következő alakban szokták felírni:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) + (a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t) + \ldots + (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) + \ldots$$

- **A rezgés színképének fogalma**

A rezgés Fourier-féle felbontásában szereplő összetevők amplitúdóinak és fázisainak grafikus ábrázolása a frekvencia függvényében.