A rezgések dinamikai vizsgálata, a rezgések kialakulásának feltételei

Mozgásegyenlet: $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$

kezdeti feltételek: $x_0 = x(t_0)$

$$v_0 = \dot{x}_0 = v(t_0) = \dot{x}(t_0)$$

Az $F = F(x)$ erőtér akkor **konzervatív,**
ha létezik U(x) skaláris potenciálfüggvény.

Helyzeti energia: $U(x) = -\int_{x_e}^{x} F(\xi)\, d\xi$

$$F(x) = -U'(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Rezgés kialakulásához szükséges:

- x_e egyensúlyi helyzet megléte, azaz

$$F(x_e) = 0$$

- x_e egyensúlyi helyzet stabilitása, vagyis

  az erő egyensúlyi helyzet környezetében, az egyensúlyi helyzet felé mutat.

A potenciális energiával megfogalmazva:

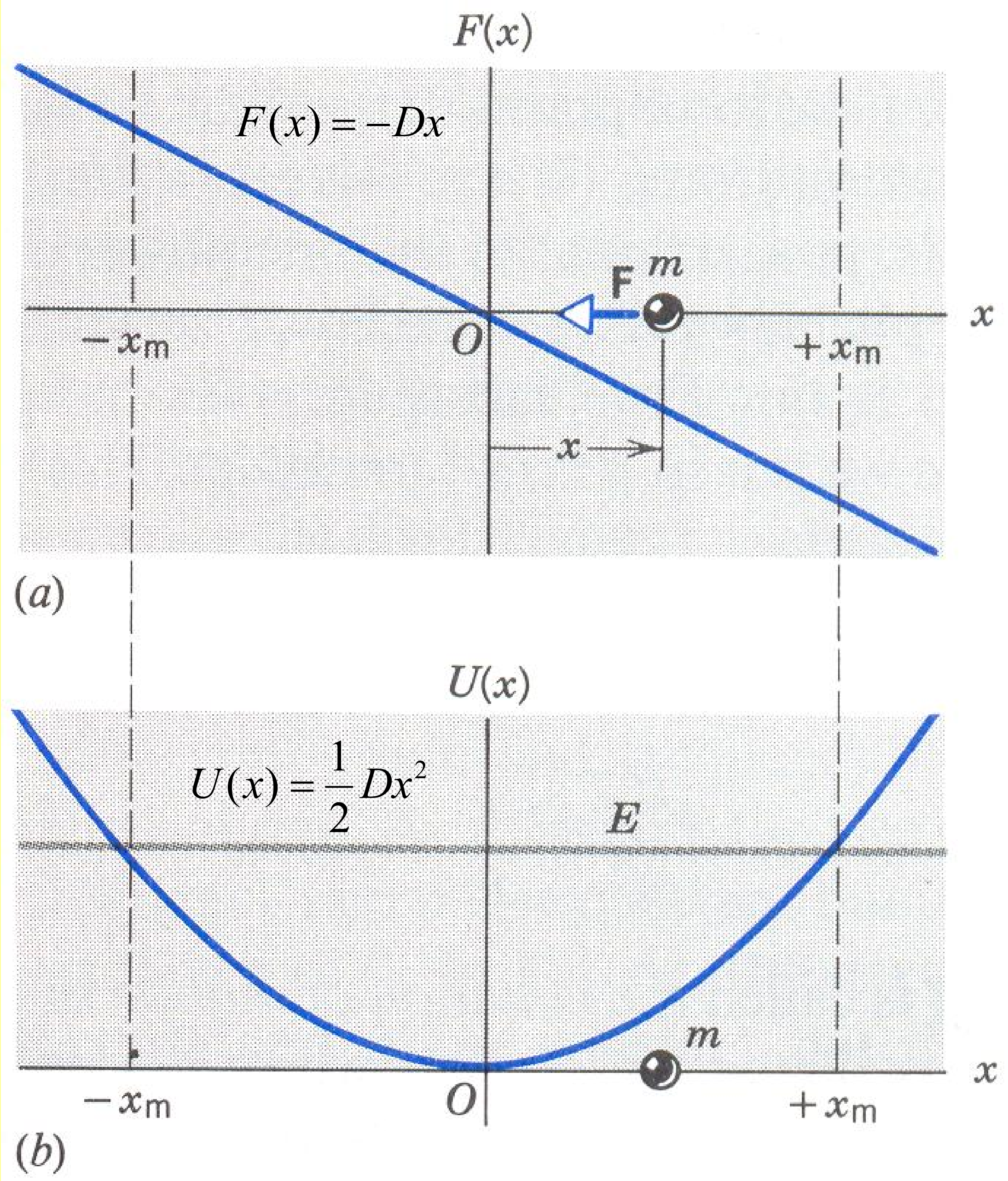
- Rezgés akkor jön létre, ha $U(x)$-nek (lokális) minimuma van

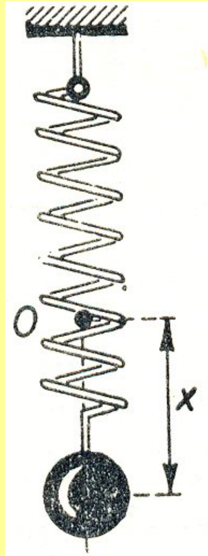
A mechanikai energia megmarad: $K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E$

Ez a $t = t_0$–kor is igaz, így a teljes energiát a kezdeti feltételek meghatározzák:

$$E = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0)$$

Harmonikus rezgés dinamikai leírása





Mozgásegyenlet:

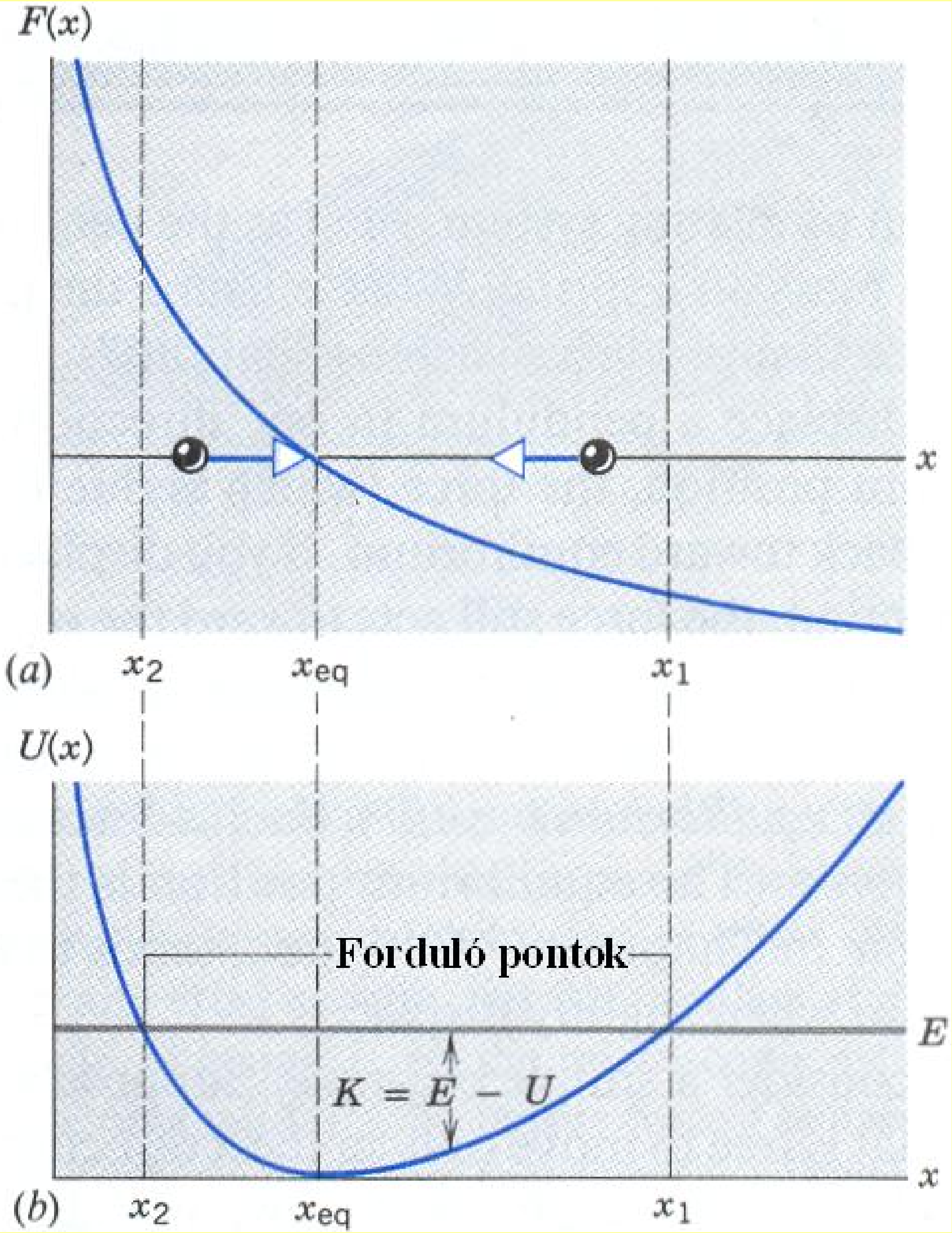
$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0,} \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

a harmonikus rezgés differenciálegyenlete

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)}$$

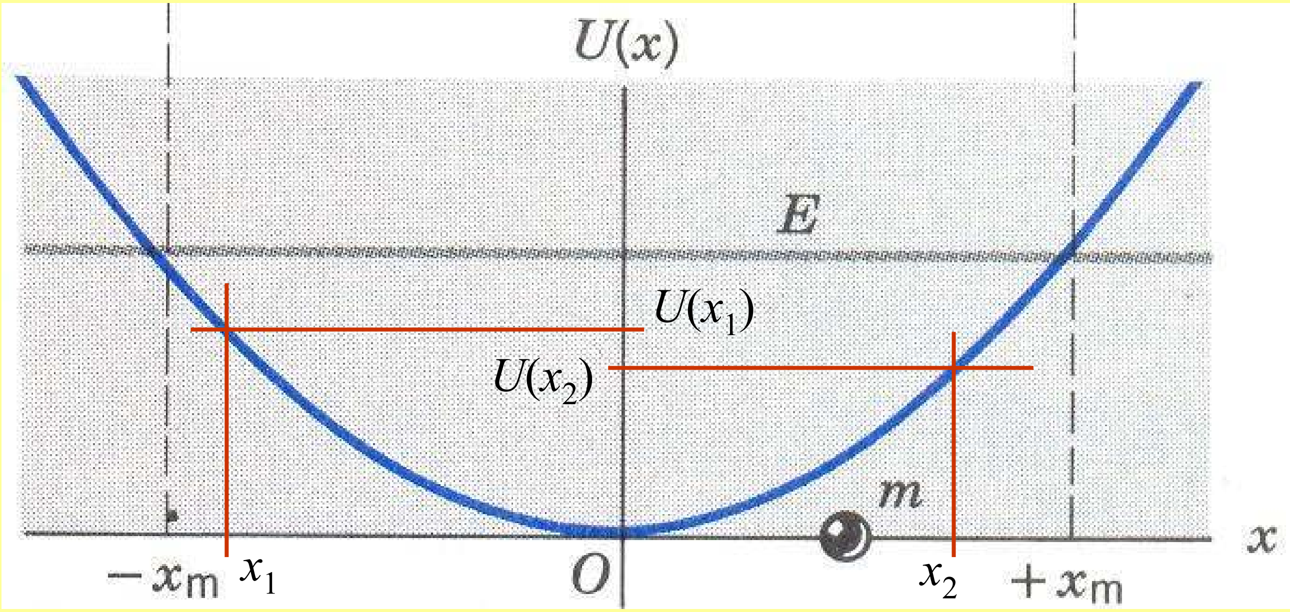
Az A és α állandókat a kezdeti feltételek határozzák meg.



A molekulákat összetartó erők és potenciális energiájuk

- Az egyensúlyi helyzet körüli kis kitérésekre az erő egyenessel, a potenciális energia parabolával közelíthető.
- Ezért kis kitérésekre a rezgés jó közelítéssel harmonikus rezgés
- Nagyobb kitérésekre anharmonikus rezgés alakul ki.

A súrlódás hatása: csillapodó rezgés



x_1 és x_2 két egymást követő fordulópont. ⇨ $v_1 = \dot{x}_1 = 0$ és $v_2 = \dot{x}_2 = 0$

Munkatétel: $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \sum W$ ⇨ $0 = W_F + W_S$ ⇨ $W_S = -W_F$

A súrlódási erő munkája mindig negatív: ⇨ $W_S < 0$

A rugalmas erő munkája kifejezhető $U(x)$-l: ⇨ $W_F = U(x_1) - U(x_2)$

⇨ $U(x_2) - U(x_1) < 0$

$U(x_2) < U(x_1)$

A maximális kitérés csökken az idővel, csillapodás lép fel. ⇦ $|x_2| < |x_1|$

A sebességgel arányos csillapító erő

A tömegpontra ható erők: $\underbrace{F=-Dx,}_{\text{rugalmas erő}}$ $\underbrace{F_S=-k\dot{x}}_{\text{súrlódási erő}}$

Mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x}=F+F_S=\ -Dx-k\dot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0,}$$ ahol $\omega_0=\sqrt{\dfrac{D}{m}}$ és $\beta=\dfrac{k}{2m}$

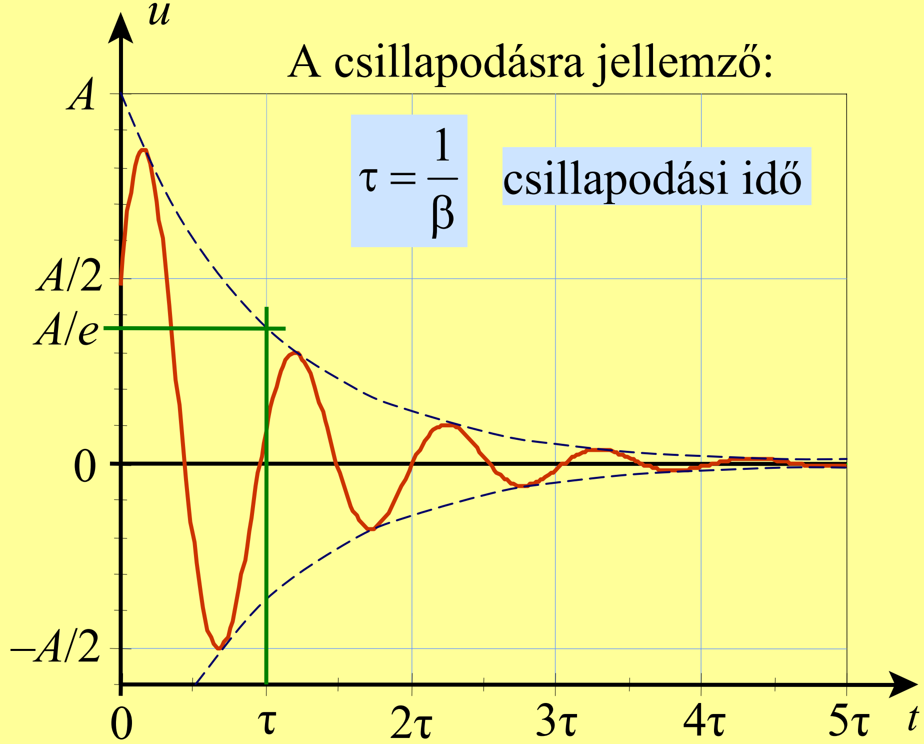
Az egyenlet megoldásainak típusai

- $\beta>\omega_0$ esetén aperiodikus mozgás $x(t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$, $\lambda_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}<0$
- $\beta=\omega_0$ esetén aperiodikus határeset $x(t)=c_1e^{-\beta t}+c_2te^{-\beta t}$,
- $\beta<\omega_0$ esetén csillapodó rezgés $x(t)=c_1e^{-\beta t}\cos\omega t+c_2e^{-\beta t}\sin\omega t$

$$\boxed{x(t)=Ae^{-\beta t}\sin(\omega t+\alpha),}$$

ahol $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$

Az A és α állandókat a kezdeti feltételek határozzák meg.



A csillapodásra jellemző:

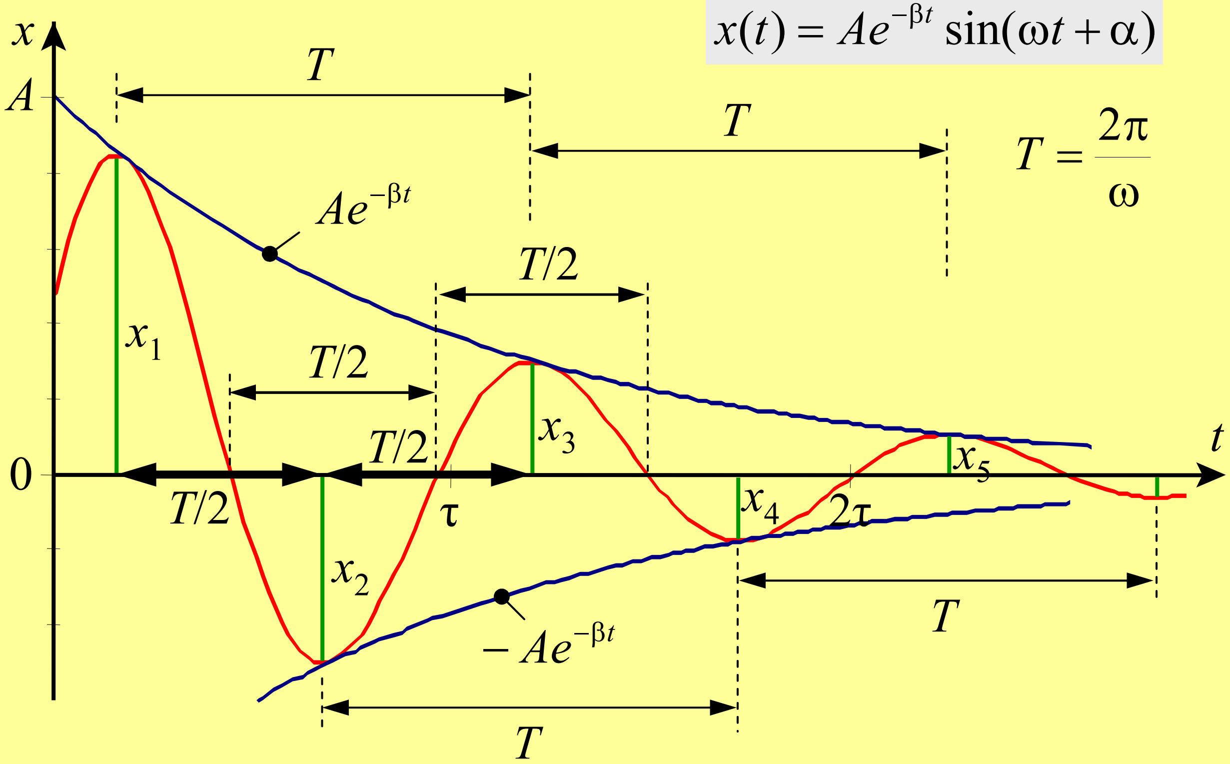
$\tau=\dfrac{1}{\beta}$ csillapodási idő

A csillapodó rezgés tulajdonsági és jellemző mennyiségei

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \alpha)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- A csillapodás mértékét a β **csillapítási állandó** és a $\tau = 1/\beta$ **csillapodási idő** jellemzi.
- A maximális kitérések és a burkoló érintési helyei $T/2$ időközönként követik egymást.
- Az egyensúlyi helyzeten $T/2$ időnként halad át.
- Az egyensúlyi helyzetből a maximumig azonban $T/4$-nél rövidebb, a maximumtól a egyensúlyi helyzetig $T/4$-nél hosszabb idő telik el.



- A szomszédos azonos oldali maximális kitérések hányadosa állandó. Ez a K hányados a **csillapodási hányados**:

$$\boxed{K = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x_3}{x_5} = \ldots = \frac{x_{2k-1}}{x_{2k+1}}} \quad \text{és} \quad \boxed{K = \frac{x_2}{x_4} = \frac{x_4}{x_6} = \ldots = \frac{x_{2k}}{x_{2k+2}}}$$

- **Logaritmikus dekrementum:** $\boxed{\Lambda = \ln K}$

$$K = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x(t_1)}{x(t_1+T)} = \frac{Ae^{-\beta t_1}\sin(\omega t_1 + \alpha)}{Ae^{-\beta(t_1+T)}\sin[\omega(t_1+T)+\alpha]} = e^{\beta T} \Rightarrow \boxed{\Lambda = \beta T}$$

Kényszerrezgés, rezonancia

- A rezgő rendszerre rugalmas erőn és a sebességgel arányos súrlódási erőn kívül még egy külső zavaró, periodikus erő is hat:

$$\underbrace{F=-Dx,}_{\text{rugalmas erő}} \qquad \underbrace{F_S=-k\dot{x},}_{\text{súrlódási erő}} \qquad \underbrace{F_G=F_0\sin\omega t.}_{\text{gerjesztő erő}}$$

Mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x}=F+F_S+F_G=\;-Dx-k\dot{x}+F_0\sin\omega t \;\Rightarrow\; \boxed{\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=a_0\sin\omega t,} \quad \text{ahol}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{D}{m}}, \qquad \beta=\frac{k}{2m} \qquad \text{és} \qquad a_0=\frac{F_0}{m}$$

Kísérleti szemléltetés

•Tömeg-rugó rendszer

•Pohl-féle készülék

•Ingák

Az egyenlet megoldása:

$$\boxed{x(t)=A\sin(\omega t-\delta)+x_{cs}(t)}$$

- A csillapodó rezgés differenciálegyenletének megoldása, bizonyos idő után elhanyagolható (tranziens jelenségek).
- Állandósult rezgés,
  - frekvenciája megegyezik a gerjesztés frekvenciájával!
  - Az amplitúdó és a fáziskésés függ a gerjesztés frekvenciájától

$$\boxed{A=\frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}} \qquad \boxed{\mathrm{tg}\,\delta=\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

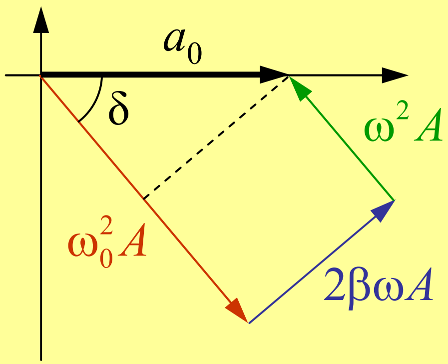
A megoldás meghatározása forgó vektorokkal

Ha $x(t) = A\sin(\omega t - \delta)$, akkor

$$\dot{x}(t) = A\omega\cdot\cos(\omega t - \delta) = A\omega\cdot\sin(\omega t - \delta + \pi/2)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cdot\sin(\omega t - \delta) = A\omega^2\cdot\sin(\omega t - \delta + \pi)$$

Az $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin\omega t$ bal oldalán harmonikus rezgések összege áll, amely forgó vektorokkal szemléltethető!



$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{2\beta\omega A}{A\omega_0^2 - A\omega^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Pitagorasz-tétel:

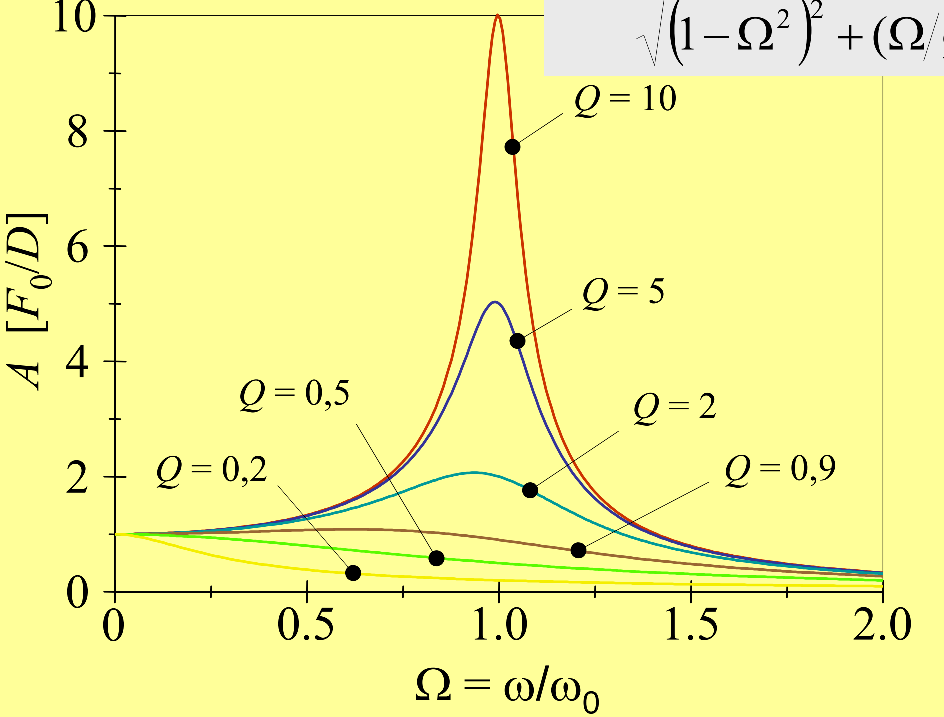
$$a_0^2 = (A\omega_0^2 - A\omega^2)^2 + (2\beta\omega A)^2$$

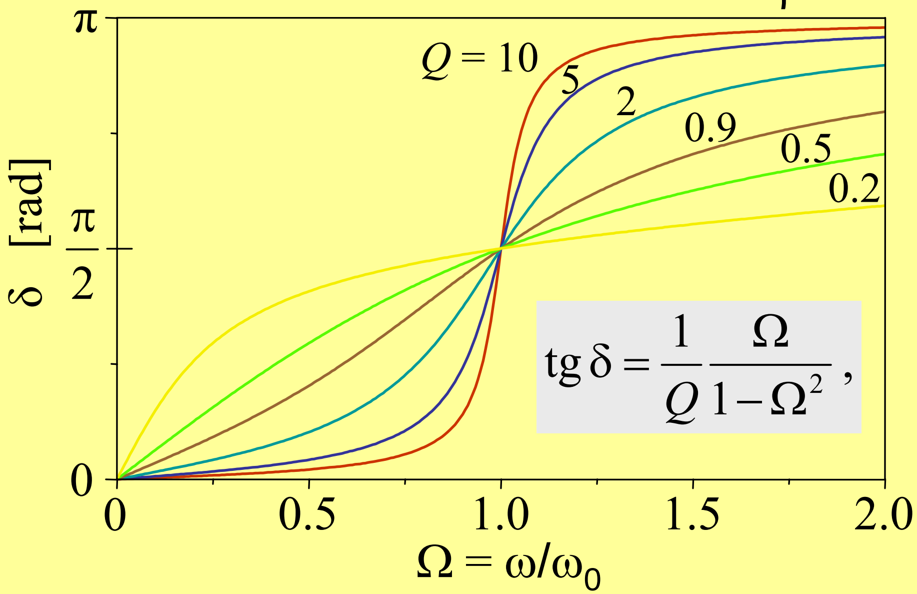
$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Rezonanciagörbe

$$A = \frac{F_0/D}{\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2 + (\Omega/Q)^2}},$$

ahol $\Omega = \omega/\omega_0$, $Q = \dfrac{\omega_0}{2\beta}$





$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{1}{Q}\frac{\Omega}{1-\Omega^2},$$

Rezonancia katasztrófa

Az előző kísérletek és a számolás is azt mutatja, hogy rezonancia esetén még az igen kicsi gerjesztés is igen nagy amplitúdójú rezgésekre kényszerítheti a rendszert.

Ezt a jelenséget épületek, hidak és járművek (stb) tervezésénél figyelembe kell venni!

Ilyen külső gerjesztő hatásként léphetnek fel például

- a szél következtében periodikusan leváló örvények,
- földrengés során a talaj rezgései, stb.

Tacoma-híd [2:31]

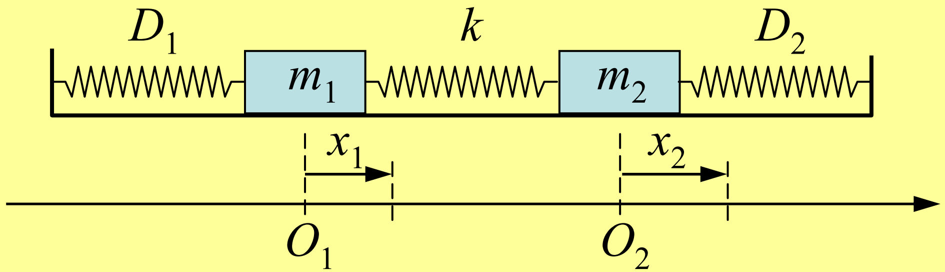
A kényszerrezgések fontosabb alkalmazásai

- igen kicsi hatások kimutatása (pl. Eötvös-effektus),
- rezgések frekvenciájának meghatározása (pl. nyelves frekvenciamérő),
- sajátrezgések kimutatása és sajátfrekvenciák meghatározása,
- rezgések regisztrálása,
- földrengések regisztrálása (szeizmográf).

Csatolt rezgések

Kísérlet kiskocsikkal ($m_1 \neq m_2$) [0:37]

Hogyan magyarázhatjuk a bonyolult mozgást?

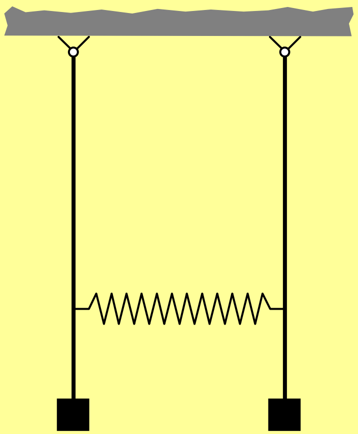


Mozgásegyenletek

$$m_1 \ddot{x}_1 = -D_1 x_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -D_2 x_2 - k(x_2 - x_1)$$

Kísérlet kettős-ingával [0:41]



Ekkor a jelenség tanulmányozása egyszerűbb, mivel

- a két csatolt rezgő rendszer teljesen azonos,
- a csatolás gyengébb.

a mozgásegyenletek egyszerűsödnek

$$m_1 = m_2 = m \qquad D_1 = D_2 = D$$

A kísérlet értelmezése

- Az ingák mozgása lebegés!
- Ez azt mutatja, hogy egyszerre végeznek két különböző, de közeli frekvenciájú harmonikus rezgést, hiszen a lebegés két ilyen rezgés összege.
- A kezdeti feltételek *megfelelő* megválasztásával elérhetjük, hogy a két rezgés közül csak az egyik mutatkozzon meg.

Szemléltetés

Azonos fázisú sajátrezgés

Ellentétes fázisú sajátrezgés

A mozgásegyenletek megoldása azonos oszcillátorok esetén

$$m\ddot{x}_1 = -D x_1 - k(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -D x_2 - k(x_2 - x_1)$$

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -D x_1 - D x_2$$
$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -D x_1 + D x_2 - k(x_1 - x_2) + k(x_2 - x_1)$$

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{D}{m}(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0, \text{ ahol } q_1 = x_1 + x_2 \text{ és } \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{D+2k}{m}(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0, \text{ ahol } q_2 = x_1 - x_2 \text{ és } \omega_2 = \sqrt{\frac{D+2k}{m}}$$

$$q_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$q_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

q_1 és q_2 az un. normál-koordináták

$$x_1 = (q_1 + q_2)/2$$
$$x_2 = (q_1 - q_2)/2$$

$$x_1(t) = \frac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$
$$x_2(t) = \frac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \frac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

- Tehát, a tömegpontok mozgása két harmonikus rezgés összege.
- Ha a csatolás gyenge ($k \ll D$), akkor a két frekvencia közeli, így lebegés jön létre.
- Hogyan érhetjük el, hogy a mozgásban csak az egyik rezgés jelenjen meg?

- A q_1-hez vagy q_2-höz tartozó rezgés eltűnéséhez nyílván $A_2 = 0$ vagy $A_1 = 0$ szükséges.
- $A_2 = 0$ esetén csak az ω_1 körfrekvenciájú rezgés van jelen.

$$A_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} q_2(0) = x_1(0) - x_2(0) = 0 \\ \dot{q}_2(0) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x_1(0) = x_2(0) \\ v_1(0) = v_2(0) \end{matrix}$$

$$x_1(t) = (A_1/2) \cdot \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$
$$x_2(t) = (A_1/2) \cdot \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

Azaz mindkét tömegpont ω_1 körfrekvenciájú – vagyis azonos frekvenciájú – harmonikus rezgést végez és a rezgések fázisa megegyezik!

- $A_1 = 0$ esetén viszont csak az ω_2 körfrekvenciájú rezgés jelenik meg!

$$A_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} q_1(0) = x_1(0) + x_2(0) = 0 \\ \dot{q}_1(0) = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} x_1(0) = -x_2(0) \\ v_1(0) = -v_2(0) \end{matrix}$$

$$x_1(t) = (A_2/2) \cdot \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$
$$x_2(t) = -(A_2/2) \cdot \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Azaz mindkét tömegpont ω_2 körfrekvenciájú – vagyis azonos frekvenciájú – harmonikus rezgést végez és a rezgések fázisa ellentétes!

Sajátrezgések

a rezgő rendszer azon rezgései, mikor a rendszer minden tagja azonos frekvenciájú harmonikus rezgést végez azonos vagy ellentétes fázisban.

- A sajátrezgések frekvenciáit sajátfrekvenciáknak nevezik.
- Megmutatható, hogy általában egy f szabadági fokú rendszernek f darab sajátrezgése van. A rendszer általános mozgása ezek szuperpozíciója.

Belátható, hogy a rezgő rendszer mechanikai energiája a sajátrezgések energiáinak összege.

harmonikus rezgés energiája: $$E=\frac{1}{2}m\,v^2+\frac{1}{2}D\,x^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\omega^2x^2\right)$$

A vizsgált rendszer energiája $$E=\frac{1}{2}m_1\,v_1^2+\frac{1}{2}m_2\,v_2^2+\frac{1}{2}D_1\,x_1^2+\frac{1}{2}D_2\,x_2^2+\frac{1}{2}k\,(x_1-x_2)^2$$

$m_1=m_2=m$

$D_1=D_2=D$

esetén $$E=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right]+\frac{1}{2}D\left[x_1^2+x_2^2\right]+\frac{1}{2}k\,(x_1-x_2)^2$$

Az energiát megadó képletbeli mennyiségeket kifejezhetjük a normálkoordinátákkal:

$$\left.\begin{aligned}q_1&=x_1+x_2\\ q_2&=x_1-x_2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}x_1&=(q_1+q_2)/2\\ x_2&=(q_1-q_2)/2\end{aligned}\right.$$

$$x_1^2+x_2^2=\frac{q_1^2+2q_1\,q_2+q_2^2}{4}+\frac{q_1^2-2q_1\,q_2+q_2^2}{4}=\frac{q_1^2+q_2^2}{2}$$

$$\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2=\frac{\dot{q}_1^2+2\dot{q}_1\,\dot{q}_2+\dot{q}_2^2}{4}+\frac{\dot{q}_1^2-2\dot{q}_1\,\dot{q}_2+\dot{q}_2^2}{4}=\frac{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}{2}$$

$$E=\frac{1}{2}m\,\frac{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}{2}+\frac{1}{2}D\,\frac{q_1^2+q_2^2}{2}+\frac{1}{2}k\,q_2^2=\frac{1}{2}\,\frac{m}{2}\left[\dot{q}_1^2+\frac{D}{m}\,q_1^2\right]+\frac{1}{2}\,\frac{m}{2}\left[\dot{q}_2^2+\frac{D+2k}{m}\,q_2^2\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{E=\frac{1}{2}\,\mu_1\left[\dot{q}_1^2+\omega_1^2q_1^2\right]+\frac{1}{2}\,\mu_2\left[\dot{q}_2^2+\omega_2^2q_2^2\right]}$$

Általánosabban f szabadsági fokú rendszer esetén: $$\boxed{E=\sum_{i=1}^{f}\frac{1}{2}\,\mu_i\left(\dot{q}_i^2+\omega_i^2\,q_i^2\right)}$$