Fizika mérnök informatikusoknak 1.
FBNxE-1

Mechanika 4. előadás

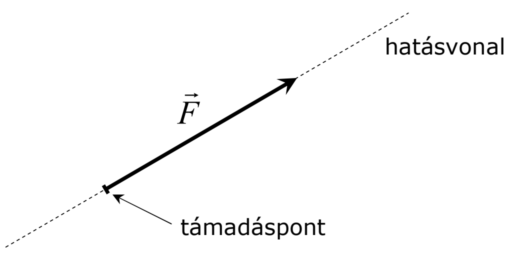
Dr. Geretovszky Zsolt

2010. szeptember 29.

Ismétlés

Elmozdulások függetlenségének elve
Bolygómozgás (Kepler törvények)

Dinamika
- Newton axiómái (I., II., III.) + Stevin tétele
- A mozgásegyenlet és megoldása
  - a lineáris erő hatása alatt mozgó test (harmonikus rezgőmozgás), numerikus és analitikus megoldás
  - a bolygómozgás numerikus modellezése
- Erőtörvények, gravitáció törvénye (Cavendish-kísérlet)
- Súlyos és tehetetlen tömeg, Eötvös Loránd munkássága



Megmaradási törvények, szimmetriák

Szimmetria	Megmaradó mennyiség
Térbeli eltolás	Impulzus
Elforgatás	Impulzusmomentum
Időbeli eltolás	Energia

A megmaradási törvények felismerésének eszköze **az időbeli derivált**.

Alaptételek tömegpontra 1.

A tömegpont *impulzusának* bevezetése:

$$\vec{I} = m\vec{v}$$

Az impulzustétel:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{I}}{dt} = m\vec{a}$$

Ha $\vec{F} = 0$, akkor $\frac{d\vec{I}}{dt} = 0$

ami ekvivalens azzal, hogy $\vec{I} = áll.$ (időben nem változik)

Ha a tömegpontra ható erők eredője zérus, akkor a tömeg-pont impulzusa megmarad. (*impulzusmegmaradás tétele*)

Erőlökés:

$$\frac{\Delta\vec{I}}{\Delta t} = \vec{F} \longrightarrow \Delta\vec{I} = \vec{I}_2 - \vec{I}_1 = \left(\int_0^\tau \vec{F}dt\right) \approx \vec{F}\tau$$

ahol τ a kölcsönhatás ideje

Alaptételek tömegpontra 2.

A tömegpont *impulzusmomentumá*nak (régiesen impulzusnyomaték) bevezetése*:*

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{I} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

jobbkéz-szabály: $\vec{h} = \vec{m} \times \vec{k}$

hüvelyk mutató középső

Egy $\vec{F}$ erő O *pontra vonatkozó forgatónyomatéka*:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ahol az $\vec{r}$ vektor az O pontból az $\vec{F}$ erő támadáspontjába mutató vektor

Az impulzusmomentum-tétel:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{N}}{dt}$$

Ha $\vec{M} = 0$, akkor $\frac{d\vec{N}}{dt} = 0$

ami ekvivalens azzal, hogy $\vec{N} = áll.$

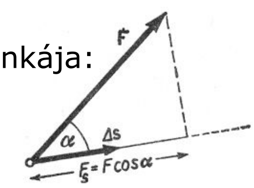
Ha a tömegpontra ható erők (forgató)nyomatéka zérus, akkor a tömegpont impulzusmomentuma megmarad. (*impulzusmomentum megmaradásának tétele*)

Egy kis kitérő ...

A munka

Az egyenes pályán mozgó pontszerű testre ható állandó erő munkája:

$$W = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\alpha = \vec{F}\Delta\vec{r} = F_s\Delta s$$



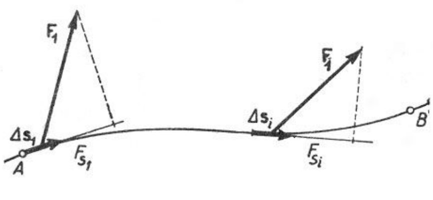
A munka lehet pozitív, negatív és nulla is!

A munka fogalmának általánosítása:

a mozgás *i*-edik szakaszán az ún. elemi munka

$$\Delta W_i = \left|\vec{F}_{\Delta r,i}\right|\left|\Delta\vec{r}_i\right| = F_{s,i}\Delta s_i$$

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F_{s,i}\Delta s_i \qquad W = \int_A^B F_s(s)ds$$



Néhány erőfajta munkája:

nehézségi erő: $W = mg\Delta h$

rugóerő: $W = \frac{1}{2}D\Delta x^2$

kényszererő: ha a kényszererő merőleges a sebességre, akkor 0

A teljesítmény

Valamely erő teljesítménye:

$$P = \frac{W}{t}$$ ha W nem arányos t-vel, akkor átlag teljesítmény

Pillanatnyi teljesítmény:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \left(= \frac{dW}{dt} \right)$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F}\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}\vec{v}$$

Az energia

Egy meghatározott *A* állapotban lévő tesz vagy rendszer energiával rendelkezik akkor, ha alkalmas körülmények közöt munkavégzésre képes. Energiáját azzal a munkával mérjük, amelyet a test végez, míg az *A* állapotból egy megállapodás szerint választott A_0 állapotba jut, vagy azzal a munkával, amelyet a testre ható erők ellenében végeznünk kell, míg a testet A_0-ból az *A* állapotba juttatjuk.

Mivel a testnek pl. a padlón nyugvó (A_0) helyzetből a *h* magasságba történő viteléhez *mgh* emelési munkát kell végezzünk, így a *h* magasságban levő *m* tömegű testnek súlyából származó helyzeti (vagy potenciális) energiája:

$$E_{pot} = mgh$$

(Kísérlet: szög beverés a leejtett test munkája révén colop_rudugro.mpg 2:10-***)***

A mozgó testeknek sebességük révén meglévő munkavégző képességét *mozgási vagy kinetikai energiá*nak nevezzük, melynek mértéke az *m* tömegű, kezdetben nyugvó test *v* sebességre való felgyorsításához szükséges munka:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

Alaptételek tömegpontra 3.

EVEV mozgást végző testre hasson állandó eredő erő:

$$W = F_s s = mas = m\frac{v_2 - v_1}{t}\frac{v_2 + v_1}{2}t = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Mozgási, vagy kinetikai energia:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

A tömegpont mozgási energiájának megváltozása egyenlő a tömegpontra ható erők eredőjének munkájával. (*munkatétel, vagy kinetikai energia tétele*)

$$\Delta E_{kin} = W$$

Konzervatív erő: minden olyan, időben változatlan erő, melynek két tetszőleges pontot összekötő görbék mentén végzett munkája független a görbétől, csak a kezdő- és végpont helyzeteitől függ.

Ha a tömegpontra ható erők eredője konzervatív erő, akkor a tömegpont kinetikai (mozgási) és potenciális (helyzeti) energiájának összege, azaz a tömegpont teljes mechanikai energiája állandó. (*a mechanikai energia megmaradásának tétele*)

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{mechanikai} = állandó$$

(Kísérlet: fonálinga helyzeti energia átalakulása mozgásivá http://techtv.mit.edu/videos/1491-potential-energy-to-kinetic-energy***)***

Pontrendszerek

Lehet

szabad pontrendszer, pl. Naprendszer

kötött pontrendszer, pl. súlyzómodell

(a tömegpontok mozgását valamiféle geometriai természetű kényszer korlátozza)

Külső erők:

a pontrendszerhez NEM tartozó testektől származó erők

Belső erők:

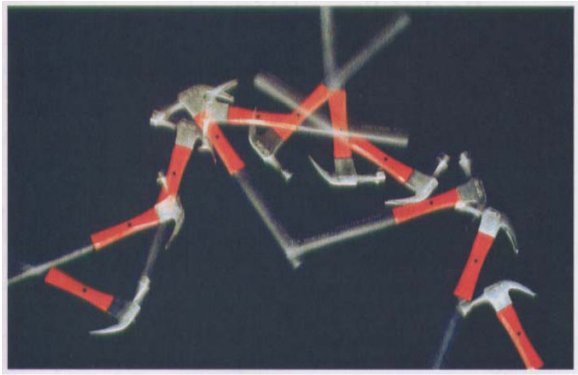
a pontrendszer tagjai között ébredő erők

Mindkét erőfajta lehet szabaderő vagy kényszererő.

Megmaradási tételek pontrendszerre 1.

Egy pontrendszer impulzusának idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható összes külső erők eredőjével. (*pontrendszer teljes impulzusa*)

Egy mechanikai rendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer egész tömege ebbe a pontba lenne egyesítve és a rendszer összes külső erőinek eredője erre a pontra hatna. (tömegközéppont mozgásának tétele, vagy súlyponttétel, *tömegközéppont*)



(Kísérletek:

1) alaktalan tárgyak hajítása

http://techtv.mit.edu/videos/3052-center-of-mass-trajectory

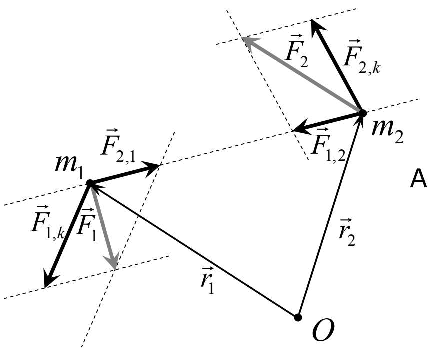
2) tricikli meghajtás tűzoltó készülékkel

http://techtv.mit.edu/videos/1067-fire-extinguisher-on-a-tricycle

a rakétahajtás elve

Ha a rendszerre nem hatnak külső erők, vagy ha ezek eredője zérus, akkor a rendszer impulzusa állandó, azaz a tömegközéppont evem-t végez, vagy nyugalomban van. (*zárt rendszer*)

Az impulzustétel származtatása



$\vec{F}_{1,k}$ és $\vec{F}_{2,k}$ a pontrendszeren kívülről származó külső erők

$\vec{F}_{1,2}$ és $\vec{F}_{2,1}$ a pontrendszer pontjai között ható, N-III axiómáját kielégítő belső erők

A mozgásegyenlet

az 1. tömegpontra: $\vec{F}_{1,k} + \vec{F}_{2,1} = \frac{d\vec{I}_1}{dt}$

a 2. tömegpontra: $\vec{F}_{2,k} + \vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{I}_2}{dt}$

a pontrendszerre: $\vec{F}_{1,k} + \vec{F}_{2,k} + \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{I}_1}{dt} + \frac{d\vec{I}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{2}\vec{I}_i \equiv \frac{d\vec{I}}{dt}$

ahol $\vec{I} = \sum_{i=1}^{2}\vec{I}_i$ *a pontrendszer (teljes) impulzusa*

erőlökéssel kifejezve $\vec{F}_{1,k}\Delta t + \vec{F}_{2,k}\Delta t + \vec{F}_{2,1}\Delta t + \vec{F}_{1,2}\Delta t = \Delta\vec{I}$

$$\Delta\vec{I}_{1,k} + \Delta\vec{I}_{2,k} + \Delta\vec{I}_{2,1} + \Delta\vec{I}_{1,2} = \Delta\vec{I}$$

N-III axiómája értelmében $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$ $\qquad \Delta\vec{I}_{2,1} = -\Delta\vec{I}_{1,2}$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i,k} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{I}_i = \frac{d\vec{I}}{dt}}$$

Egy pontrendszer impulzusának idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható összes külső erők eredőjével.

A tömegközéppont bevezetése

Írjuk fel a pontrendszerre vonatkozó impulzustételt:

a deriválás és az összegzés sorrendje felcserélhető

$$\sum_i \vec{F}_{külső,i} = \frac{d\sum_i \vec{I}_i}{dt} = \frac{d\left(\sum_i m_i\vec{v}_i\right)}{dt} = \frac{d\left(\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\sum_i m_i\vec{r}_i}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)}{dt^2} =$$

a tömegpontok tömege időben állandó

$$= \frac{\sum_j m_j}{\sum_j m_j}\frac{d^2\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)}{dt^2} = \sum_j m_j \frac{d^2\left(\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_j m_j}\right)}{dt^2} = \sum_j m_j \frac{d^2\vec{r}_{TKP}}{dt^2} = m_{összes}\vec{a}_{TKP}$$

bővítve a pontrendszer össztömegével

Ez pedig a tömegközéppont mozgásának tétele.

$$\vec{r}_{TKP} \equiv \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Egy test súlypontja az a pont, melyen a test súlyának hatásvonala a test minden helyzetében átmegy, s amely pont ezért a test súlyának támadáspontjaként tekinthető. *Archimedes*

Megmaradási tételek pontrendszerre 2.

Egy pontrendszer impulzusnyomatékának idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak eredőjével. (*pontrendszer teljes impulzusmomentuma*)

Ha a pontrendszerre nem hatnak külső erők (azaz zárt rendszer esetén)**, vagy ha a külső erők forgatónyomatékainak eredője zérus, akkor a rendszer impulzusmomentuma állandó.**

A tengely körül forgó merev testek esetén az impulzusmomentum

$$N_z = \Theta\omega_z$$

alakban is felírható, ahol Θ a test tömegeloszlásától függő tehetetlenségi nyomatéka, míg ω_z a forgómozgás szögsebessége.

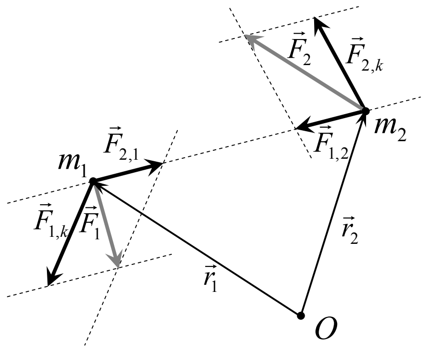
(Kísérletek:

1) mozdony bicajkeréken, 2) forgózsámoly

TAMOP 7:00-7:30 és 4:45-5:20)

A pontrendszer mozgási energiájának megváltozása egyenlő a pontrendszerre ható külső és belső erők munkáinak összegével.

Az impulzusmomentum tétel származtatása



$\vec{F}_{1,k}$ és $\vec{F}_{2,k}$ a pontrendszeren kívülről származó külső erők

$\vec{F}_{1,2}$ és $\vec{F}_{2,1}$ a pontrendszer pontjai között ható, N-III axiómáját kielégítő belső erők

A mozgásegyenleteket balról vektoriálisan szorozva $\vec{r}_i$ -vel:

az 1. tömegpontra: $\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,k} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2,1} = \frac{d\vec{N}_1}{dt}$

a 2. tömegpontra: $\vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,k} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{N}_2}{dt}$

a pontrendszerre: $\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,k} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,k} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2,1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1,2} = \frac{d\vec{N}_1}{dt} + \frac{d\vec{N}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{2} \vec{N}_i \equiv \frac{d\vec{N}}{dt}$

ahol $\vec{N} = \sum_{i=1}^{2} \vec{N}_i$ *a pontrendszer (teljes) impulzusmomentuma*

N-III axiómája értelmében $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$ $\longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{2,1} = \frac{d\vec{N}}{dt}$

A bal oldalon szereplő második tag 0, mert az $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ vektor m_2-ből m_1-be mutat, azaz párhuzamos $F_{2,1}$-gyel.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \frac{d\vec{N}}{dt}}$$

Egy pontrendszer impulzusnyomatékának idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő a rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak eredőjével.

Ütközések

Csoportosítása:

egyenes-ferde (attól függően, hogy az ütköző testek sebességei a tkp-jaikat összekötő egyenesbe esnek-e); ***(Kísérlet: biliárd golyók ferde ütközése*** Film: 700/62 50:49-***)***

centrális-nem centrális (attól függően, hogy az ütköző testek érintkezési pontja rajta van-e a testek tkp-jait összekötő egyenesen); ***(Kísérlet: pattogó golyók*** Film: 700/57 47:31-***)***

Határesetek „Tökéletesen ...”

Rugalmas ütközés (az impulzus és a mech. energia is megmarad):

$$m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$\Longrightarrow$

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

(Kísérlet: rugalmatlan ütközés légpárnás sínen Film: 700/68 54:59-***)***

Rugalmatlan ütközés (impulzus megmarad, mech. energia nem):

$$(m_1 + m_2)\mathbf{v}' = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \quad \Longrightarrow \quad v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

(Kísérlet: ballisztikus inga
http://www.youtube.com/watch?v=oNGm4mVWMuY

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Rugalmas ütközés

(Kísérlet: kiskocsik rugalmas ütközése légpárnás sínen
Film: 700/65 51:52-***)***

1) Mozgó kocsi ütközik azonos tömegű álló kocsinak:

$$m_1 = m_2 = m \qquad v_1 = áll. \quad v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1' = 0 \quad v_2' = v_1$$

2) Mozgó kocsi ütközik kétszeres tömegű álló kocsinak:

$$m_1 = m \quad m_2 = 2m \qquad v_1 = áll. \quad v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1' = -\frac{1}{3} v_1 \quad v_2' = \frac{2}{3} v_1$$

3) Mozgó kocsi ütközik leszorított kocsinak:

$$m_1 = m \quad m_2 = \infty \qquad v_1 = áll. \quad v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1' = -v_1 \quad v_2' = 0$$

A videó kísérleti adatait hasonlítsák össze a modell jóslataival!

Az időadatok a 0,6m út megtételéhez szükséges időt mutatják.

m_1=m; m_2=m	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
	t_1=1,149s	áll	áll	t'_2=1,151s
	v_1=	v'_1=0	v_2=0	v'_2=

m_1=m; m_2=2m	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
	t_1=0,817s	t'_1=2,566s	áll	t'_2=1,293s
	v_1=	v'_1=-	v_2=0	v'_2=

m_1=m; m_2=3m	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
	t_1=0,929s	t'_1=2,014s	áll	t'_2=2,021s
	v_1=	v'_1=-	v_2=0	v'_2=

m_1=2m; m_2=m	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
	t_1=1,127s	t'_1=3,485s	áll	t'_2=0,865s
	v_1=	v'_1=+	v_2=0	v'_2=

m_1=3m; m_2=m	1. kocsi		2. kocsi	
	előtt	után	előtt	után
	t_1=1,411s	t'_1=2,867s	áll	t'_2=0,958s
	v_1=	v'_1=+	v_2=0	v'_2=